

CB-1.240

ANÁLISIS COGNITIVO DE ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO

Leopoldo Zúñiga Silva
lzs@itesm.mx

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, San Luis Potosí, México

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática

Modalidad: CB

Nivel educativo: Educación de adultos (universitario)

Palabras clave: cálculo, cognición, resolución de problemas, aprendizaje

Resumen

La presente investigación contribuye al conocimiento de los aspectos cognitivos relacionados al aprendizaje de las matemáticas. Se describe un estudio de carácter cualitativo realizado sobre el funcionamiento cognitivo de un grupo de estudiantes de ingeniería, cuando abordan la resolución de un problema de cálculo de dos variables. Se presentan los referentes teóricos y el análisis de la forma en que se manifiestan las funciones cognitivas puestas en juego en el acto mental de la solución del problema. Los resultados muestran cómo el funcionamiento cognitivo afecta la forma en que los alumnos comprenden e interpretan los elementos conceptuales en cada fase del proceso de solución.

Introducción

En este trabajo se estudian los elementos cognitivos del aprendizaje cuando éste ocurre en escenarios con base en la resolución de problemas matemáticos vinculados al área de ingeniería. Existe evidencia en diversos reportes de investigación (García, 2013; Camarena, 2009; Mendible y Ortiz, 2007) y en las creencias de profesores, de que en este tipo de escenarios se propicia un mejor aprendizaje. Por ejemplo, Ríos (2002) señala:

Creo que un recurso importante (entre otros) en la enseñanza-aprendizaje de este tipo de cursos (matemáticas) es ... el análisis y la solución de un problema real en donde es necesaria la aplicación de métodos matemáticos. Tiene la ventaja de que los estudiantes se involucran en problemas relacionados con su área de estudio, viven en carne propia las dificultades de este tipo de tareas y les deja la sensación de que lo que están estudiando es útil (p. 1).

Sin embargo, aún y cuando se puede propiciar motivación para aprender con el empleo de situaciones problema vinculados al área de interés de los alumnos, tanto el nivel de conocimientos previos, como la forma en que piensan y asimilan en sus estructuras mentales los nuevos conocimientos, afectan el nivel de comprensión y aprendizaje obtenido.

Es importante entonces atender la situación y estudiar lo que sucede a nivel de funciones y procesos mentales respecto al aprendizaje, porque finalmente, aunque intervienen factores como hábitos, creencias, costumbres y otros factores sociales y culturales (y que, por su importancia, por supuesto, no pueden ser ignorados), éste sucede como resultado de procesos y operaciones mentales internas que dependen de un funcionamiento cognitivo individual.

En este contexto, el objetivo de esta investigación fue analizar el funcionamiento cognitivo de estudiantes universitarios al enfrentarlos el proceso de resolución de un problema matemático en cálculo de dos variables.

Marco teórico

Es importante señalar que en el ámbito de la educación matemática (o matemática educativa, como se le conoce en México), se han realizado diversas investigaciones en relación a los procesos cognitivos involucrados en procesos de aprendizaje de las matemáticas (Radford y Mélanie, 2009; Martínez y Argibay, 2007; Rodríguez, 2005; Womack y Williams, 1998). Sin embargo, tales investigaciones se enfocan en la reflexión teórica desde las neurociencias, o en el estudio de elementos cognitivos propios del conocimiento matemático, como lo son las imágenes y las definiciones conceptuales, los obstáculos de carácter epistemológico, y las operaciones mentales (análisis, síntesis, analogías, etc.) involucradas en algunos actos de aprendizaje. Sin embargo, prácticamente no se ha realizado investigación sobre las *funciones cognitivas* que subyacen a las operaciones mentales.

Es muy importante considerar esta situación porque en esos trabajos, sobre todo los que se realizan con estudiantes universitarios, se da por hecho que el funcionamiento cognitivo de los alumnos es acorde con la supuesta madurez mental que deberían tener en función de su edad.

De esta forma, atendiendo el propósito fundamental de lograr un análisis detallado del funcionamiento cognitivo de un grupo de estudiantes, esta investigación se llevó a cabo con base en el esbozo teórico implementado en un trabajo anterior propio (Zúñiga, 2007), en el

cual se describen las características de cada fase en el procesamiento de la información sobre las funciones cognitivas que aparecen en el acto mental de aprendizaje implicado en la resolución de un problema (ver Anexos).

Este referente teórico, a su vez, se basó en la teoría de funciones cognitivas de Reuven Feuerstein (1977). En esta teoría se sostiene que las funciones cognitivas son consideradas como los prerrequisitos básicos de la inteligencia. Son las funciones que subyacen a las operaciones mentales, sirven para la interiorización de la información y permiten la autorregulación del organismo. La interiorización es el pilar básico del aprendizaje y de la adaptación y, por tanto, de la inteligencia.

En palabras del propio autor de la teoría: “*Las funciones cognitivas como actividades del sistema nervioso explican, en parte, la capacidad del individuo para servirse de la experiencia previa en su adaptación a nuevas situaciones*” (Feuerstein, 1979). Esta observación es muy importante dado que en este trabajo se asume que los estudiantes construyen su propio aprendizaje en función del conocimiento previo que poseen.

Este marco teórico permitió la realización de un análisis detallado de lo que sucede a nivel cognitivo respecto a la forma en que se manifiestan las funciones cognitivas de los estudiantes cuando resuelven un problema matemático. Se describe a continuación cómo se desarrolló la actividad didáctica involucrada en este estudio.

Descripción de la experiencia y análisis de resultados

La investigación se llevó a cabo mediante una actividad en el aula con un grupo de 16 estudiantes con edades entre 19 y 21 años, de un curso de cálculo de dos variables para estudiantes de ingeniería, en una institución de educación superior privada de México.

La experiencia se realizó en un escenario de enseñanza común en el sistema habitual, esto es, mediante clases típicas donde el profesor asume el papel de guía, expone los temas que considera conveniente y propone ejercicios y problemas a resolver a los estudiantes.

El problema tratado fue el siguiente:

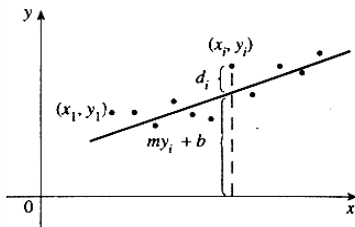
Suponga que un científico tiene razones para creer que dos cantidades, x y y se relacionan en forma lineal; es decir $y = mx + b$, cuando menos de manera aproximada para algunos valores de m y de b . El científico lleva a cabo un experimento y recopila datos en la forma

de los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, y los grafica. Los puntos no se encuentran exactamente en una recta, así que el científico desea determinar las constantes m y b de modo que la recta $y = mx + b$ se “parezca” a los puntos tanto como sea posible (véase la figura). Sea $d_i = y_i - (mx_i + b)$ la desviación vertical del punto (x, y) con respecto a la recta. El método de los **mínimos cuadrados** determina a m y a b , de modo que minimiza $\sum_{i=1}^n d_i^2$ que es la suma de los cuadrados de dichas desviaciones. Muestre que, de acuerdo con este método, la recta que más se “parece” se obtiene cuando:

$$m \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$m \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Por lo tanto, la recta se determina resolviendo estas dos ecuaciones con las dos incógnitas m y b .



La experiencia se realizó de la siguiente forma: primero se presentó el problema a los estudiantes, distribuidos en cuatro equipos de cuatro integrantes, y en seguida, en una sesión de 40 minutos, se les pidió que realizaran lo que se indica en él.

El análisis de datos se realizó atendiendo las características particulares del problema planteado, y de acuerdo con un mapa cognitivo que considera elementos de contenido, modalidad, operaciones, fases, nivel de complejidad, nivel de abstracción, y nivel de eficiencia (ver Anexos).

Se observaron dificultades para comprender lo que se plantea en el enunciado. A pesar de que los alumnos están familiarizados con la simbología que se usa, se manifestaron conflictos en la comprensión. Estos conflictos van desde dudas sobre lo necesario para minimizar la

sumatoria, y que se reflejan, por ejemplo, en preguntas como “¿lo que debemos hacer es derivar?”, hasta otros conflictos más profundos, tales como el que en alguno de los equipos no se entendió la explicación que se da sobre el método de mínimos cuadrados, ni lo que se pide realizar.

La función de *percepción clara* se ve afectada en los estudiantes debido a la aparición de estimulación novedosa en el enunciado del problema, por ejemplo, con el término “mínimos cuadrados”; también al nivel de complejidad, que el estudiante percibe en la simbología empleada, e incluso, a la amplitud del texto, lo que repercute en un conocimiento impreciso de los datos de la información. Esta situación está estrechamente relacionada con la pobre *exploración sistemática* observada. La *impulsividad* aparece en forma notable, por ejemplo, cuando los estudiantes advierten que se debe derivar, intentan hacerlo aún antes de tener claro cuál es la función a tratar y las variables involucradas, al grado de que en dos de los equipos de trabajo comienzan a derivar parcialmente respecto a x_i y y_i , cuando las variables independientes en el problema son m y b .

Es importante señalar que estas funciones cognitivas se ven afectadas también en forma considerable por otros dos aspectos relevantes: la *falta de motivación* y la consecuente *falta de atención* al abordar el problema. Aquí, es importante considerar que, en el aspecto motivacional, intervienen directamente *sesgos de pensamiento* como los determinados por la creencia (o al menos duda permanente) de que las matemáticas no les son útiles en su futuro ámbito profesional. Es decir, intervienen de manera decisiva factores de carácter sociocultural. Muchos estudiantes realizan actividades que el profesor les solicita (como resolver un problema) sólo por la motivación de obtener una nota, de acreditar un curso. Cuando se enfrentan a un problema, predomina una actitud esquivada, tratan de evitar el enfrentarlo lo más posible. Por ejemplo, durante la sesión en cuestión, al momento de iniciar la lectura del enunciado del problema, un alumno pregunta “¿Y esto para qué nos puede servir a nosotros?... aquí dice que le interesa a un científico...no es para un ingeniero”.

Es evidente que estos problemas en la fase de entrada no son consecuencia de factores asociados al desarrollo cognitivo de los alumnos, sino a “vicios” de pensamiento adquiridos a lo largo de su vida escolar. Situación que concuerda con lo señalado por Vergnaud (1990) cuando habla de su teoría de los campos conceptuales aplicada en sus inicios a niños y

adolescentes, en el sentido de que los elementos teóricos que la estructuran se refieren también a los procesos de aprendizaje del adulto, pero que estos últimos suceden “bajo restricciones que son más del orden de los hábitos y de sesgos de pensamiento adquiridos, que relativos al desarrollo del aparato psíquico”, y que a la vez, se puede soportar en las ideas de Piaget sobre las etapas de desarrollo intelectual, considerando que este trabajo se realiza con estudiantes de 19-21 años de edad.

Por otro lado, se observa que los alumnos tienen dificultades también con la función de *organización de la información*, aunque se puede decir que éstas no se deben a una incapacidad para realizarla, sino, más bien, a la incertidumbre en que se cae como producto de las situaciones ya mencionadas, así como a las características de la recuperación de información en la memoria a largo plazo respecto al prototipo que tienen los estudiantes de lo que es una función de dos variables (y cuáles son las variables) y a la noción de sumatoria. Por ejemplo, en dos de los equipos, en forma explícita, aparecen inquietudes en torno a esta última: de su conocimiento previo, lo que aflora y predomina es el significado sobre los símbolos. Asocian el símbolo \sum a las series numéricas infinitas, lo cual implica el uso de la función cognitiva de *conducta comparativa*, perdiendo de vista la información en el enunciado del problema y en consecuencia, la necesidad o conveniencia del uso de este símbolo en el planteamiento. Aparecen comentarios como “*sólo debemos derivar la serie, ¿no?*”, y “*¿cómo se deriva una serie?... ha... eso lo vimos en Mate II* (aludiendo al curso previo de cálculo integral en una variable y series numéricas infinitas)”.

En la fase de elaboración, como consecuencia de los conflictos observados en la parte inicial, se ven afectadas las funciones de *percepción y definición del problema*, *selección de información relevante*, *interiorización y representación mental*, y *la clasificación cognitiva*. Las funciones de *percepción y definición del problema*, y la de *selección de información relevante*, están directamente relacionadas a las de *percepción clara y exploración sistemática*, y afectadas por ellas en términos de las observaciones indicadas anteriormente. Respecto a la *interiorización y representación mental*, se puede inferir su afectación en algunas acciones de los estudiantes, por ejemplo, cuando perciben que la función involucrada es de dos variables independientes, pero les causa conflicto el que no aparezca en forma explícita la variable dependiente (alguien comentó que “*la función no tiene nombre*”),

además aparecen dudas respecto a si la sumatoria es o no una función (y, en consecuencia, susceptible de diferenciación o no). Esto provoca que al momento de derivar no usen una simbología apropiada, por ejemplo, no indican qué cosa van a derivar, sólo escriben el resultado.

La *clasificación cognitiva* es una función que a su vez depende de otras funciones, entre ellas las de percepción clara, uso de distintas fuentes de información, conducta comparativa y distinción de información relevante, todas ellas afectadas desde la fase de entrada. Pero, además, se presentan dificultades en ella debido a que los alumnos tienen deficiencias conceptuales respecto a las nociones previas necesarias, tales como sumatoria, función de dos variables, derivada parcial, valor mínimo de una función de dos variables, etc.

Finalmente, en la fase de salida, sólo se observaron conflictos en la función de *comunicación explícita* y en la de *precisión y exactitud de la respuesta*. Algunos estudiantes llegan a las ecuaciones indicadas, pero no escriben la respuesta en forma explícita. Es decir, de acuerdo a la teoría, presentan una comunicación egocéntrica: no consideran necesario mayor explicación sobre la solución, suponen que cualquier otra persona que vea su trabajo, lo comprende bien.

Conclusiones

Es muy importante mencionar que los conflictos observados en la experiencia, no son producto de incapacidades atribuibles a factores propios del desarrollo cognitivo, ni a un estado de disfunción permanente, sino al efecto de las disfunciones locales que aparecieron en actos mentales específicos y que fueron provocadas principalmente por la forma en que se abordó y desarrolló la experiencia de aprendizaje. Es decir, tales disfunciones se observaron como consecuencia de la exposición de los estudiantes al escenario común de enseñanza utilizado, lo cual provocó que afloraran sesgos de pensamiento adquiridos en ellos a lo largo de su historia escolar, como la idea de que los conocimientos matemáticos que aprenden no les serán de utilidad y que el saber matemáticas se reduce a la aplicación de fórmulas o al uso de procedimientos y métodos.

La teoría utilizada, desde la perspectiva de esta investigación, implica la consideración de que la *madurez mental* no garantiza la eficiencia de las funciones cognitivas en un acto mental de aprendizaje. Sobre todo, cuando ese acto mental es afectado por el sistema de creencias,

costumbres, hábitos de estudio y otros factores socioculturales respecto al conocimiento que se aborda; en este caso, el conocimiento matemático.

Si bien se logró realizar el análisis propuesto de las funciones cognitivas involucradas en el proceso de resolución del problema matemático en el ámbito de la ingeniería, quedan pendientes de investigación algunos aspectos que se desprenden de los resultados de este trabajo, entre ellos: (1) profundizar en el análisis de las relaciones entre el funcionamiento mental operativo (respecto a los esquemas matemáticos ya establecidos en la memoria y los nuevos conocimientos) y las funciones cognitivas subyacentes, considerando que este trabajo constituye en realidad una primera aproximación a ese análisis; (2) investigar sobre las funciones cognitivas que no emergieron en esta experiencia y que podrían aparecer en la resolución de problemas que involucran otros contenidos matemáticos del cálculo u otros escenarios didácticos; y (3), realizar estudios de reproducibilidad de la experiencia en contexto. Por ejemplo, implementando el diseño didáctico utilizado en este trabajo, con otros estudiantes, con otros profesores, y de otras instituciones educativas.

Referencias

- Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa*, 9, 15-25.
- Feuerstein, R. (1977). *Mediated Learning Experience: A theoretical basis for cognitive human modifiability during adolescence*. In Mittler P., (ed.), *Research to practice in mental functions*. Vol. 2, Baltimore, University Park Press.
- Feuerstein, R. (1979). *The Dynamic Assessment of Retarded Performers: The Learning Potential Assessment Device, Theory, Instruments and Techniques*. Baltimore: University Park Press.
- García, J. A. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación*. 37(1), 29-42.
- Martínez, J., Argibay, P. (2007). El aprendizaje de las matemáticas y el cerebro. *Ciencia Hoy*. Vol. 17, Núm. 99, 46-51.
- Mendible, A., Ortiz, J. (2007). Modelización matemática en la formación de ingenieros. La importancia del contexto. *Enseñanza de la Matemática*. 12-16. Número extraordinario, 133-150.

- Radford, L. y Mélanie, A. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 12(2), 215-250.
- Ríos, J. G. (2002). *Los proyectos en los cursos de estadística*. La integral, Órgano Informativo y de Divulgación del Departamento de Matemáticas, DECIC, Vol. 1, Núm. 6, ITESM Campus Monterrey, 1.
- Rodríguez, I. (2005). La resolución de problemas y el pensamiento matemático divergente. *Revista Ciencias*. 2 (14), 72-97.
- Vergnaud, G. (1990). *La teoría de los campos conceptuales*. Recherches en Didactique des Mathématiques, CNRS y Université René Descartes, Vol. 10, No. 2, 3, 133-170. (Traducción al español por Juan D. Godino).
- Womack, D. & Williams, J. (1998) Intuitive counting strategies of 5- to 6-year-old children within a transformational arithmetic framework. *Proceedings of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. (Eds. Alwyn Oliver & Karen Newstead.) Stellenbosch, SA, University of Stellenbosch. Vol.4., 185-192.
- Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería : un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 10, Núm. 1, 145-175.

ANÁLISIS COGNITIVO DE ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO

Leopoldo Zúñiga Silva

ANEXOS

1. Definiciones de las funciones cognitivas

En la fase de entrada:

La **comprensión** implica tener una **percepción clara** tanto de los datos que se ofrecen en el enunciado, como del estado final o meta a la que se quiere llegar (los datos proporcionan una descripción completa del contexto del problema y de los parámetros bajo los cuales se debe operar).

154

A su vez, para el logro de la percepción clara es necesario que las funciones cognitivas de **exploración sistemática de una situación de aprendizaje** y la de **organización de la información**, aparezcan en forma eficiente.

En la fase de elaboración:

La **resolución del problema** implica la búsqueda de una vía de solución (una vía que conecte el estado inicial con el estado meta), pero antes de esta búsqueda, es necesario que el sujeto sea capaz de percibir y definir con precisión el problema, lo cual implica que su función cognitiva de **percepción y definición de un problema** aparezca en forma eficiente. Este es un momento crucial en el proceso porque constituye el enlace entre la comprensión de la situación problemática y lo que es propiamente la resolución del problema. Se pueden tener dificultades en el desarrollo de la fase de elaboración cuando no se define con precisión el problema en términos de la meta a la que se quiere llegar.

La búsqueda de una vía de solución implica la **planificación de la conducta** (una función cognitiva que está presente en todo el proceso de resolución), así como la recuperación de esquemas en la memoria a largo plazo que involucran conocimientos matemáticos, y la cual a su vez requiere de una **conducta comparativa**.

El proceso de pensamiento para el uso, adecuación o modificación de esquemas previos en la construcción de las nuevas ideas, nociones o conceptos matemáticos, involucra al menos, la capacidad de **pensamiento hipotético** y la conducta comparativa.

La construcción de conocimiento requiere para la codificación de la información correspondiente a las nuevas ideas, nociones y conceptos, de la función cognitiva de **interiorización y representación mental**, que es de hecho, una de las funciones más importantes.

En la fase de salida:

La **respuesta** ha de emitirse utilizando un lenguaje claro y preciso en función de la meta final del problema formulado, es decir, se debe observar una **comunicación explícita** de tal respuesta.

Se debe observar capacidad para pensar y expresar la respuesta correcta al problema, así como para reflexionar antes de comunicarla, es decir, debe haber precisión y **exactitud en la respuesta** y un **control** en la emisión de la misma.”

Estas son las definiciones sobre las funciones cognitivas a las que se refiere este modelo teórico:

Percepción clara: conocimiento exacto y preciso de la información. La disfunción cognitiva *percepción borrosa* consiste en un proceso pobre e impreciso de los datos de la información.

Exploración sistemática de una situación de aprendizaje: es la capacidad para organizar y planificar la información. La disfunción de la exploración sistemática es la *impulsividad ante una situación de aprendizaje*, consistente en una incapacidad para tratar la información de forma sistemática y planificada.

Organización de la información: capacidad para utilizar diferentes fuentes de información a la vez.

Percepción y definición de un problema: consiste en la habilidad para delimitar *qué* pide el problema, *qué* puntos hay que acotar y *cómo* averiguarlos.

Planificación de la conducta: capacidad para prever la meta que se quiere conseguir utilizando la información adquirida previamente.

Conducta comparativa: consiste en la capacidad para realizar todo tipo de comparaciones y relacionar objetos y sucesos anticipándose a la situación. La deficiencia en la conducta comparativa consiste en la incapacidad para establecer relaciones de semejanza y diferencia entre objetos y sucesos.

Pensamiento hipotético: capacidad para establecer hipótesis y comprobarlas aceptando o rechazando la hipótesis previamente establecida.

Interiorización y representación mental: capacidad para utilizar símbolos internos de representación. La falta o deficiencia de la interiorización se manifiesta en la conducta demasiado concreta y sin generalización apropiada.

Comunicación explícita: consiste en utilizar un lenguaje claro y preciso que responda al problema formulado en la tarea. Esto supone un cierto nivel de comprensión por parte del sujeto. La disfunción es la comunicación egocéntrica.

Precisión y exactitud en las respuestas: capacidad para pensar y expresar la respuesta correcta a un problema o situación general de aprendizaje.

Control de las respuestas: consiste en la capacidad para reflexionar antes de emitir cualquier tipo de respuesta. El control y la autocorrección implican procesos metacognitivos.

2. Mapa cognitivo:

Contenido: función de dos variables y derivadas parciales a nivel operativo.

Modalidad: verbal, simbólica y gráfica.

Operaciones: analogías, comparaciones y relaciones.

Fases: en la *fase de entrada*, se requiere que el estudiante perciba que en el enunciado se describe en qué consiste la idea básica del método de mínimos cuadrados y entonces lo que se pide es sólo minimizar $\sum_{i=1}^n d_i^2$ para llegar a las ecuaciones propuestas. En la *fase de elaboración*, primero es necesario que los alumnos, una vez que tienen claro lo que se pide en el enunciado, sean capaces de acotar lo que se debe realizar a nivel operativo (por ejemplo, sustituir $d_i = y_i - (mx_i + b)$ en $\sum_{i=1}^n d_i^2$ para enseguida derivar parcialmente respecto a las variables m y b) y, en su caso, averiguar lo que sea necesario. Deben tener la capacidad de recordar sus conocimientos sobre sumatorias e identificar que en la información aparece una función de dos variables. Después, se debe recurrir a los conocimientos previos sobre la forma de determinar un mínimo y emplear la simbología adecuada en el proceso de

diferenciación. Finalmente, en la *fase de salida*, los estudiantes sólo deben verificar las ecuaciones que se proponen en el propio enunciado y externarlo verbalmente.

Nivel de complejidad: medio-alto (los conocimientos y operaciones requeridos no requieren por completo de altos niveles de abstracción).

Nivel de abstracción: medio-alto (intervienen varias nociones y símbolos de matemáticas avanzadas, tanto del curso en cuestión como de otros precedentes).

Nivel de eficiencia: medio. No es un nivel alto porque es considerable el grado de automatización requerido.