



I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática  
II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática

**SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON PARÁMETROS  
UN ENFOQUE DINÁMICO**

*Silvia Santos; Mario Di Blasi Regner*

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco, Argentina

[silvia.santos@live.com.ar](mailto:silvia.santos@live.com.ar), [mario.diblas@gmail.com](mailto:mario.diblas@gmail.com)

### Resumen

Uno de contenidos más importantes del Álgebra y la Geometría Analítica, para estudiantes de primer año de carreras de Ingeniería, es sistemas de ecuaciones lineales.

En este trabajo presentamos una propuesta de enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales desarrollada en el marco de una investigación, que utiliza como recurso escenas dinámicas construidas con GeoGebra®. Esta herramienta ofrece la posibilidad de utilizar diferentes representaciones (algebraica, geométrica, numérica) de uno o más objetos en forma simultánea.

Nuestro objetivo es favorecer en los alumnos el pasaje entre registros de representación semiótica, del algorítmico al verbal y/o del gráfico al algebraico, competencia que consideramos necesaria para “apropiarse” de un objeto matemático.

**Palabras clave:** Sistemas de ecuaciones lineales, Geometría dinámica, registros de representación, aprendizaje.

### 1. Introducción

En el curso de Álgebra y Geometría Analítica que se imparte en la Facultad Regional General Pacheco de la Universidad Tecnológica Nacional, Argentina, hemos utilizado representaciones gráficas y algebraicas de carácter dinámico, con el objetivo de promover en los estudiantes la conversión entre diferentes representaciones de los conjuntos de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Según la teoría de R. Duval (1998) sobre registros de representación semiótica, esta conversión es una actividad cognitiva necesaria para lograr una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos. Hay, además, muchos antecedentes del uso de asistentes geométricos en la enseñanza del Álgebra Lineal, tales como las investigaciones de Macías, L y Portillo, H., (2006); Uicab, R. y Oktaç, A., (2006), entre otros. Los instrumentos que utilizamos para recoger datos fueron: cuestionarios, experimentos de enseñanza, registros en video, y entrevistas en profundidad con alumnos seleccionados del grupo, luego de la experimentación.

### 2. Núcleo conceptual. Antecedentes

Una de las dificultades centrales del Álgebra para estudiantes de Ingeniería es el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales (SEL), no solo desde el aspecto de su resolución sino también de su conceptualización. Un alumno ha logrado la conceptualización de un objeto matemático cuando es capaz de ponerlo en uso por sí mismo en situaciones que encontrará fuera de un contexto de enseñanza y sin una indicación intencional (Brousseau G., 1986). Los SEL con parámetros, en  $\mathbb{R}^2$ , son la “entrada” a otros conceptos tales como SEL en  $\mathbb{R}^3$ , en  $\mathbb{R}^n$ , independencia lineal, intersección de rectas y planos en  $\mathbb{R}^3$ , entre muchos otros del Álgebra Lineal.

La construcción de cierto conocimiento matemático no implica necesariamente en los alumnos la adquisición de la capacidad para “cambiar” de registro de representación.

Un registro de representación se define como un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático, que además cumple con las siguientes características: es identificable, permite el tratamiento, es decir la manipulación y transformación dentro del mismo registro y permite la conversión, consistente en la transformación total o parcial en otro registro. (Duval R., 1993)

La monumental evolución que ha alcanzado la tecnología educativa en los últimos veinte años, pone hoy a disposición de profesores y alumnos softwares de Geometría Dinámica (SGD). GeoGebra ® es un software libre para educación matemática que, desde una operatoria sencilla, ofrece diversas representaciones (algebraica, geométrica, numérica) de uno o más objetos en forma simultánea.

Nuestro modelo de enseñanza se fundamenta en los conceptos teóricos de R. Duval (1998) sobre registros de representación semiótica, en investigaciones que utilizan la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación (Segura S, 2004) y sobre uso de asistentes geométricos en la enseñanza del Álgebra Lineal (Macías L, 2006; Uicab R, 2006).

Según la teoría de registros de representación semiótica, la comprensión no significa dar un salto desde el contenido de una representación en particular hasta el concepto puramente matemático representado sino en relacionar diversos contenidos de representación del mismo objeto. Es decir, que para la enseñanza de la matemática, lo más importante no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los alumnos sean capaces de relacionar varias maneras de representar los contenidos matemáticos (Duval R, 1998).

Utilizando como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica, Segura (2004) analiza la construcción y aplicación de una secuencia didáctica que facilita el aprendizaje y solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales. Esta secuencia se diseñó con la intención de que las alumnas trabajen con diferentes registros de representación semiótica. Estuvo dirigida a alumnas de 3º año de enseñanza media de una escuela de Mendoza, Argentina. Se trabajó con lápiz y papel. Concluye que el trabajo en los tres registros de representación (verbal, gráfico y algebraico) facilita que el alumno identifique al objeto en todos los registros, puesto que se emplean de modo indistinto para representarlo.

La investigación de Macías y Portillo (2006) es un trabajo presentado en el curso de Álgebra Lineal en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México. Diseñaron actividades en SGD, con el objetivo de que los estudiantes descubran las relaciones entre la representación matricial de una transformación lineal (en dos y tres dimensiones) y sus propiedades geométricas. Remarca la importancia de los conocimientos previos, la indagación y la formulación de conjeturas. Realiza una crítica la enseñanza tradicional, ya que esta dirigida a una minoría de estudiantes (los futuros matemáticos de profesión).

Respecto de la utilización de la geometría dinámica, enfatiza sobre la interactividad, rapidez y fluidez de la exploración dinámica.

Uicab y Oktaç (2006) indagan la presencia o ausencia de un pensamiento sistémico en un grupo de estudiantes del programa de maestría del Departamento de Matemática de la Universidad Autónoma de Yucatán (México), al resolver problemas de extensión lineal. El planteo es de tipo geométrico, haciendo uso de SGD. Observan que los estudiantes no realizan las conexiones adecuadas entre los conceptos involucrados. Sugieren la conveniencia de diseñar actividades en las que los estudiantes no sean

dependientes del profesor y se los estimule a generar su propio conocimiento, hecho que podría ayudarles a desarrollar las conexiones para solucionar problemas.

### 3. Metodología

La propuesta estuvo dirigida a estudiantes de un curso de Álgebra y Geometría Analítica que cursan el primer año de la carrera de Ingeniería Mecánica en la Facultad Regional Pacheco de la Universidad Tecnológica Nacional. Dicha asignatura es anual, con una carga horaria de 6 horas semanales.

Tuvo lugar en la 5ª semana de clases del ciclo 2011; participaron 37 alumnos y los dos investigadores, uno de ellos en el rol de “observador no participante” y el otro como “profesor”.

Previamente, en la 1ª semana de clases, se realizó una presentación del software GeoGebra ®. Se mostraron brevemente sus distintas barras de herramientas y se solicitó que lo instalaran en sus computadoras para “explorar” en forma personal.

La experiencia tuvo una duración aproximada de 90 minutos y se desarrolló en el aula donde habitualmente se dicta clase. Se utilizaron las computadoras portátiles personales de 10 alumnos. Los alumnos trabajaron en grupos de 3 o 4 integrantes.



Imagen 1: Vista general de la clase



Imagen 2: Grupo de alumnos trabajando

Se impartieron las siguientes pautas generales: cada alumno debía leer las consignas de la Actividad 1; en base a ellas, modificar la escena original tantas veces como le fuera necesario y anotar sus conclusiones respetando el tiempo indicado; una vez transcurrido ese lapso se haría una puesta en común; no estaba permitido pasar a la Actividad 2, antes del cierre de la Actividad 1; no se debía corregir lo escrito; de igual modo se trabajaría con cada una de las Actividades.

Se entregó en forma impresa una secuencia de 6 actividades a cada alumno y se pidió que abrieran la escena diseñada en GeoGebra ®.

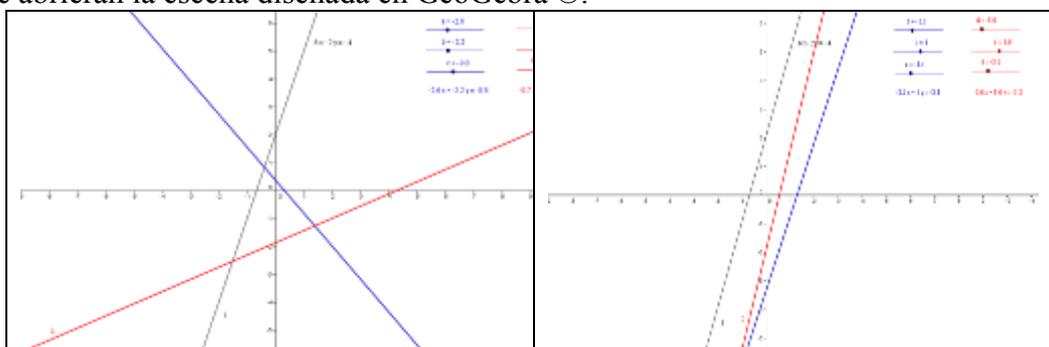


Imagen 3: Escena dinámica inicial

Imagen 4: Escena dinámica modificada por T. B. en la Actividad 2

La Actividad 1 se elaboró con el objetivo de observar si los alumnos distinguían la presencia de los registros de representación gráfico y algebraico. La Actividad 2, en cambio, se orientó hacia el uso del SGD. Las restantes Actividades se diseñaron con la intención de favorecer en los alumnos el pasaje entre registros de representación semiótica, del gráfico al algebraico y/o del algorítmico al verbal.

Presentamos, a modo de ejemplo, una de las actividades que se propone a los alumnos:  
- Indique las posibles posiciones relativas de las rectas  $r$  (fija),  $s$  y  $g$  (móviles) de modo tal que, el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea incompatible. En ese caso, teniendo en cuenta que cada uno pudo representar diferentes rectas, ¿encuentran alguna condición que deban cumplir los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , y  $f$ ?

$$\begin{cases} 6x - 2y = -4 \\ ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

#### 4. Algunos resultados

A partir del análisis de los distintos registros de la experiencia se observa una excelente disposición de los alumnos a participar en la propuesta, respetando las pautas indicadas. Se realizó una buena administración del tiempo. Durante la experiencia algunos pocos alumnos trabajaron solo con lápiz y papel.

En general, se pone de manifiesto una seria dificultad para interpretar consignas y expresar verbalmente conclusiones y utilizan equívocamente algunos términos como, por ejemplo, “múltiplo”.

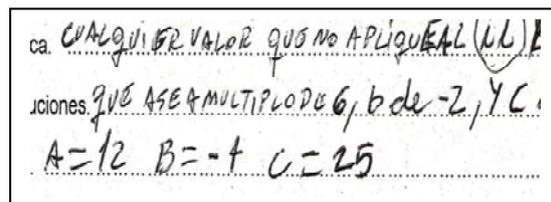


Imagen 5: Uso erróneo del término

“múltiplo”

En la Actividad 1, como se esperaba, la mayoría de los alumnos no percibió la presencia de ambos registros de representación: gráfico y algebraico. Se mostraron sorprendidos cuando en la puesta en común un alumno afirmó: “Al mover un deslizador también cambian los coeficientes de las ecuaciones, no solo la posición de la recta”.

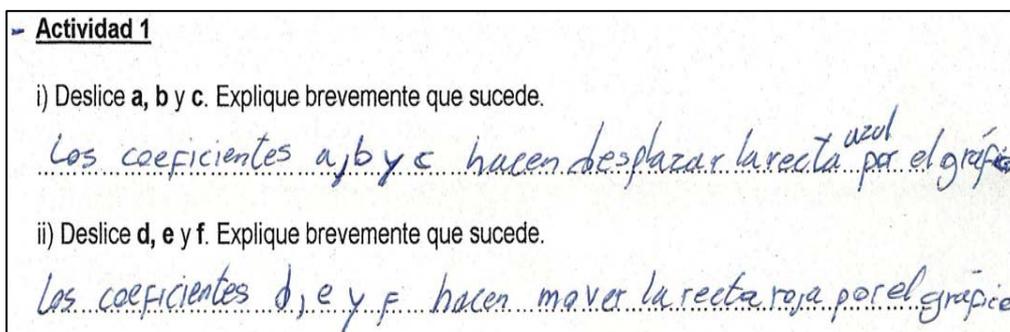


Imagen 6: Ausencia de reconocimiento de registro algebraico

A medida que se fueron desarrollando las distintas actividades, las puestas en común fueron cada vez más ricas en debates, con aciertos y errores.

En la Actividad 6, que se mostró como ejemplo, la mayoría de los alumnos logró relacionar las distintas representaciones: gráfica, algebraica y numérica proponiendo ejemplos de las variadas situaciones que podían presentarse.

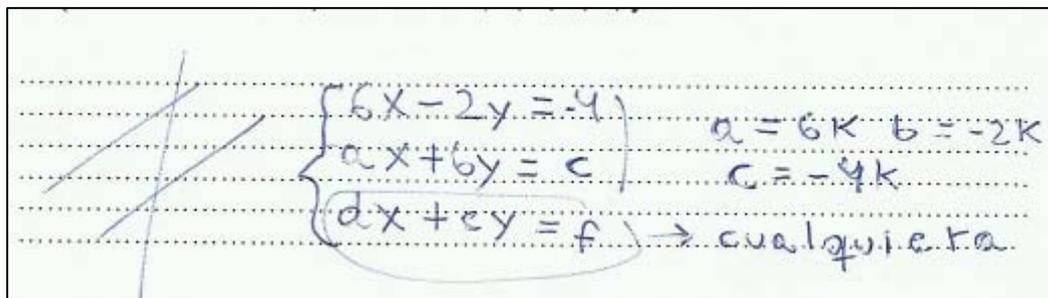


Imagen 7: Producción del alumno A.M. en la Actividad 6.

En clases posteriores se abordaron los contenidos rectas y planos en  $\mathbb{R}^3$  y distancias, donde se pudo observar que, a diferencia de años anteriores, los alumnos hacían conversiones del registro geométrico al algebraico y del algebraico al geométrico de manera autónoma en la resolución de problemas.

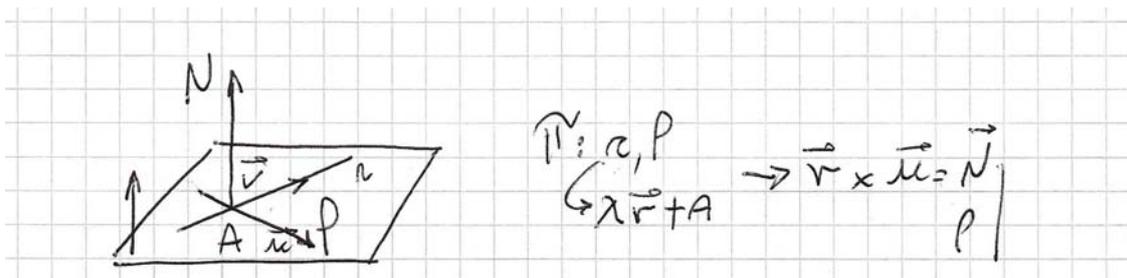


Imagen 8: Producción de L. P. Pasaje de registro verbal a geométrico y de geométrico a algebraico en la resolución de un problema de la unidad temática Rectas y Planos.

## 5. Conclusiones

Trabajar en el aula habitual (no en un laboratorio de informática) con las computadoras personales creó un poco de “desorden” inicial. Los alumnos trabajaron en un ambiente familiar, con sus profesores, pero con una propuesta completamente diferente. Se mostraron interesados y activos en todo momento. Al finalizar la clase el alumno O.I. pidió que les enviáramos por correo electrónico las actividades impresas y las escenas SGD. Al despedirse, la alumna M. M. dijo: “*hasta el martes profes, disfruté mucho la clase*”. Para D’Amore (2006) el saber adquirido es el resultado de la elaboración de la experiencia con la que se aprende. Esta elaboración consiste en la interacción entre el individuo y su ambiente, pero además en el modo en que internaliza el mundo externo. En lo referido al objetivo de la propuesta, favorecer la utilización de diferentes registros de representación se observa, como ya mencionáramos anteriormente, que los alumnos hacen conversiones del registro geométrico al algebraico y del algebraico al geométrico de manera autónoma y sin indicación expresa en la resolución de problemas relativos a otros contenidos.

Con respecto al diseño de las actividades, se deberá realizar algunos pequeños ajustes en las consignas de modo tal que la experiencia se pueda completar en un lapso de tiempo menor.

## 6. Referencias bibliográficas

- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7 (2), 33-115.
- D'Amore, B. (2006). Conclusiones y perspectivas de investigación futura. *Revista Latinoamericana de Investigación Educativa. Número Especial*. 301-306.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annale de Didactique et de Sciences Cognitives*. 5, 37-65.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F.Hitt (Ed.) *Investigaciones Matemáticas Educativas II*. México.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Macías Gutiérrez, L y Portillo Lara, H. (2006). Transformaciones Lineales con Cabri. *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Cabri*. Bogotá. Colombia.
- Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación Educativa*. 7 (1), 49-78.
- Uicab, R. y Oktaç, A. (2006). Transformaciones Lineales en un ambiente de Geometría Dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación Educativa*. 9 (3), 459-490.