EL INFINITO. CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA.

María Teresa Juan; Virginia Montoro
Centro Regional Bariloche - Universidad Nacional del Comahue –Argentina
mayte.juan@crub.uncoma.edu.ar / vmontoro@gmail.com

Resumen
Con el objeto de indagar las concepciones de alumnos de secundaria respecto a aspectos muy simples del infinito, realizamos el análisis de las respuestas a un cuestionario escrito, solicitadas a 195 estudiantes de secundaria. Hemos utilizado métodos estadísticos multivariados: un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) y posterior a este análisis realizamos una Clasificación Jerárquica de los estudiantes según sus modos de respuestas. Los resultados nos permiten determinar cinco clases de estudiantes según son modos de respuestas: cada una de estas clases la podemos identificar globalmente con las siguientes ideas: posibilidad de obtener colecciones infinitas y infinito distinguido de todo - duda e inseguridad en la respuesta - infinito asociado a muy numeroso - infinito no es posible - en infinito está todo - no contesta.

Palabras clave: Infinito – Matemática – Concepciones – Estudiantes - Secundaria

1. Introducción

La palabra “infinito”, forma parte del lenguaje cotidiano y está cargada de significado; un significado, en muchos casos, diferente del significado matemático. Consideramos que concebir una colección de infinitos elementos presentes simultáneamente requiere poner en juego procesos mentales de un notable nivel de abstracción, ya que el infinito es un concepto que carece de correlato directo en la naturaleza y su comprensión requiere, por ende, tratar las cantidades de modo muy diferente al que es habitual al interactuar con colecciones finitas.

En las últimas décadas, con el desarrollo de estudios en educación matemática, varios autores, como Fischbein y otros (1979), Sierpinska (1985), Cornu (1983), Moreno A. y Waldegg (1991, 1995), Waldegg (1993), Artigue (1995), entre otros, han observado que la noción de infinito es frecuentemente contradictoria en los estudiantes, que su comprensión es lábil y que éstos encuentran serias dificultades de conceptualización cuando se enfrentan con conceptos que la implican.

Montoro y de Torres Curth (1999) expresan que la dificultad en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos relacionados con el infinito radica, no sólo en su riqueza y complejidad, sino también en el hecho de que los aspectos cognitivos involucrados no se pueden generar puramente a partir del simple contacto del alumno con la definición matemática provista por el profesor o por los textos.

Antes de abordar teorías formalizadas, los seres humanos tenemos una cierta concepción lo que Fischbein et al (1979) llaman imagen (conceptual) informal; la investigación muestra que tales imágenes conceptuales a menudo persisten mucho después de que las ideas formales son introducidas. Estas concepciones personales pueden implicar rasgos esencialmente contradictorios. Por ejemplo, las experiencias cotidianas invariablemente sugieren que "el todo es mayor que la parte", y así resulta, que si a un conjunto le retiramos algunos elementos, el conjunto resultante no podría tener la misma cantidad de elementos que el conjunto de partida, situación que

claramente es verdadera en los conjuntos finitos, pero falsa cuando se trata con conjuntos infinitos.
En la presente investigación, cuando hablamos de *concepción sobre el infinito*, consideramos todas las representaciones que evoque y ponga en juego el sujeto frente a situaciones que involucren el concepto de infinito, incluyendo representaciones de diferente orden de complejidad, que se extienden desde lo que algunos autores llaman *intuición* del infinito (Fischbein y col. 1979; Tirosh, 1991), hasta ideas acordes con la conceptualización matemática del mismo. En ocasiones hablaremos de *concepciones alternativas,* para referirnos a ideas que no se ajustan al estatus científico del infinito matemático, por cuanto el término *alternativa* establece una diferenciación con las concepciones científicas pero al mismo tiempo da a la concepción entidad en sí misma.
Particularmente Monaghan (2001) examinó lo que él llama *concepciones subyacentes* sobre el infinito en estudiantes preuniversitarios entre 16 y 18 años de edad. Los principales puntos encontrados se pueden resumir así: la primera visión de los estudiantes respecto al infinito es como un proceso, *algo que sigue y sigue para siempre*, sin embargo encontró en algunos estudiantes una visión del infinito como un objeto, a través de la referencia a un número muy grande o a colecciones que contienen más que cualquier número finito de elementos y que la concepción de los estudiantes sobre el infinito es inherentemente contradictoria y lábil.
En un estudio previo hemos estudiamos las concepciones de alumnos, sobre el infinito en el mismo contexto aquí empleado, pero en estudiantes universitarios de distintas carreras. En aquel caso la formación matemática resultó la variable de mayor peso para la comprensión de este concepto, seguida por el avance en la carrera. La concepción predominante en los ingresantes a la universidad es la imposibilidad de construir una colección infinita, pero ante colecciones infinitas presentadas como tales, identificarla con todo; en estudiantes de mayor edad pero sin una instrucción específica en matemática predomina la concepción del infinito identificado con mucho y por último los estudiantes avanzados, particularmente de Matemática, aceptan las colecciones infinitas sin dificultad y diferencian infinito de todo. Las ideas correctas, en los diferentes aspectos indagados están fuertemente asociadas entre sí, en cambio las ideas alternativas se encuentran muy diferenciadas (Montoro, 2005).
En el presente estudio nos situamos en una franja etaria entre 13 y 19 años, es decir estudiantes de secundaria y de diferentes colegios.

2. Objetivos:

Nos planteamos indagar las concepciones de estudiantes de secundaria, sobre aspectos básicos de la noción de infinito.
Específicamente, nos propusimos indagar si las respuestas de los estudiantes dan cuenta de: la posibilidad de obtener una colección infinita de elementos a partir de la combinación de pocos o muchos elementos que se repiten o no; la distinción entre “infinito” y “mucho” y por último, la posible distinción entre infinito y *todo*.

3. Metodología

3.1. Participantes

La población para este estudio está conformada por 195 estudiantes entre 13 y 19 años que asisten a tres colegios de la ciudad de Bariloche, en la República Argentina.
Los colegios elegidos son establecimientos de enseñanza secundaria de esta ciudad. Describiremos de manera muy sintética estos tres colegios:

CEM 2 y CEM 46: son dos colegios públicos y gratuitos, de jornada simple, de planes de estudios de 5 años. Las principales diferencias entre estos dos colegios, están dadas por la cantidad de estudiantes, (CEM 2: 230 alumnos; CEM 46: 650 alumnos) y la población de docentes (CEM 2: pocos docentes, todos con título profesional, con muchos años de permanencia en el colegio; CEM 46: muy numerosa, muchos sin ningún título profesional). El CEM 2 asimismo ha tenido un plan sostenido respecto de la enseñanza matemática.
LOSANDES: colegio público de gestión privada, con orientación tecnológica y el plan de estudios es de 6 años. Tiene una matrícula de 190 alumnos aproximadamente y solo 3 docentes de matemática. En este último colegio, desde el plan institucional se valora mucho la formación matemática.

3.2. Instrumento de indagación

Propusimos un cuestionario constituido por preguntas que indagan los aspectos del infinito expresados en objetivos[61]. La mayoría de estas preguntas presentaban la posibilidad de combinar teclas para dar determinadas órdenes a una computadora, otras preguntas se plantean en un contexto natural. Todas estas preguntas tienen además un ítem de respuesta abierta: “justifica tu respuesta”[62].

3.3. Metodología de análisis

Teniendo en cuenta la gran cantidad de datos con que contábamos, las respuestas a este cuestionario fueron analizadas mediante un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) (Benzécri, J., 1973), método especialmente diseñado para describir, visualizar y sintetizar grandes cantidades de datos obtenidos sobre un conjunto de individuos.
Posteriormente realizamos una Clasificación de los estudiantes a partir de sus respuestas. En forma sintética, el método de clasificación consiste en un *método jerárquico ascendente* (Ward, J. 1963) que comienza con una partición del conjunto de los 195 sujetos de manera que cada uno de los sujetos es el único elemento de una clase y en cada iteración se agrupan en una nueva clase aquellas dos clases “*más parecidas*”, en el sentido que posean casi las mismas asociaciones con los modos de respuesta. El investigador selecciona en qué iteración cortará el proceso, de manera tal que la conformación de las distintas clases, así obtenidas, tenga sentido en términos del estudio realizado[63].

[61] El cuestionario completo se encuentra en Juan y Montoro (2009).
[62] A modo de ejemplo, mostramos una pregunta de cada tipo:
P2: Juan y María, juegan con una máquina que puede realizar 10 tareas distintas y posee un teclado con tres teclas: M, A y P. Ellos inventaron un sistema para denominar esas tareas a través de combinaciones de las tres teclas. Las combinaciones elegidas para cada una de las tareas fueron: MAP, MP, PM, AMP, MAA, PPMMA, MAPP, A, PMM, MAPA. A este sistema lo denominaron “idioma de máquina JM”. ¿Piensas que es posible con sólo estas tres teclas (M, A y P) crear un “idioma de máquina” con el cual siempre se podría dar una denominación a una tarea no prevista anteriormente?
P13.b): La cantidad de granos de arena que hay en este momento en las playas de Bariloche, ¿Es infinita?
[63] El detalle de la aplicación de los métodos, o una mayor profundización de la técnica de los mismos se puede encontrar en: Lebart, Morineau y Fénelon (1979) o en Crivisqui, (1993) o Baccalá y Montoro (2008).

4. Resultados[64]

4.1. Resultados del AFCM:

Habiendo partido de los sujetos sin clasificar, el AFCM nos brindó sugerencias respecto de grupos de estudiantes que compartían las ideas respecto de los aspectos indagados en el cuestionario, como así también de posibles relaciones de esos grupos de estudiantes que responden en forma similar el cuestionario y sus características de edad, género o colegio al que asisten.
El AFCM nos permitió identificar cuatro grupos:
Un primer grupo de respuestas está caracterizado por las respuestas correctas a todas las preguntas, principalmente las ideas presentes son:

- *Es posible obtener infinito a partir de finitos elementos:* A partir de la combinación de una cantidad finita (3, 28 ó 15.000.000) de elementos que se pueden repetir, obtengo una colección infinita.
- *Infinito diferenciado de "todo".* Un elemento del referencial no necesariamente debe estar en infinito.
- *Muy grande distinto de infinito*.

La asociación entre modalidades de variables de respuesta y de caracterización presentes en este grupo nos está señalando una fuerte vinculación entre la aceptación de las colecciones infinitas y su diferenciación con colecciones de muchísimos elementos, (como la de los granos de arena o la de las hojas de los árboles) y los estudiantes mayores o del CEM 2 y la escuela técnica.
Otro grupo de respuestas se caracteriza por la *duda* o inseguridad en los distintos tópicos indagados.
Un tercer grupo de respuestas representa la *imposibilidad de obtener infinito*, dado que tanto si contamos con pocos o muchos elementos que se repiten o no, lo que se obtiene es mucho, no infinito.
Los estudiantes menores y del CEM46, se encuentran mayoritariamente repartidos entre el segundo y tercer grupo.
El último grupo de respuestas corresponde a la *no respuesta* a las últimas preguntas del cuestionario y ninguna caracterización de estudiantes está asociada a este grupo de respuestas.

4.2. Resultados de la Clasificación:

Analizando el histograma de índices de nivel[65] correspondiente a la clasificación jerárquica, consideramos conveniente realizar la partición en 3 ó 5 clases. La clasificación en tres clases discrimina entre respuestas correctas, no respuestas y respuestas incorrectas.
Dado que nos interesa, más que observar si los estudiantes responden bien o mal, prestar atención a qué responden, cuáles son las respuestas que expresan ideas alternativas y cuáles son las asociaciones entre estas respuestas, hemos decidido

[64] Por razones de extensión de la ponencia se omitirán los detalles del análisis realizado para obtener estos resultados, en cuanto a factores tenidos en cuenta, modalidades contributivas a estos factores, modalidades bien representadas en los distintos planos, etc.
[65] Este índice es una medida de la distancia entre sujetos o grupos de sujetos que se fusionan en la iteración correspondiente

considerar para nuestro análisis la clasificación en 5 clases. El gráfico 1 muestra la distribución de las clases.

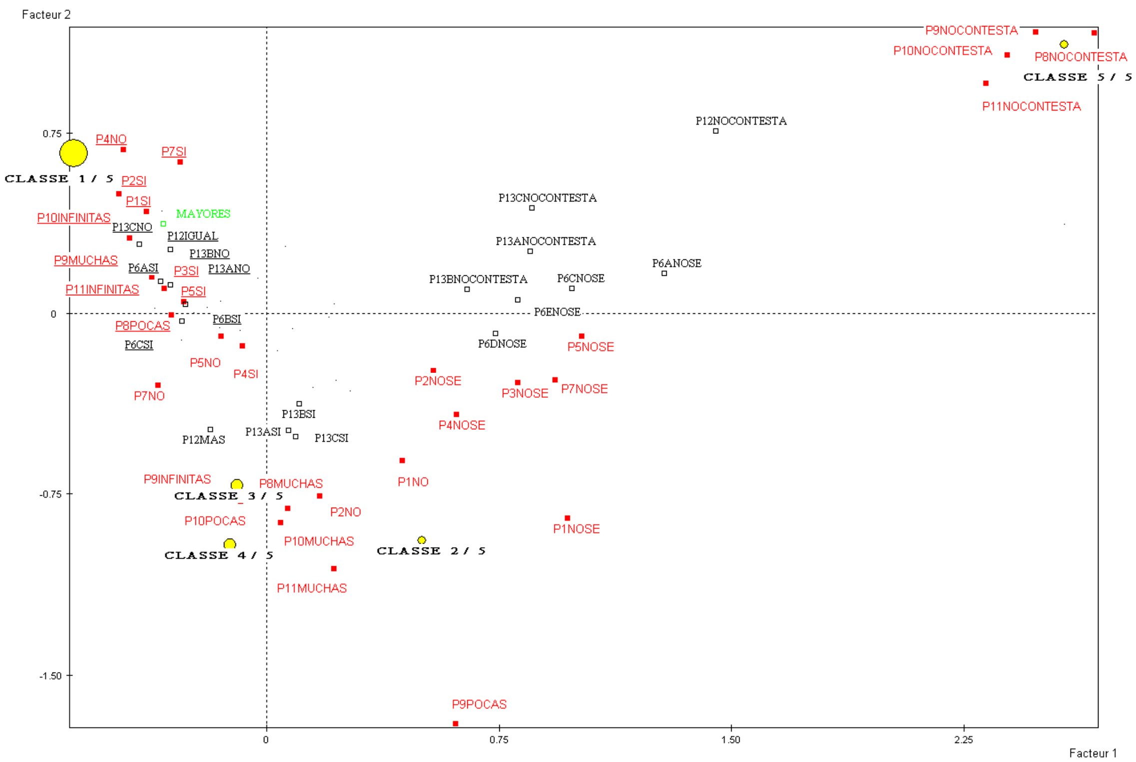

Grafico 1: Proyección de las cinco clases en el primer plano factorial. Señalamos en rojo, las modalidades de variables de respuesta activas, en negro, las modalidades de respuesta ilustrativas, se encuentran subrayadas las respuestas correctas. Indicamos en verde las modalidades de variables de caracterización que corresponden a edad, colegio y género.

Esta partición en 5 clases produce una diferenciación al interior del tercer grupo (*imposibilidad de obtener infinito)* descripto en el AFCM, en las clases 3 y 4 de esta clasificación, permitiéndonos un análisis más fino de las ideas alternativas y sus asociaciones, como así también de las asociaciones de estas ideas con quiénes son los estudiantes que las manifiestan.

Clase 1: Constituida por el 44% de los estudiantes y caracterizada por contener principalmente estudiantes mayores y que no concurren a uno de los colegios públicos (CEM 46). La característica distintiva de esta clase es que aglutina todas las respuestas correctas del cuestionario. Esta clase se corresponde con el grupo 1 del AFCM.

Las modalidades asociadas representan la aceptación de que *con pocos o muchos elementos que se repiten es posible obtener infinitos*. A esta clase se asocia la modalidad que representa la idea que un conjunto puede tener muchísimos elementos, como el conjunto de las hojas de los árboles, o de los granos de arena, pero no es infinito y que en infinito no necesariamente está todo.

Clase 2: Se encuentran en esta clase cerca del 12 % de los estudiantes. Se caracteriza por no incluir estudiantes mayores, tiene asociada la *duda e inseguridad en la respuesta,* ya que se corresponde a respuestas "*no sé*".

Ninguna modalidad de caracterización se encuentra asociada a esta clase. Esta clase coincide con el segundo grupo de respuestas obtenido en el AFCM; esta clase agrega la información de que son muy pocos los estudiantes mayores que presentan duda.
Clase 3: En esta clase se encuentran el 16% de los estudiantes y está caracterizada por las respuestas que expresan las ideas: *combinando pocos elementos se obtienen muchos (pero no infinitos)* y *combinando muchos elementos se obtienen infinitos*
Es decir, solo contando con muchos (muchísimos: 15.000.000) elementos para combinar es posible obtener infinitos. Esto da cuenta de una posible asociación de infinito con mucho.
No encontramos modalidades de caracterización presentes en esta clase.
Clase 4: Esta clase incluye el 18% de los estudiantes. Las modalidades presentes representan las ideas: *combinando pocos elementos obtengo pocos elementos* y *combinando muchos elementos obtengo muchos.* Es decir, en ningún caso es posible obtener infinitos.
También encontramos la modalidad que representa la idea de que si retiro una cantidad finita de elementos de un conjunto infinito, el conjunto ya no es infinito.
No encontramos variables de caracterización asociadas a este grupo.
Clase 5: En esta clase se encuentra el 10% de los estudiantes, está caracterizada por las *no- respuestas*, fundamentalmente a las últimas preguntas, sin estar asociada a ninguna modalidad de caracterización, observando las modalidades subrepresentadas, podemos decir que los estudiantes presentes en esta clase se caracterizan por no ser del colegio LOS ANDES.

5. Conclusiones

Con los dos métodos utilizados encontramos que los tipos de respuestas correctas están fuertemente asociadas entre sí, por lo que podemos decir que una concepción adecuada de estos temas es consistente, en cambio las ideas alternativas se encuentran muy diferenciadas; similar al resultado encontrado en nuestro estudio previo con estudiantes universitarios.
Los estudiantes que responden correctamente lo hacen prácticamente en todas sus respuestas, estos estudiantes no solo pueden determinar si una colección es infinita o no, sino que además, diferencian infinito de algo *muy numeroso* y de *todo* (en el sentido de poseer todos los elementos posibles). Los estudiantes que dan éstas respuestas son, en su mayoría, los estudiantes ente 17 y 19 años. Es de resaltar que un alto porcentaje de estudiantes dan estas respuestas, porcentaje similar al encontrado por Montoro (2005) en estudiantes universitarios y que coincide también con los resultados obtenidos por Fischbein y col. (1979) en estudiantes de edades similares a las nuestras.
Si bien la mayoría de las respuestas representan ideas concordantes con el estatus matemático del infinito, nos parece importante prestar atención a la presencia de las ideas alternativas, pues están representando la gran diversidad que podemos encontrar en el aula.
En cuanto a las concepciones alternativas, podemos ver que algunos estudiantes frente a la presencia de muchísimos elementos los interpretan como infinitos; cuando partimos de pocos elementos (se permita repetir o no) no se acepta la posibilidad de obtener infinitos. Esto último coincide con las *concepciones subyacentes* sobre el infinito encontradas por Monaghan, J.(2001), en cuanto a que los jóvenes asocian infinito a un número muy grande.

Es notable un grupo de estudiantes que consideran como imposible obtener infinito, es decir que no aceptan las colecciones infinitas, diferenciados de los que dudan ya que sus respuestas afirman esta imposibilidad.
Observamos las justificaciones que dan los estudiantes de las clases 2 y 5, esto nos permite explicar que la diferenciación entre ellas está dada porque los estudiantes de la clase 2 responden "no sé" pero justifican su respuesta, en muchos casos, expresando "tengo dudas" o "nunca lo había pensado", en cambio los estudiantes de la clase 5, que no responden tampoco dan una justificación. Parece que los primeros se problematizan con la situación mientras que los segundos no colaboran con la tarea.
Por ultimo queremos destacar que las concepciones adecuadas matemáticamente, se dan principalmente en los estudiantes de los colegios para los cuales la enseñanza de la matemática ocupa un lugar importante, al respecto, podemos establecer una analogía con los resultados que obtuvimos anteriormente con universitarios, donde la formación matemática se veía como central para una conceptualización adecuada del infinito.
Por último, queremos señalar que todo esto fortalece la postura de varios investigadores, respecto de que la noción de infinito matemático no es una noción intuitiva y que requiere de contextos educativos que favorezcan la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza específicas.

6. Referencias:

Artigue, M., (1995). La enseñanza de los principios de cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Ingeniería. *Didáctica en Educación Matemática.* Artigue, Douady, Moreno, Gómez (Eds). Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá. 97-140.
Benzécri, J. (1973). *L'Analyse des Dones*. París: Dunod.
Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Comceptions et Obstacles.* Thése de Doctorat, Grenoble.
Fischbein, E.; Tirosh, D.; Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics* (10) 3-40.
Juan, M. T. y Montoro, V. (2009) Concepciones de estudiantes de nivel medio sobre aspectos básicos de la noción de infinito en un contexto de conteo. *Revista de Educación Matemática.* Vol 24 – digital 24-1 [On CD-ROM]. FAMAF – UNC.
Lebart, L., Morineau, A. & Fénelon, J. (1979). *Traitement de Donnés Statistiques.* París: Dunod.
Monaghan, J. (2001) Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics.* 48 (2-3).
Montoro, V. (2005) Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y Aprendizaje*, 28 (4).
Montoro, V. y M. de Torres Curth. (1999). *Reflexiones sobre las dificultades que conlleva la noción de infinito en el aprendizaje de la matemática".* EPSILON N^0 45 Vol 15(3). Pp 357-364. España.
Moreno A., L. y Waldegg, G. (1995). Variación y representación: del número al continuo. *Revista de Educación Matemática. 7. (1).* 12-28. México.
Moreno A., L. y Waldegg, G. (1991). The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity, *Educational Studies in Mathematics. 22.* 211-231.
Tall, D. (2002) Natural and formal infinities, *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2 y 3), 129- 136.

Tirosh, D. (1991) The role of students´ intuitions of infinity in teaching the cantoriana theory. *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Acad. Press. D. Tall (Ed). Pp 199-214.

Vinner, S. (1991) Concept image and concept definition –desirable theory and practice*.* *Advanced Mathematical Thinking,* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 65-81.

Waldegg, G. (1993)**.** La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l`instruction. *Annales de Didactiques es de Sciences Cognitives 5.* 19-36. IREM de Strsdbourg.

Waldegg, G. (1996) Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa* 1, 107-122.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistic Association* (58) 236-24.