PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Nora Castro, Nora Ferreyra
Universidad Nacional de La Pampa - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
nora@exactas.unlpam.edu.ar; noraf@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen
A partir de las dificultades detectadas en el tratamiento de las funciones trigonométricas por parte de los ingresantes a la UNLPam, trabajamos en el diseño de una situación que brinde a los estudiantes la posibilidad de construir un nuevo conocimiento a través de la interacción no sólo con el contenido a discutir sino también con el grupo de individuos que comparten el aula.
Presentamos en este trabajo, una propuesta metodológica, basada en la Teoría de Situaciones Didácticas, en la cual, a partir de la resolución de un problema se promueve la discusión y búsqueda de validaciones. En la etapa final se propone el uso de un software que facilite la comprensión y la visualización global de la situación planteada.

Palabras clave: situación, enseñanza, funciones trigonométricas, software.

1. Introducción

Es tarea del docente organizar e implementar estrategias de enseñanza para fomentar en los estudiantes la adquisición del saber. Esta tarea implica compartir el conocimiento según las metas que se pretendan alcanzar utilizando diversas prácticas como por ejemplo, técnicas grupales de aprendizaje activo e implementación de software que permitan a los alumnos, provocando comportamientos de iniciativa y de compromiso, sortear obstáculos de saberes previos y de representaciones para poder avanzar en sus conocimientos.

A lo largo de distintos períodos como docentes, hemos detectado en el desempeño de estudiantes ingresantes a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales dificultades en el reconocimiento de situaciones que no responden a un modelo lineal, en particular, en el tratamiento de las funciones trigonométricas.

En el ámbito de la Educación Matemática, se reconoce la importancia de la resolución de problemas como estrategia en la construcción del sentido de una noción matemática y como herramienta para desarrollar procesos de argumentación, de modelización y de toma de decisiones

Por ello se propone un problema que brinde a los estudiantes la posibilidad de construir un nuevo conocimiento a través de la interacción no sólo con el contenido a discutir sino también con el grupo de individuos que comparten el aula. Con esta propuesta metodológica, se intenta equilibrar las explicaciones del docente con el trabajo de los alumnos, y el uso de un software que les facilite la comprensión de distintas temáticas y la visualización global de la situación problemática.

2. Marco Teórico

La teoría de Situaciones Didácticas constituye un instrumento que posibilita el estudio y comprensión de algunas relaciones y articulaciones que se dan en la enseñanza de la matemática. La noción de situación didáctica ha sido estudiada principalmente por Brousseau y se refiere a las interacciones que se producen en un ambiente de enseñanza entre los individuos involucrados y un entorno particular organizado para la

construcción de un determinado conocimiento. En este modelo, el profesor debe proponer a sus alumnos situaciones matemáticas que puedan vivenciar, que propicien la aparición de nuevos problemas matemáticos y con los cuales sea posible que el conocimiento en cuestión aparezca como solución óptima.
En este marco, se propone analizar las posibilidades del entorno propuesto para la enseñanza de las funciones trigonométricas, la ocasión de sanción que brinda la situación al estudiante y las probables consecuencias de las elecciones hechas por el docente en el diseño de la misma.

3. Propuesta

<u>Conocimientos previos</u>

- ángulos y sistemas de medición
- definición de funciones trigonométricas
- gráficos de las mismas
- conocimientos básicos de un software matemático

<u>Problema</u>

1. Se presenta un cuadrado articulado en los cuatro vértices, construido con cuatro tiras de cartón de igual longitud unidas mediante un broche, que se puede deformar en un rombo como se observa en la figura (Castelnuovo, 1963).

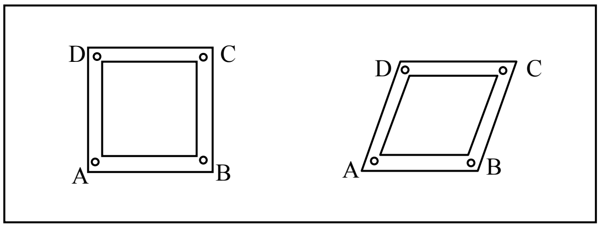

Figura 1: Cuadrado articulado

- Considerando 1 como medida del lado, se propone el análisis del área del cuadrilátero.
- Fijando el lado AB, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos C y D al articular los lados?

A continuación, se propone el estudio de la variación de ángulos y posiciones, a partir del movimiento continuo del brazo AD en torno al punto A.

- Si el punto D se mueve sobre la circunferencia de radio AD a una velocidad de 2rps, se pide indicar en cada instante
  - el ángulo que ha girado el punto.
  - la posición del punto (abscisa y ordenada)
  - la altura del paralelogramo

En un espacio de puesta en común se promueve la discusión referida a la comparación de las distintas funciones halladas, esperando que surjan no sólo la distinción de las variables sino también las semejanzas y la utilización de una expresión en la construcción de otra.

  - ¿Es igual la altura determinada en la primera parte del problema que en la segunda?
  - ¿Es posible compararlas?

Con el fin de visualizar la situación y como verificación de las distintas opiniones, se propone la utilización de un software adecuado, por ejemplo GeoGebra.
Para completar el trabajo realizado en grupos, se propone efectuar a continuación las siguientes actividades:

2. Sobre la misma circunferencia que en el caso anterior, analizar el movimiento si el punto D se mueve a 1/8 r.p.s.
   - Obtener una nueva función $g(t)$ para la altura del paralelogramo.
   - Comparar $g(t)$ con $f(t)$ y $h(t)$, considerando $h(t)$ la altura analizada en el movimiento anterior y $f(t)$ la función $\operatorname{sen}(t)$

3. Realizar el mismo análisis si el lado del cuadrado articulado mide:
   a) 3cm
   b) 1/3 cm
      - Comparar todas las funciones obtenidas
   - Sacar conclusiones

Análisis a priori:
La primera conclusión que se pretende lograr es que el área puede cambiar aún cuando el perímetro permanece constante, observación ésta que, si bien se supone ya ha sido trabajada, siempre brinda la posibilidad de una discusión muy rica.
El estudio de la variación del área se vincula con la variación de la altura del paralelogramo. Se supone que con este trabajo se facilita la discusión acerca del ángulo como variable y la definición de la función seno para ángulos entre 0º y 180º, para identificar la altura.
Por otro lado, el lugar geométrico permite disponer de una circunferencia para instalar una exploración referida al movimiento de un punto sobre ella.
En el análisis del movimiento del punto D, la discusión se centra en el número de vueltas, el correspondiente ángulo de giro y la notación adecuada para el mismo.
Un posible inconveniente con el que pueden enfrentarse los estudiantes es la interpretación del enunciado "en cada instante" como una referencia al tiempo transcurrido. Se supone que comenzarán con una regla de tres simple y expresando el ángulo en el sistema sexagesimal. Mediante preguntas y ejemplos se logrará una aproximación a la idea y la elaboración de una tabla de la forma:

Tiempo (seg)	1/2	1	2	…		t
ángulo	2π	4π	8π			4π t

Tener que expresar la posición de un punto algebraicamente es un desafío que los estudiantes deben superar, para ello será necesaria la intervención del docente indicándoles o bien orientándolos para la construcción del conocimiento
La discusión acerca de la posición implica la definición de un sistema de coordenadas. En este contexto, pueden surgir diferentes opciones, que deberán ser evaluadas para escoger la más adecuada. Pensamos que se considerará apropiado ubicar el origen del sistema en el centro de la circunferencia pero, en caso de presentarse otras propuestas deberán ser tenidas en cuenta y descartadas por los propios estudiantes, después de observar la complejidad de las respuestas obtenidas.

Se supone que surgirá inmediatamente $x = \cos(\alpha)$, $y = \text{sen}(\alpha)$ y que requerirá, en algunos casos, de una intervención docente para interpretar la relación entre posición y tiempo.
La falta de conocimientos anteriores, como la composición de funciones no les permitirá obtener la formula $g(t) = \text{sen}\,(4\pi t)$, (compuesta entre $f(t) = 4\pi t$ obtenida en la tabla e $y = \text{sen}\alpha$ que representa la altura). El paso de esta falta de conocimiento a la construcción de uno nuevo no es espontáneo, en este proceso de reconstrucción el alumno debe recordar y tratar de comunicar a sus compañeros algunos de los saberes adquiridos o sea, pasar por una etapa de formulación, para luego poder llegar a la etapa de validación.
La comparación entre la altura y la posición del punto, supone una articulación entre saberes previos, simultáneos y posteriores. Es aquí donde verán la conveniencia de expresar el ángulo en radianes para luego realizar los gráficos adecuados.

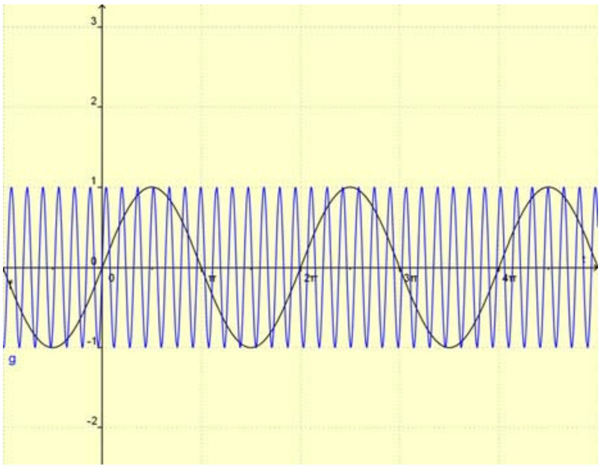

Gráfico 1: Comparación entre las funciones
h(t) = sen t y g(t) = sen 4πt

Hasta aquí se necesitará en gran parte de la intervención del docente en el desarrollo de las actividades. En el resto de la propuesta, dada la similitud con lo anterior, se intentará fortalecer la autonomía de los alumnos en la búsqueda de información en una interacción social entre estudiantes y con el software como facilitador visual en la toma de decisiones.
En la segunda consigna directamente comenzarán realizando la tabla

Tiempo (seg)	1/2	1	2	…		t
ángulo	π /8	π /4	π /2			π/4 t

y luego intentarán realizar una composición de funciones para obtener $w(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\text{t}\right)$

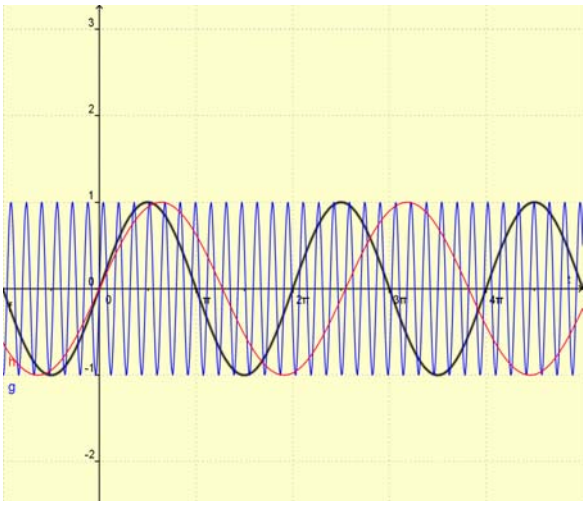

Gráfico 2: Comparación entre las funciones
h(t) = sen t , g(t) = sen 4πt y w(t)= sen π/4 t

El docente deberá intervenir orientando a los estudiantes, proporcionarles información para que estos reflexionen en conjunto o con el docente sobre el proceso de resolución más conveniente para llegar a las conclusiones pedidas. En la resolución de esta situación problemática el docente no cumplirá un rol fijo, sino que es un trabajo compartido, supervisará el aprendizaje e intervendrá para mejorar el desempeño interpersonal, organizar el material y evaluar el aprendizaje.
Para el caso 3)
En esta consigna se supone que los alumnos trabajarán juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás.

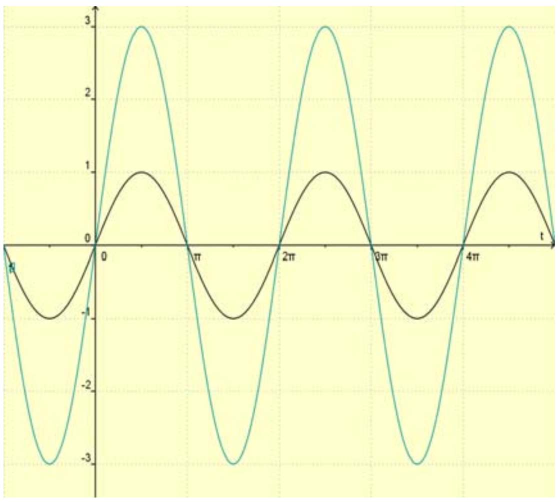

Gráfico 3: Comparación entre las funciones
h(t) = sen t , m(t) = 3sen t

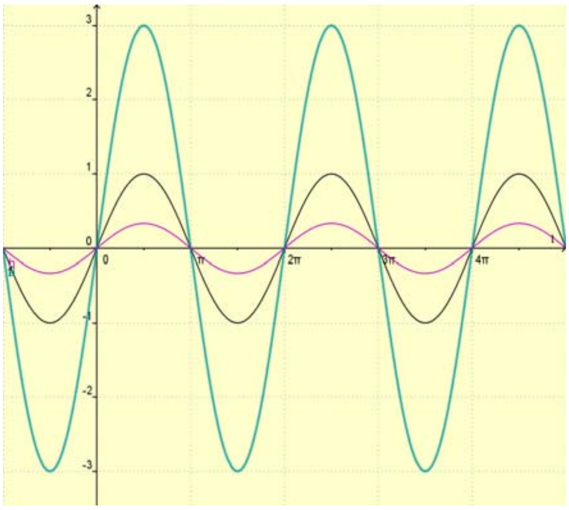

Gráfico 4: Comparación entre las funciones
h(t) = sen t , m(t) = 3sen t ; m(t) = 1/3sen t

Creemos que la consigna abierta referida a "sacar conclusiones" abrirá la posibilidad de exponer las más variadas proposiciones. En este momento, el docente aprovechará para institucionalizar la validez o no de las mismas en una construcción colectiva.

4. Consideraciones Finales

Se supone que al presentarse un problema cuya resolución no responde a un procedimiento rutinario ya analizado, se promueve no sólo la exploración personal sino también brinda al estudiante la posibilidad de discutir y buscar validaciones para defender sus conjeturas.

Consideramos que la evolución desde una situación concreta como la inicial hasta las conclusiones basadas en la visualización a través de un software, no sólo será útil en el desarrollo de esta propuesta sino que puede constituirse, para los estudiantes, en un modelo de acción para explorar cualquier otra situación en la búsqueda de nuevos conocimientos.

5. Referencias bibliográficas

- Berté, A. (1999). *Matemática Dinámica*. Buenos Aires: A-Z Editora.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Castelnuovo, E. (1963). *Geometría Intuitiva*. Buenos Aires: Labor.