ANÁLISIS DE ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Angélica R. Arnulfo; Cintia G. Cianciardo; José A. Semitiel
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura – Universidad Nacional de Rosario
semitiel@fceia.unr.edu.ar

Resumen
El siguiente trabajo de investigación se centra en el análisis de errores cometidos por alumnos de un curso de Análisis Matemático III del Ciclo Básico de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), en la resolución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con condición inicial (problema de valor inicial, PVI). Está enmarcado en el proyecto 1ING299 "*El aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales como herramientas de modelización en la Matemática básica para las carreras de Ingeniería*" dirigido por la Lic. Martha Fascella de la FCEIA – UNR.

Palabras clave: problema de valor inicial – errores – análisis de errores.

1. Introducción
En nuestro proyecto de investigación 1ING299 "*El aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales como herramientas de modelización en la Matemática básica para las carreras de Ingeniería*" dirigido por la Lic. Martha Fascella de la FCEIA – UNR, nos dedicamos básicamente al estudio de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales mediante la modelización de problemas. Sin embargo a través de diferentes investigaciones que hemos realizado al respecto, observamos algunos errores frecuentes que cometen nuestros alumnos en la resolución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales, más precisamente en la resolución de problemas de valor inicial.
Esto dio origen a la presente investigación donde observamos que nuestros alumnos habitualmente aplican en forma mecánica un teorema, es decir, hacen caso omiso a las hipótesis que el mismo requiere y usan directamente su tesis. También hemos detectado que no realizan un análisis retrospectivo de la solución obtenida.
La investigación resultó de una experiencia llevada a cabo con alumnos de Análisis Matemático III, correspondiente a las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario. Dicha asignatura, está ubicada en el primer semestre del segundo año y sus contenidos básicos son: ecuaciones diferenciales ordinarias, cálculo vectorial, sucesiones, series numéricas y series de potencia. Durante el cursado se rinden dos evaluaciones parciales donde la primera corresponde al tema de ecuaciones diferenciales ordinarias, mientras que la segunda evaluación parcial corresponde al cálculo vectorial. En un tercer parcial, al final del cuatrimestre, se evalúan el resto de los contenidos.
A partir de un problema propuesto en el primer examen parcial de la asignatura correspondiente a ecuaciones diferenciales ordinarias, observamos que la resolución de un PVI se hace de manera automática. Obtienen la solución general de la ecuación diferencial que el mismo contenga y seguidamente aplican la condición inicial.

Esta automatización generó soluciones erróneas debido a que no tuvieron en cuenta las condiciones necesarias impuestas por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de un problema con valor inicial del tipo:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

El objetivo de este trabajo es describir estos errores y reflexionar sobre algunas de las posibles causas que conducen a ellos.

2. Marco Teórico

El estudio de los errores en el aprendizaje de la Matemática ha sido una cuestión de permanente interés en el ámbito de la Educación y Didáctica de la Matemática, que tiene una larga historia y se ha caracterizado por aproximaciones e intereses muy diferentes. La preocupación por el conocimiento erróneo y la investigación sobre los errores cometidos por alumnos, ha ocupado y ha sido motivo de interés de muchos especialistas, entre los que podemos destacar a Popper, Bachellard, Russell, Radatz, Brousseau, Davis, Werner, Movshovitz-Hadar, Zaslavsksy e Inbar, entre otros.

Es sabido que los errores forman una parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje de la Matemática y a su vez son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia. Los errores que cometen nuestros alumnos deben ser considerados como el resultado de procesos muy complejos en los que intervienen varias variables del proceso educativo.

Respecto al análisis, causas y clasificación de errores, diferentes especialistas han trabajado al respecto. Una investigación sobre errores cometidos por alumnos de secundaria en Matemática que quisiéramos destacar es la de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar, que hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizada por expertos. La categorización de los errores de estos autores está fundamentada más en el conocimiento matemático que en el procesamiento de la información.

De acuerdo a la metodología propuesta determinan seis categorías descriptas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

1. *Datos mal utilizados:* errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno.
2. *Interpretación incorrecta del lenguaje:* errores debidos a una incorrecta traducción de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
3. *Inferencias no válidas lógicamente:* errores que se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico.
4. *Teoremas o definiciones deformados:* errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable. Tenemos en este caso la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias, realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocibles, entre otras.
5. *Falta de verificación en la solución:* errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.
6. *Errores técnicos:* errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

En Matemática, son muchos los contenidos en los cuales los estudiantes cometen errores. Uno de ellos es el de la aplicación del resultado de un teorema sin previa verificación de las hipótesis del mismo, es decir los errores que se derivan de aplicar una fórmula o resultado que no se puede utilizar debido a que no se verifican las condiciones del teorema. Este tipo de hábitos, en nuestros estudiantes, lleva consigo una interesante reflexión acerca del tipo de Matemática que queremos enseñar.
Nuestra línea de investigación básicamente apunta a diseñar estrategias para que la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en carreras de Ingeniería tenga un perfil más interdisciplinario, con mayor presencia de las aplicaciones físicas o ingenieriles y mediante la modelización de problemas. Sin embargo, no podemos dejar de lado que su enseñanza debe encararse con la finalidad de suministrar al futuro ingeniero un instrumento de elevado nivel, riguroso y apto para la obtención de resultados concretos, y es por esto que además, se debe transmitir el rigor y la sutileza de las definiciones y teoremas de la Matemática.
Adherimos a la enseñanza basada a través de la resolución de problemas, debido a que constituye el eje fundamental de cualquier proceso de enseñanza – aprendizaje en donde se encuentre involucrada la Matemática o en su defecto cualquier ciencia que dependa directa o indirectamente de la misma. Al respecto, G. Polya (1945) formuló cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema, que constituyen el punto de partida de todos los estudios posteriores:

1. *Familiarizarse con el problema / Trabajar para una mejor comprensión:* Se refiere en este punto al análisis de la incógnita, de los datos y de la o las condiciones del problema.
2. *Buscar una idea útil*: Aquí es fundamental la orientación del profesor, quien estimula al alumno en su búsqueda, con sugerencias tales como: busque un problema análogo al propuesto y trate de resolverlo, considere solo una parte de la condición y analice como queda determinada la incógnita, piense en los datos y trate de encontrar otros, si es posible, que le permitan hallar la incógnita, etc.
3. *Ejecutar un plan*: Se trata de comprobar cada uno de los pasos y de demostrar que cada paso es correcto.
4. *Visión retrospectiva*: Corresponde a la etapa de verificación del resultado y también a las aplicaciones a nuevas situaciones.

La resolución de problemas tiene una doble función, pues tanto el docente como el alumno aprenden del error cometido. Al respecto, G. Brousseau, señala que tanto en las actuaciones del docente como en las del alumno, el error es constitutivo del conocimiento adquirido. También sostiene respecto a los errores que "*los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida que han extraído de un prototipo o libro de texto, y la usan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva. Tienden así un 'puente' para cubrir el vacío entre reglas conocidas y problemas no familiares*".

3. Desarrollo

Este trabajo es el resultado del análisis de una experiencia efectuada en el primer examen parcial de Análisis Matemático III correspondiente al año académico 2011, con el objetivo de evaluar la comprensión del teorema de existencia y unicidad de soluciones de problemas de valor inicial del tipo:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

En la misma hemos detectado que la resolución de la ecuación diferencial dada en el PVI se efectuó de manera automática y seguidamente se aplicó la condición inicial. Sin embargo, esta automatización llevó a una situación equivocada debido a que no verificaron las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de soluciones, el cual establece que:

Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Si la función real f *es continua en algún entorno* E *del plano que contenga al punto* (x_0, y_0) *entonces el PVI dado, tiene al menos una solución en algún intervalo abierto* J *que contenga al punto* x_0.

Si además, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ *es continua en* E *entonces la solución del PVI dado es única en algún intervalo abierto* $J_0 \subset J$ *que contenga al punto* x_0.

Además observamos en dicha experiencia que los alumnos no verificaron si la función que obtuvieron era o no solución del PVI.

Suponemos que estos errores son debidos a la no interpretación del teorema que asegura la existencia de solución como también a la falta de visión retrospectiva correspondiente a la etapa de verificación del resultado.

3.1 El problema evaluado

Uno de los ejercicios propuestos en la evaluación, y motivador del presenta trabajo, fue el siguiente:

Resolver, si es posible, el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \left(x^2-1\right)dx + \left(y^3-8\right)dy = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

En la resolución de la ecuación diferencial del problema de valor incial dado, el 75% de los alumnos evaluados notó que:

$$\left(x^2-1\right)dx + \left(y^3-8\right)dy = 0 \qquad (1)$$

es una ecuación diferencial exacta, por lo que la solución general de (1) viene dada implícitamente por la ecuación:

$$\frac{x^3}{3} - x + \frac{y^4}{4} - 8y = c,\ c \in \mathbf{R}$$

El 20% de los alumnos reescribió la ecuación (1) de la forma

$$\left(y^3-8\right)dy = -\left(x^2-1\right)dx$$

notando que es una ecuación diferencial a variables separables, cuya solución general está dada implícitamente por la ecuación:

$$\frac{y^4}{4} - 8y = -\frac{x^3}{3} + x + c,\ c \in \mathbf{R}$$

Sólo el 5% restante de alumnos que asistieron a la evaluación, no pudo resolver la ecuación diferencial, como así tampoco el problema.

De los alumnos que resolvieron correctamente la ecuación diferencial (1) mediante los métodos mencionados, todos aplicaron la condición inicial

$$y(1)=2 \tag{2}$$

obteniendo el valor de la constante $c=-\frac{38}{3}$ y llegando a la solución errónea:

$$\frac{x^3}{3}-x+\frac{y^4}{4}-8y=-\frac{38}{3} \quad \text{ó} \quad \frac{y^4}{4}-8y=-\frac{x^3}{3}+x-\frac{38}{3} \tag{3}$$

3.2 Análisis de los errores en la resolución del PVI

De las categorías de errores descriptas en el marco teórico por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar, creemos que las que se ajustan a nuestra investigación son las que se refieren a: teoremas o definiciones deformados (aplicación indiscriminada de un teorema) y falta de verificación en la solución.

Con referencia a los errores cometidos en la categoría: teoremas o definiciones deformados, observemos que reescribiendo la ecuación (1) de la forma:

$$y'=-\frac{x^2-1}{y^3-8}$$

la función dada por $f\left(x,y\right)=-\frac{x^2-1}{y^3-8}$ no es continua en los puntos de la forma $\left(x,2\right)$ para cualquier $x\in\mathbf{R}$. En particular, f no es continua en el punto de coordenadas $\left(1,2\right)$ y por lo tanto no hay ningún entorno que contenga a dicho punto en el que la función resulte continua. Luego, no se satisface la hipótesis del teorema de existencia antes mencionado y el teorema no es aplicable al PVI dado, por lo que no se puede asegurar si el mismo tiene o no solución en algún intervalo abierto J que contenga al punto $x_0=1$.

Unido este hecho a la falta de verificación en la solución, que es la otra categoría en la que hemos encuadrado los errores cometidos, las respuestas dadas por los alumnos en (3) terminan siendo incorrectas pues no verifican la ecuación diferencial (1) del problema de valor inicial dado.

Entre las posibles causas por las cuales los alumnos han cometido los errores antes descriptos, pensamos que pueden ser atribuidos a:

- El alumno omite, "se olvida", que si va a utilizar un cierto teorema, primeramente tendrá que verificar que se satisfacen todas las hipótesis del mismo para luego concluir la tesis. Este es un error frecuente en estudiantes de carreras donde la Matemática es una herramienta y en particular en alumnos de Ingeniería donde hemos desarrollado la presente investigación.
- El alumno resuelve un PVI de forma mecánica y automática: obtienen la solución general de la ecuación diferencial que el mismo contenga y seguidamente aplican la condición inicial.
- En general los ejercicios y problemas propuestos en clase verifican las hipótesis del teorema de existencia de soluciones, ya sea porque en el libro de texto utilizado se presentan situaciones ideales, como también los profesores, "amparados" en la falta de tiempo y debido a considerar que las posibilidades de que se les presente un caso que falle son escasas, aplicamos resultados sin comprobar previamente las condiciones requeridas.

4. Conclusiones

Del análisis efectuado acerca de los errores cometidos por alumnos de Análisis Matemático III en la resolución de un problema de valor inicial, se sigue que los estudiantes mecanizan los conceptos y teoremas pues les parecen correctos debido a que les han funcionado en un determinado campo de validez, pero no es cierto que siempre funcionen como ya hemos visto en el problema evaluado. Además, predomina la atención en la secuenciación y encadenamiento de los "pasos" por sobre el significado de los mismos y los efectos que las alteraciones en los datos producen en los resultados.
Aunque para nosotros el estudio de errores no es el tema central en nuestra línea de investigación en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en carreras de Ingeniería, pensamos continuar desarrollando investigaciones en estos aspectos, pues el análisis de los errores cometidos por parte de los alumnos, puede contribuir a mejorar las propuestas de enseñanza de las ecuaciones diferenciales como también mejorar la interrelación entre teoría y práctica.
Creemos que lo importante es considerar el error como una fuente de aprendizaje significativo para lograr nuevos conocimientos y que surjan nuevas ideas. Es importante que tanto el docente como el alumno, consideren el error como una herramienta para el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido los errores pueden constituir un elemento importante en el progreso del conocimiento, pues el alumno se puede interesar en descubrir dónde está el error y así pueden formular preguntas, comparar resultados, procedimientos, hasta lograr identificar sus propios errores a través de sus experiencias y de su interrelación con los contenidos matemáticos.
Para finalizar el presente trabajo, creemos que es importante corregir y reflexionar de tal manera que el error sea una fue de aprendizaje significativo en el aprendizaje de un contenido matemático.

5. Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologies et les problemes en Mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), pp. 165-198.
Edwards, C. y Penney, D. (1994). *Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera 3° edición*. México: Pearson Educación.
Mancera, E. (1998). *Errar es un placer: el uso de los errores para el desarrollo del pensamiento matemático*. México: Iberoamérica.
Martínez de la Rosa, F. (2006). ¿Teoremas o fórmulas?, *Suma*, 51, pp. 31-39.
Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., Inbar, S. (1987). A veces los errores de los estudiantes se deben a nuestros propios fallos, *Mathematics Teacher*, 80, pp. 191-194.
Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High Schools Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), pp. 3-14.
Palarea, M. y Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico, *Suma*, 16, pp. 91-98.
Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
Radatz, H. (1980). Error analysis in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), pp. 163-172.
Rico, L. (1992). *Investigación sobre errores de aprendizaje en Educación Matemática*. Granada: Universidad de Granada.

Stewart, J. (1999). *Cálculo Trascendentes Tempranas 3° edición*. México: International Thomson Editores.