CB-1.156

ANALIZANDO EL RECONOCIMIENTO DE GRAFOS A TRAVÉS DEL MODELO DE VAN HIELE

A. González – J.M. Gavilán-Izquierdo
gonzalezh@us.es – gavilan@us.es
Universidad de Sevilla, España

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB
Nivel educativo: 7 no específico
Palabras clave: Teoría de Grafos, Modelo de van Hiele

Resumen
En este trabajo, estudiamos la evolución del proceso de reconocimiento en el campo de la Teoría de Grafos desde la perspectiva del modelo de van Hiele. Así como Gutiérrez y Jaime (1998) plantean dos niveles para este proceso en el área de Geometría (primero visual, y después a través de propiedades), nosotros proponemos además un tercer nivel donde los estudiantes reconocen relaciones entre propiedades y las posibles traslaciones entre modos de representación de grafos. Además, otra diferencia importante con respecto al caso geométrico es que los estudiantes en el primer nivel pueden reconocer toda una serie de propiedades globales de los grafos, pues para figuras geométricas éstas son básicamente el número de vértices y de lados.

Introducción

La enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en los niveles universitarios es un área de interés de la investigación en Educación Matemática desde trabajos pioneros como el de Holton (2001) hasta la actualidad, que cuenta con congresos específicos como el INDRUM (First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics). Entre los temas que son emergentes está la Matemática Discreta, que se ocupa del estudio de estructuras basadas en conjuntos discretos (finitos o infinitos numerables), como por ejemplo, los números enteros, los grafos y los códigos, que son fundamentales en el desarrollo de disciplinas tales como las Ciencias de la Computación, entre otras.

Los grafos son habitualmente representados como puntos en el plano unidos por segmentos, lo cual nos permite un primer acercamiento a los mismos como figuras geométricas. Por ello, el modelo de van Hiele es un buen candidato para indagar en la comprensión del concepto de grafo. Otros autores han considerado también este modelo de van Hiele en campos

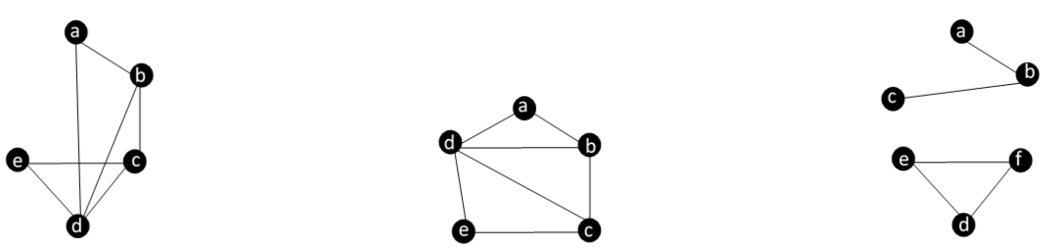
ISBN 978-84-945722-3-4

distintos de la Geometría; por ejemplo, Llorens (1994) lo extiende al concepto de aproximación local.

Gutiérrez y Jaime (1998) consideran en los niveles de razonamiento de van Hiele en Geometría cinco procesos de razonamiento: reconocimiento, formulación de definiciones, uso de definiciones, clasificación y demostración. En este trabajo, nos centramos en el proceso de reconocimiento de grafos, para lo cual haremos primeramente una breve introducción con los rudimentos básicos de la Teoría de Grafos, seguido de una caracterización general de los niveles de van Hiele para esta área, y finalmente describiremos la evolución del proceso de reconocimiento a lo largo de estos niveles.

Un poco de Teoría de Grafos

Un **grafo** G es un par (V,E) donde V es un conjunto (denominado conjunto de **vértices)** y E es un conjunto de pares no ordenados de vértices de V (llamado conjunto de **aristas**). Para representar un grafo podemos, por ejemplo, dibujar sus vértices como puntos en el plano y sus aristas como segmentos (no necesariamente rectilíneos) que van de un punto a otro (**representación pictórica)**. Una representación de este tipo para el grafo $G=(\{a,b,c,d,e\},\{ab,ad,bc,bd,cd,ce,de\})$ viene dada en la Figura 1(a), la no es única, como ilustra la Figura 1(b), donde el grafo G viene representado ahora sin cruces entre aristas. (En general, diremos que un grafo es **plano** si existe alguna representación pictórica del mismo sin cruces entre sus aristas.) Dos vértices $u,v \in V$ son **vecinos o adyacentes** si están unidos por una arista, es decir, si $uv \in E$; el **grado** de un vértice $u \in V$ es el número de vecinos que tiene u en G. (En el ejemplo de la Figura 1(a), el vértice a tiene grado 2, mientras que el vértice d tiene grado 4.) Decimos que G es **conexo** si todo par de vértices $u,v \in V$ está conectado por una secuencia de vértices interconectados por aristas. Por ejemplo, el grafo $H=(\{a,b,c,d,ef\},\{ab,bc,de,df,ef\})$ (ver Figura 1(c)) no es conexo ya que, por ejemplo, los vértices a y d no están interconectados.



(a) (b) (c)

ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 1.

Existen familias de grafos clásicas como son los **grafos completos**, que son aquellos tales que todos sus vértices están unidos por una arista; los **ciclos**, que son aquellos grafos conexos tales que todos sus vértices tienen grado 2; y los **caminos**, que son grafos conexos con todos sus vértices de grado 2, salvo dos de ellos, con grado 1. Las Figuras 2(a), 2(b) y 2(c) muestran el grafo completo de 5 vértices, el ciclo de 8 vértices y el camino de 6 vértices, respectivamente.

Un grafo *H=(V',E')* se dice **subgrafo** de otro grafo *G=(V,E)* si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Así, podemos presentar otra familia clásica de grafos como son los denominados **árboles**, que son grafos conexos tales que ninguno de sus subgrafos es un ciclo (ver un ejemplo en la Figura 2(d)). Claramente, la clase de los caminos está incluida en la de los árboles.

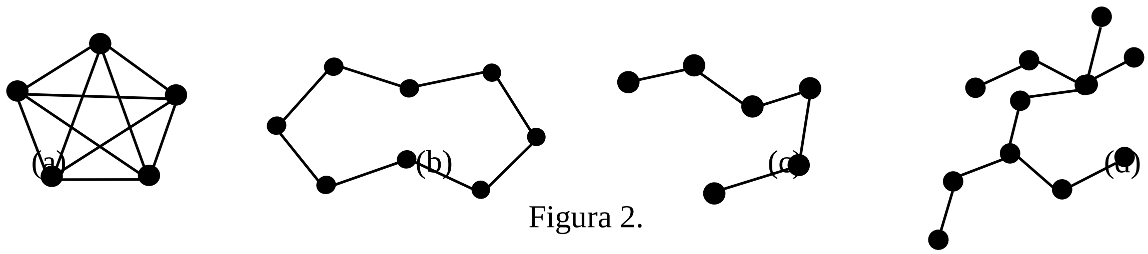


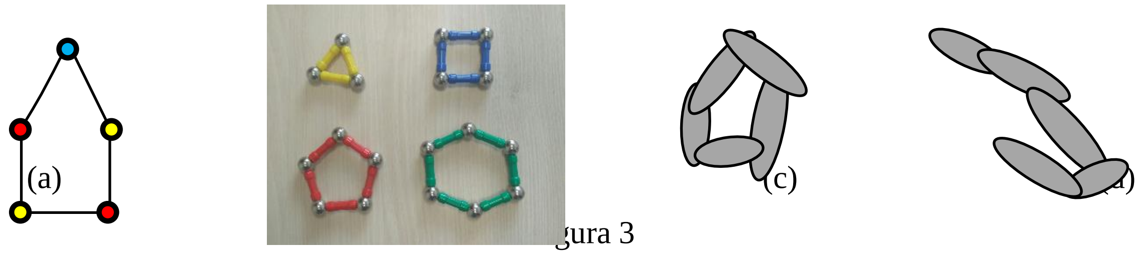
Figura 2.

Un problema muy estudiado de la Teoría de Grafos que tiene múltiples aplicaciones en otras áreas es el coloreado de vértices. Formalmente, **colorear** los vértices de un grafo *G* con *k* colores consiste en asignar un elemento de {1,2,…,k} (que llamamos conjunto de colores) a cada vértice de *G* de modo que dos vértices adyacentes no tengan el mismo color; el mínimo *k* tal que esto es posible se denomina **número cromático** de *G*. La Figura 3(a) muestra una coloración con 3 colores (que es el mínimo posible) del ciclo de 5 vértices.

Por otra parte, es preciso mencionar que existen diferentes modos de **representación de grafos** además de la representación pictórica, cuyos usos pueden convenir según el problema a considerar. Por ejemplo, en la Figura 3(b) se da una representación de los ciclos de 3, 4, 5 y 6 vértices mediante **materiales manipulativos**, de manera que las canicas de acero hacen el papel de los vértices y las barras imantadas representan a las aristas. Otro modo de representación interesante es mediante **intersección de objetos**, que consiste en representar los vértices de un grafo como objetos geométricos en el plano, de manera que las aristas del mismo vienen dadas por pares de objetos geométricos con intersección no vacía. Las Figuras

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

3(c) y 3(d) muestran dos representaciones de este tipo para el ciclo y el camino de 5 vértices, respectivamente.



gura 3

El modelo de van Hiele para la Teoría de Grafos

El **nivel 1** que proponemos, al igual que en Geometría, está basado en el reconocimiento visual, de manera que no hay aun conciencia de las partes que conforman los grafos (salvo vértices y aristas) ni existe la capacidad de pasar de un modo de representación a otro. Una diferencia importante con respecto al caso geométrico es que, como veremos a continuación, los estudiantes de este nivel pueden reconocer toda una serie de propiedades globales de los grafos, lo cual no ocurre con las figuras geométricas, que básicamente cuentan con el número de vértices y el número de lados como parámetros globales. Algo también característico de este nivel es que los estudiantes, además de formular definiciones con un lenguaje no matemático, pueden hacer uso de ciertas descripciones sencillas como la de coloración, pues esta no requiere del conocimiento de las partes del grafo salvo los vértices y sus adyacencias. En el **nivel 2,** los estudiantes perfeccionan su manera de razonar al reconocer los subgrafos de los grafos y sus propiedades locales, usando estas como herramientas para construir definiciones con un lenguaje más propio de la Matemática. Aunque de manera limitada, los alumnos de este nivel pueden realizar algunas traslaciones entre modos de representación de los grafos. Llegados al **nivel 3**, los alumnos reconocen, además de propiedades de los grafos, las relaciones que existen entre ellas, pues alcanzar este nivel supone un avance en el uso de la lógica matemática (aunque de manera aún informal), el cual les permite dominar completamente las traslaciones entre los distintos modos de representar un grafo. Como ocurría en el caso geométrico, los alumnos son capaces de formular definiciones de manera precisa, así como de hacer clasificaciones inclusivas de los diferentes tipos de grafos en base a propiedades. El **nivel 4** supone el máximo grado de habilidad de razonamiento sobre grafos, caracterizado por un uso de la lógica que les permite a los alumnos poder realizar demostraciones formales y comprender la equivalencia de definiciones.

ISBN 978-84-945722-3-4

El modelo que hemos planteamos para la Teoría de Grafos cumple los requisitos del modelo de van Hiele: secuencialidad fija, adyacencia, distinción, separación, especificidad del lenguaje, y consecución. Por cuestiones de espacio, no desarrollamos esta cuestión que requeriría una caracterización más extensa que la que hemos aportado arriba de cada uno de los niveles.

El reconocimiento en el nivel 1

Los estudiantes son capaces de **reconocer los grafos por el aspecto visual** en que se les han presentado, percibiéndolos como unidades, de manera que los únicos elementos que pueden reconocer son vértices y aristas, cuya apariencia suele ser significativamente distinta en cualquier modo de representación (pictórico, material concreto, intersección de objetos, etc...). En el caso de que los alumnos reconozcan distintos tipos de representación para grafos, estos **no tienen aún la capacidad para pasar de un modo a otro** debido a que el reconocimiento en este nivel es puramente visual, y dos modos de representación distintos pueden tener apariencias de lo más dispar.

Una vez adquirido completamente este nivel reconocerán cualquier representación (del tipo que hayan aprendido) para un mismo grafo, pero siempre en función del aspecto visual. Por ejemplo, si los alumnos están familiarizados con la representación pictórica, dada la representación de un grafo, se dan cuenta de que cualquier deformación continua de la misma (como figura geométrica) representa también al mismo grafo (ver Figuras 1(a) y 1(b)). Es preciso destacar que este fenómeno puede verse como generalización de lo que ocurre en Geometría plana, donde las deformaciones continuas que se pueden aplican a las figuras están restringidas exclusivamente al caso de movimientos.

Esta capacidad de reconocimiento hace que los estudiantes de nivel 1 **pueden identificar algunas familias** de grafos que son fácilmente reconocibles por su aspecto visual (caminos, ciclos, algunos grafos completos, etc…) con independencia de la representación dada. Sin embargo, en el caso de familias más complejas, como los árboles, los estudiantes reconocerán aquellos que se parezcan a las representaciones prototípicas que se les haya presentado, pues la diversidad de aspectos con la que cuenta esta clase de grafos hace que sean muchos los casos en que estos no puedan ser reconocidos como tal en este nivel. Ello es debido a que esta familia está definida en función de propiedades locales, las cuales no podrán reconocerse hasta el nivel 2.

ISBN 978-84-945722-3-4

Una diferencia importante entre el modelo de van Hiele para Geometría y el que proponemos aquí para la Teoría de Grafos, es que ya en el nivel 1 **pueden reconocerse parcialmente algunas propiedades globales de los grafos**. Nótese que las únicas propiedades globales de las figuras geométricas son básicamente el número de vértices y el número de lados, en contraste con el amplio abanico de propiedades globales que pueden identificarse visualmente en los grafos, como la conectividad o la planaridad. Efectivamente, los estudiantes pueden reconocer visualmente la conectividad de un grafo, pues probablemente estos la entiendan como ser (o no) "de una sola pieza"; y lo mismo ocurre con la planaridad, que puede ser percibida como la capacidad para "deformarse" hasta perder los cruces entre aristas. Sin embargo, este reconocimiento es solo parcial, pues posiblemente no sean capaces de reconocer estas propiedades en ejemplos con un número elevado de vértices y aristas, para lo cual requerirán del uso de propiedades locales de los grafos (nivel 2) o incluso relaciones entre las mismas (nivel 3).

El reconocimiento en el nivel 2

Los estudiantes **reconocen los subgrafos** de un grafo, y por tanto las **propiedades locales** del mismo que están basadas en este concepto, como por ejemplo el número de ciclos que pasan por cada vértice. Además, en este nivel **el reconocimiento visual de propiedades globales se perfecciona** a un reconocimiento más complejo, a través de propiedades locales del grafo (lo cual es novedoso con respecto al caso geométrico). Por ejemplo, en el caso de la conectividad, que en el nivel 1 se percibía con la idea de "ser de una sola pieza", ahora se ve además como la propiedad de que dos vértices cualesquiera estén conectados por algún subgrafo camino. Más aun, se **reconocen nuevas familias de grafos**, como por ejemplo los árboles, cuyo reconocimiento era solo parcial en el nivel 1.

Suponiendo que reconozcan distintas formas de representar grafos, como por ejemplo la pictórica y la intersección de objetos geométricos, su **capacidad de trasladarse de un modo a otro será solamente parcial.** Por ejemplo, pueden reconocer la representación del ciclo de cinco vértices como intersección de objetos (ver Figura 3(c)) trasladándola al modo pictórico, pero es posible que no entiendan que no todo grafo puede representarse de la primera forma (pues solo es posible para grafos planos), o sea que la relación entre un tipo de representación y otro no es bilateral. Ello es debido a que en este nivel, el manejo de la lógica proposicional es muy limitado, al igual que ocurre en el caso geométrico.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El reconocimiento en el nivel 3

Los estudiantes **reconocen relaciones entre propiedades** de los grafos, como por ejemplo: si un grafo es plano entonces no contiene al grafo completo de cinco vértices como subgrafo. (A partir de aquí ya pueden deducir que ningún grafo completo con más de cuatro vértices es plano.) También, la mejor comprensión de la lógica proposicional que se da en este nivel les permite comprender que los subgrafos heredan algunas propiedades o relaciones de los grafos de los que provienen, como ocurre por ejemplo con las coloraciones: si un grafo puede colorearse con *k* colores, entonces cualquiera de sus subgrafos también puede colorearse con estos colores.

En caso de que los alumnos hayan aprendido más de una manera de representar grafos, estos son capaces de **trasladarse de un modo de representación a otro**, entendiendo las relaciones entre los mismos (o sea, que no todo grafo admite representaciones en un determinado modo). Es preciso remarcar que un alumno que no sea capaz de reconocer un grafo en una determinada forma de representación no necesariamente tiene que pertenecer al nivel 2, pues podría ocurrir que no hubiera aprendido esa forma de representar grafos. Lo que es útil para discriminar entre los niveles 2 y 3 es que, una vez introducido un nuevo modo de representación de grafos, el alumno sea capaz de trasladarlo a otras formas de representación conocidas (caso de ser posible).

De nuevo, encontramos aquí una diferencia notable con respecto al proceso de reconocimiento en Geometría plana que plantean Gutiérrez y Jaime (1998), pues estos autores proponen el reconocimiento a través de propiedades (nivel 2) como máximo grado de adquisición de este proceso. Sin embargo, creemos que el reconocimiento de las relaciones entre propiedades de grafos y las posibles traslaciones entre modos de representación suponen un paso más en este proceso y que por tanto ayuda a discriminar entre los niveles 2 y 3. Los alumnos de nivel 3 han alcanzado el mayor grado de habilidad de reconocimiento, por lo que **este proceso no serviría para discriminar entre alumnos de los niveles 3 y 4.**

Conclusiones

En este trabajo, hemos descrito la evolución que sigue el proceso de reconocimiento de grafos a través de los niveles de van Hiele. Nuestro estudio nos permitirá diseñar trayectorias de aprendizaje de la Teoría de Grafos de la misma manera que lo hacen Jaime y Gutiérrez

ISBN 978-84-945722-3-4

(1990). En efecto, estos autores describen una segunda parte del modelo de van Hiele conocida como fases de aprendizaje, que proporcionan indicaciones sobre la graduación y organización de las actividades para ayudar a los estudiantes a ascender a un nivel superior de razonamiento. Creemos que la elaboración de estas fases es la continuación natural de nuestro estudio y que será de gran utilidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje tanto en niveles universitarios como en no universitarios.

Referencias bibliográficas

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics, 20 (2/3), 27-46.

Holton, D., (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level, an ICMI Study*. Kluwer Academic.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), Teoría y práctica en educación matemática, pp. 295-384. Sevilla: Alfar.

Llorens, J.L. (1994). *Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local.* Universidad Politécnica de Valencia.

ISBN 978-84-945722-3-4