CB-1.087

LA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE EN MATEMÁTICA UNIVERSITARIA: UN EJEMPLO PARA EL CURSO DE ÁLGEBRA LINEAL

Andrea Cárcamo Bahamonde[a y b] – Josep Fortuny Aymemí[b] – Joan Gómez Urgellés[c]
andrea.carcamo@uach.cl – josepmaria.fortuny@uab.cat – joan.vicenc.gomez@upc.edu
[a]Universidad Austral de Chile, Chile - [b]Universidad Autónoma de Barcelona, España - [c]Universidad Politécnica de Cataluña, España

Núcleo temático: VII. Investigación en Educación Matemática.
Modalidad: CB.
Nivel educativo: Universitaria en general.
Palabras clave: álgebra lineal, trayectoria hipotética de enseñanza, investigación de diseño, nivel universitario.

Resumen

En la actualidad, el curso de álgebra lineal se incluye en la mayoría de los programas de estudios de las carreras universitarias enfocadas en el área de ciencia y tecnología. Sin embargo, su enseñanza en este nivel educativo, según señala Hillel (2000) es calificada universalmente como una experiencia frustrante tanto para los profesores como para los estudiantes. Con el objetivo de favorecer el aprendizaje y la enseñanza de este curso, en este trabajo se presenta una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) que tiene como finalidad apoyar a los estudiantes en la construcción de ciertos conceptos del álgebra lineal. En particular, se eligen los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Esta THA se sustenta en la heurística de diseño instruccional de los modelos emergentes y la modelización matemática. La THA surge del análisis de los resultados de una investigación de diseño que constó de tres ciclos de experimentación en la que participaron estudiantes de primer año de la carrera de ingeniería. El análisis de los resultados da evidencias del potencial de esta THA para apoyar el aprendizaje de estos conceptos del álgebra lineal.

El álgebra lineal es un curso obligatorio en muchos cursos de pregrado porque es ampliamente reconocido por tener aplicaciones importantes en diferentes disciplinas (Salgado y Trigueros, 2015). Sin embargo, su enseñanza es universalmente reconocida como difícil. Los estudiantes, por lo general, sienten que aterrizan en otro planeta, están abrumados por la cantidad de nuevas definiciones y la falta de conexión con el conocimiento anterior. En tanto, los maestros a menudo se sienten frustrados y desarmados por esta situación (Dorier, 2002).

Dorier y Sierpinska (2001) plantean que los profesores del curso del álgebra lineal necesitan sugerencias sobre la estructuración de los conocimientos que enseñan y un suministro de

ISBN 978-84-945722-3-4

buenos ejemplos, preguntas, ejercicios y problemas. Estos profesores aprecian los documentos que les proporcionan eso. La trayectoria hipotética (THA) de aprendizaje ofrece esta información a los profesores. Por este motivo, es importante su diseño.

Una THA de acuerdo con Confrey y Maloney (2015) es un modelo conceptual de cómo los estudiantes transitan de sus conocimientos informales a unos más sofisticados cuando se involucran con un conjunto de tareas cuidadosamente secuenciadas. Para Simon (1995) una THA se compone de: el objetivo de aprendizaje, las tareas de instrucción y la hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Recientemente, existen estudios sobre THAs para álgebra lineal. Trigueros y Possani (2011) diseñan una THA para combinación lineal, dependencia lineal e independencia lineal y concluyen que dicha THA contribuye a que los estudiantes aprendan estos conceptos. Por su parte, Andrews-Larson, Wawro y Zandieh (2017) presentan una THA que facilita, a los estudiantes, la comprensión de matrices como transformaciones lineales. Estas autoras a través de la implementación de esta THA identificaron aspectos importantes del razonamiento del estudiante y el rol del profesor para apoyar el desarrollo de ese razonamiento. Considerando los resultados de estos estudios, en esta investigación se diseña una THA para conjunto generador y espacio generado. Se eligen estos conceptos por su por su relación con contenidos importantes de este curso como: base y dimensión de un espacio vectorial (Stewart y Thomas, 2010).

El objetivo de este estudio es presentar una THA, fundamentada empírica y teóricamente, que favorezca el aprendizaje de los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

Con este estudio, pretendemos contribuir al diseño de THAs para álgebra lineal. Nuestra intención es que dicho diseño de trayectoria de aprendizaje apoye a los docentes en la creación de modelos de pensamiento de sus estudiantes. Estos consideramos que les servirán como base para buscar respuestas pedagógicas que ayuden a los estudiantes a transitar hacia su aprendizaje en el ámbito del algebra lineal.

Marco teórico

La base teórica de nuestra investigación se fundamenta en la heurística de diseño instruccional de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999) y la modelización matemática desde una perspectiva educativa (Julie y Mudaly, 2007).

ISBN 978-84-945722-3-4

Para iniciar el aprendizaje previsto, se elige una tarea inicial que sea experiencialmente real para el estudiante (Gravemeijer, 1999). En nuestro caso, elegimos una tarea de contexto real en que la modelización matemática se utiliza como una herramienta de ayuda al estudio de las matemáticas (Julie y Mudaly, 2007). Consideramos el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiss (2007) para guiar a los estudiantes en la resolución de esta tarea.

Una vez definida la tarea inicial, se diseñaron o seleccionaron tareas que suponían para los estudiantes lograr el aprendizaje. En esta investigación, el diseño de las tareas fue guiado por la heurística para el diseño instruccional de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999) que busca crear una secuencia de tareas en que los estudiantes primero desarrollen modelos-de su actividad matemática informal que más tarde se transformen en modelos-para su razonamiento matemático más sofisticado.

Para el progreso desde la actividad matemática informal a un razonamiento matemático formal, Gravemeijer (1999) establece cuatro niveles de actividad: situacional, referencial, general y formal. Zolkower y Bressan (2012) precisan que en el nivel situacional, el problema experiencialmente real es organizado por los estudiantes por medio de estrategias que surgen espontáneamente de la problemática. En el nivel referencial (modelo-de), los estudiantes hacen gráficos, notaciones y procedimientos que esquematizan el problema, pero que se refieren al problema inicial. En el nivel general (modelo-para), los estudiantes exploran, reflexionan y generalizan lo aparecido en el nivel anterior, pero no se hace referencia al contexto inicial. En el nivel formal, los estudiantes trabajan con procedimientos y notaciones convencionales desligadas de las situaciones que les otorgaron su significado inicial.

Metodología

La metodología del estudio fue la investigación de diseño. Esta investigación tiene el potencial de superar la brecha entre la práctica educativa y la teoría (Bakker y van Eerde, 2015). En la primera fase, se elaboró una THA (Simon, 1995). En la fase de experimentos de enseñanza, se desarrollaron tres ciclos de experimentos de diseño en los que se refinó la THA inicial. Finalmente, en la fase de análisis retrospectivo se realizaron dos tipos de análisis de datos: uno preliminar y otro global.

ISBN 978-84-945722-3-4

El análisis preliminar consistió en comparar los datos de la trayectoria actual de aprendizaje (TAA) [39] con las conjeturas de la THA para las diferentes tareas (Bakker y Van Eerde, 2015). Por ello, (re)construimos la TAA para las tareas principales de la THA de cada ciclo de experimento de diseño a través de los siguientes pasos: selección de datos; organización en tablas de las respuestas escritas de los estudiantes y transcripción de las grabaciones en video y audio que estaban relacionadas con las respuestas escritas; identificación de regularidades en cada tarea referentes a los tipos de respuestas que dieron los estudiantes y a las dificultades que presentaron.

A continuación, comparamos en cada ciclo de experimento de diseño, la THA con la TAA a través de la matriz cualitativa/cuantitativa de análisis de datos (Tabla 1) propuesta por Dierdorp, Bakker, Eijkelhof, y van Maanen (2011). Para esto, se buscaron datos que apoyaran o refutaran las conjeturas. La parte izquierda de la matriz resume la THA y la parte derecha sintetiza la TAA a través de: respuestas escritas o extractos de transcripciones, descripción de los resultados por parte del investigador y una impresión cuantitativa de lo cercano que estuvieron las conjeturas de la THA con la TAA. El signo - se utiliza cuando las observaciones sugieren que las conjeturas fueron confirmadas por un máximo de un tercio de los estudiantes. El signo + se utilizó cuando las observaciones sugirieron que las conjeturas se confirmaron por lo menos en dos tercios de los estudiantes. El signo ± se utiliza para los casos intermedios.

Tabla 1. Matriz cualitativa/cuantitativa de análisis de datos para comparar la THA con la TAA

THA			TAA		Comparación THA y TAA
Tarea	Descripción tarea	Conjetura de la respuesta de los estudiantes	Extracto de respuesta escrita u oral	Resultado	Impresión cuantitativa de lo que se acercan éstas (i.e. -,±,+)

A partir de los resultados de cada ciclo, se agregaron, mantuvieron, modificaron o eliminaron conjeturas de la THA aplicada para utilizarla en un ciclo nuevo.

El análisis global (Bakker y van Eerde, 2015) consistió en observar las tres TAAs de los ciclos de experimento de diseño para buscar patrones o tendencias relacionadas con determinar las tareas de cada THA que favorecieron la construcción de los conceptos.

[39] Utilizamos la frase “trayectoria actual de aprendizaje” para describir el aprendizaje observado que se infiere de los datos recogidos, ya que estamos de acuerdo con Dierdorp et al. (2011) en que no es posible detectar el aprendizaje "real" de los estudiantes.

ISBN 978-84-945722-3-4

Resultados y discusión

En el análisis preliminar se identificaron, para cada ciclo de experimento de diseño, las tareas que favorecieron la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Para ver los resultados de cada ciclo se puede consultar: Cárcamo, Gómez y Fortuny (2016); Cárcamo, Fortuny y Gómez (2016); Cárcamo, Fortuny y Fuentealba (2017). La descripción de estas tareas y sus características comunes en los diferentes ciclos de experimento de diseño se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Descripción de cada tarea y las características comunes de éstas en cada ciclo de diseño de experimento que favorecieron el aprendizaje

Descripción de la tarea	**Característica de las tareas que favorecieron el aprendizaje**
Tarea 1. Crear un generador de contraseñas numéricas con vectores.	Permitió que los estudiantes activaran sus concepciones previas de vectores. Esto les sirvió para resolver las siguientes tareas y tener una primera aproximación de conjunto generador y espacio generado.
Tarea 2. Realizar una tabla de analogía entre el contexto de generar contraseñas numéricas y los conceptos de conjunto generador y espacio generado.	Favoreció que los estudiantes distinguieran entre conjunto generador y espacio generado al tener que relacionarlos con conjuntos derivados de una situación real.
Tarea 3. Conjeturar propiedades de conjunto generador y espacio generado fuera del escenario de las contraseñas.	Admitió que los estudiantes profundizaran sobre propiedades de conjunto generador y espacio generado en el espacio de R^n.
Tarea 4[40]. Aplicar los conceptos de conjunto generador y espacio generado en un contexto matemático.	Dejó que los estudiantes aplicaran conjunto generador y espacio generado en un contexto matemático y en situaciones diferentes a las presentadas en las tareas previas.

Respecto a la tarea 1, Cárcamo, Fortuny y Fuentealba (2017) precisaron que los estudiantes usaron el modelo matemático basado en vectores para tener una primera aproximación de los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Lo anterior, porque a partir de éste, ellos obtuvieron dos conjuntos que se relacionaron con el contexto de las contraseñas, pero también, con estos conceptos matemáticos. En relación con la tarea 2, Cárcamo, Fortuny y Gómez (2016) señalaron que ofreció a los estudiantes la oportunidad de evitar confundir estos conceptos porque fueron presentados en una situación cotidiana y real para los estudiantes.

[40] La THA del ciclo 1 no tiene tarea 4. Sin embargo, se consideró que una de las preguntas de la tarea 3 de su THA se vinculaba a la tarea 4 de los otros ciclos de experimento de diseño.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

La tarea 3 permitió que los estudiantes del ciclo de experimento de diseño uno identificaran la relación de inclusión que existe entre conjunto generador y espacio generado, pero también que reconocieran en notación de conjunto que uno de ellos tiene una cantidad finita de vectores y el otro, infinitos (Cárcamo, Gómez y Fortuny, 2016). Por otro lado, en los ciclos de experimento de diseño dos y tres, los estudiantes exploraron, reflexionaron e hicieron conjeturas sobre conjuntos de vectores de R^n que correspondían a conjuntos generadores o a espacios generados y que no se referían al escenario de la tarea 1 (por ejemplo, conjeturaron las condiciones para que un conjunto generara al espacio de R^2).

La tarea 4, en los ciclos de experimento de diseño dos y tres, dio indicios de que favoreció la construcción de los conceptos en estudio porque los estudiantes los aplicaron en un contexto matemático y en situaciones diferentes a las presentadas en las tareas previas. También, se considera que una de las preguntas de la tarea 3 del ciclo de experimento de diseño uno favoreció que los estudiantes aplicaran conjunto generador y espacio generado en un contexto matemático. En concreto, la pregunta que les pidió verificar si un vector pertenece a un cierto espacio generado. Varios estudiantes lograron verificar si un vector pertenecía a un cierto espacio generado haciendo combinación lineal de los vectores del conjunto generador de este cierto espacio (Cárcamo, Gómez y Fortuny, 2016).

Los resultados de cada ciclo de experimento de diseño fueron corroborando las características primordiales de cada tarea que favoreció que los estudiantes construyeran los conceptos de conjunto generador y espacio generado. La discusión de estos resultados nos condujo a desarrollar una THA para estos conceptos. Una síntesis de esta THA se presenta en la Tabla 3.

Tabla 3. Síntesis de la THA para los conceptos de conjunto generador y espacio generado propuesta en esta investigación.

Objetivo	Descripción de la tarea	Conjetura de la ruta de aprendizaje
Los estudiantes usan vectores y el ciclo de modelización para crear un modelo matemático.	Tarea 1: crear un generador de contraseñas seguras basado en vectores.	Los estudiantes: (a) Leen información de las contraseñas seguras. (b) Crean un generador de contraseñas basado en vectores siguiendo los pasos del ciclo de modelización matemática.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Los estudiantes identifican características de conjunto generador y espacio generado, y distinguen entre ellos.	Tarea 2: hacer una tabla de analogía entre su generador de contraseñas y los conceptos de conjunto generador y espacio generado.	Los estudiantes: (a) Encuentran dos conjuntos de su generador de contraseñas (uno que tiene los vectores para generar contraseñas numéricas y otro que posee los vectores que al hacer combinación lineal entre ellos se obtiene cada contraseña numérica). (b) Identifican similitudes entre los conjuntos de su generador de contraseñas y conjunto generador y espacio generado (c) Distinguen entre los conceptos con la tabla de analogía.
Los estudiantes deducen propiedades de conjunto generador y espacio generado.	Tarea 3: conjeturar cuáles son las características de dos conjuntos generadores de un mismo espacio en R^n.	Los estudiantes: (a) Exploran casos particulares en R^2 y R^3 e identifican algún patrón. (b) Relacionan conjunto generador con otros conceptos. (c) Conjeturan las características que pueden tener dos conjuntos generadores de un mismo espacio. (e) Determinan que dos conjuntos generadores no tienen porque tener elementos en común o tener el mismo número de elementos.
Los estudiantes aplican conjunto generador y espacio generado.	Tarea 4: Sean C={(1,0,0), (0,0,1)} y S={(p,0,p) / p en R} entonces cada vector de S es una combinación lineal de los vectores de C porque (p,0,p)= p(1,0,0) + p(0,0,1). ¿Es C un conjunto generador de S? Justifica tu respuesta.	Los estudiantes para plantear una solución: (a) Exploran posibles rutas para su resolución. (b) Determinan las condiciones que debe cumplir C para que sea un conjunto generador de S. (c) Concluyen que C no es un conjunto generador de S.

Conclusiones

El objetivo de este trabajo fue presentar una THA que favorezca a los estudiantes en su construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado del álgebra lineal a nivel universitario.

Esta THA es una propuesta que se fundamenta en la heurística de los modelos emergentes y en la modelización matemática. Además, surge como resultado de un refinamiento iterativo de una THA en tres ciclos de experimentación de diseño.

La THA propuesta para la construcción de conjunto generador y espacio generado, se destaca por ser útil para enseñar este tipo de contenido porque proporciona una estrategia para promover la comprensión de conjunto generador y espacio generado. Esta estrategia se refiere a utilizar la modelización matemática como una herramienta de ayuda (Julie y Mudaly, 2007) para el estudio de estos conceptos y una secuencia de tareas diseñada para facilitar la transición de los estudiantes de sus concepciones previas hacia la comprensión formal de los contenidos (Gravemeijer, 1999).

ISBN 978-84-945722-3-4

Los resultados en el proceso de refinamiento de esta THA, ya dan evidencias de su potencial para apoyar el aprendizaje de conjunto generador y espacio generado. Por esta razón, esperamos que esta THA sirva para aplicarla en otros contextos educativos, previamente adaptada a estos. Asimismo, consideramos que esta THA puede proporcionar una orientación para diseñar otras trayectorias que ayuden a los estudiantes a transitar hacia su aprendizaje en el álgebra lineal.

Referencias bibliográficas

12. Andrews-Larson, C., Wawro, M., & Zandieh, M. (2017). A hypothetical learning trajectory for conceptualizing matrices as linear transformations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: 10.1080/0020739X.2016.1276225

13. Bakker, A., y van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. In *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 429-466). Springer Netherlands.

Blum W., y Leiss D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester, UK: Horwood Publishing.

Cárcamo, A., Fortuny J. y Fuentealba C. (2017). The emergent models in linear algebra: an example with spanning set and span. *Teaching Mathematics and its Applications*. Manuscrito en revisión.

Cárcamo, A., Fortuny J. y Gómez, J. (2017) Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48:3, 38-352, DOI: 10.1080/0020739X.2016.1241436

Cárcamo, A., Gómez, J., Fortuny, J. (2016). Mathematical Modelling in Engineering: A Proposal to Introduce Linear Algebra Concepts. *Journal of Technology and Science Education* (JOTSE), 6(1), 62-70. http://dx.doi.org/10.3926/jotse.177

Confrey, J., y Maloney, A. (2015). A Design study of a curriculum and diagnostic assessment system for a learning trajectory on equipartitioning. *ZDM Mathematics Education*, 47(6).

14. Dierdorp, A., Bakker, A., Eijkelhof, H., y van Maanen, J. (2011). Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. Mathematical Thinking and Learning, 13(1-2), 132-151.

Dorier, J. L. (2002). Teaching linear algebra at university. En ICM, Vol.3 (pp.875-874).

15. Dorier, J. L., y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 255-273). Springer Netherlands.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 155-177.

ISBN 978-84-945722-3-4

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Ed.). *On the teaching of linear algebra* (pp. 191–208). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Julie, C., y Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study* (pp. 503–510). New York: Springer.

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.

Trigueros, M., y Possani, E. (2011). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 438(4), 1779-1792.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 100-120.

Stewart, S., y Thomas, M. O. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 173-188.

Zolkower y Bressan (2012). Educación matemática realista. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comp.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp.175-200). Argentina: UNGS – EDUVIM.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4