REGLETAS CUISENAIRE – NÚMEROS EN COLOR

Estefanía Castelló García

Pere Ivars Santacreu

Álvaro García Reche

José David López Galvañ

Juan José Fernández Beltrán

1. Los números en color: Regletas Cuisenaire

Las regletas Cuisenaire son un material estructurado que puede ser usado para que el alumnado aprenda conceptos matemáticos como la composición y descomposición de los números y también para la iniciación de las actividades de cálculo con materiales manipulativos. Se pueden trabajar conceptos básicos como grande, pequeño, mayor, menor, igual, diferentes… Así como operaciones (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones), tanto con números pequeños como con cifras mayores. Se pueden resolver potencias, fracciones y ecuaciones simples. El material consta de un conjunto de regletas de madera de diez tamaños y colores diferentes (Figura 1). La longitud de las mismas va de 1 a 10 cm. Cada regleta equivale a un número natural (cuando las medimos con la regleta blanca):

- La regleta *blanca* o de color natural, con 1 cm de longitud, representa al número 1 (B).
- La regleta *roja*, con 2 cm representa al número 2 (Rj).
- La regleta *verde claro*, con 3 cm representa al número 3 (Vc).
- La regleta *rosa*, con 4 cm representa al número 4 (Rs).
- La regleta *amarilla*, con 5 cm representa al número 5 (Am).
- La regleta *verde oscuro*, con 6 cm representa al número 6 (Vo).
- La regleta *negra*, con 7 cm representa al número 7 (Ne).
- La regleta *marrón*, con 8 cm representa al número 8 (M).
- La regleta *azul*, con 9 cm representa al número 9 (Az).
- La regleta *naranja*, con 10 cm representa al número 10 (Na)

Figura 1. Números en color: Regletas Cuisenaire

El uso de este material implica una asociación entre la visión y la acción, la comprensión, el cálculo y la comprobación (Gateño, 1963). El método fue diseñado en 1952 por Georges Cuisenaire para su uso continuado y como instrumento para el aprendizaje de la aritmética desde la etapa de Educación Infantil a los primeros cursos de Educación Primaria. Consideramos que se trata de un material atractivo y con un gran potencial didáctico, ya que está diseñado para que el alumnado se familiarice, desde el principio y de una manera totalmente lúdica, con conceptos matemáticos que, especialmente en los primeros niveles de primaria, son de vital importancia para un correcto desarrollo matemático en el sistema cognitivo del niño. Se trata de un recurso manipulativo colorido que puede repercutir positivamente, sobre todo en los primeros cursos, en la motivación del alumnado. Mediante su uso consigue la estructuración de multitud de conceptos matemáticos de una manera sencilla y mediante la compresión de las diferentes descomposiciones de los números. Los objetivos principales del uso de este material de acuerdo con Gateño (1963) son:

- El alumnado va descubriendo por sí mismo los conocimientos matemáticos en función de sus capacidades.
- Los números adquieren y conservan su individualidad a pesar de las múltiples descomposiciones o combinaciones en que se ven envueltos.
- El alumnado obtiene un nivel progresivo de abstracción mental que le produce el hecho de ver mentalmente.
- El hecho de poder manipular el material permite una asociación entre colores y tamaños desarrollando la capacidad analítica partiendo de su propia experiencia, hecho que le permite adquirir "*una gran flexibilidad mental y una clara actitud de objetividad*".
- El cálculo revierte en una actividad atractiva.
- Se crean conexiones entre las experiencias lúdicas y de observación previas y la siguiente etapa en la que se trabaja de manera sistemática.

1.1 Contenidos matemáticos cuyo aprendizaje se puede potenciar con los números en color

Las regletas Cuisenaire nos permiten trabajar múltiples contenidos en todas las etapas de la Educación Primaria. En el listado siguiente enumeramos algunos contenidos que podrían trabajarse con este material (Fernández, 1989):

- Cifras y números: Números y operaciones.
- Operaciones con números naturales: adición y sustracción.
- Propiedad de las operaciones.

- Descomposiciones de los números.
- Desarrollo de estrategias de cálculo mental.
- La medida: estimación y cálculo de magnitudes. Longitud.
- Concepto de fracción
- Iniciación a la divisibilidad: múltiplos y divisores. El MCD.

2. Diseño de la propuesta

El desarrollo de esta propuesta está pensado para primer ciclo de Educación Primaria, concretamente segundo curso. Los objetivos están vinculados al desarrollo del pensamiento relacional:

- Identificar el signo igual como una expresión de equivalencia.
- Desarrollar el pensamiento relacional.
- Descomponer aritméticamente números menores de 20.
- Descubrir las propiedades conmutativa y asociativa de estructuras aditivas.
- Resolver sentencias numéricas haciendo uso de las regletas de Cuisenaire de forma simbólica y mediante representaciones gráficas.
- Explicar el proceso de resolución de sentencias usando los términos matemáticos correctos.

Con la implementación de nuestro taller se trabajan múltiples competencias como la *Competencia en Comunicación Lingüística*. Las actividades que diseñamos se trabajan tanto de manera individual como por parejas y grupos pero todas ellas se corrigen en gran grupo favoreciendo de esta manera las interacciones verbales y el desarrollo de dicha competencia. Además el hecho de propiciar las interacciones nombradas ayuda de manera inequívoca al desarrollo progresivo de la *Competencia Social y Ciudadana*.

Por otra parte, al trabajar utilizando material manipulativo se ve favorecida la *Competencia en el Conocimiento e Interacción con el Mundo Físico* así como la *Competencia para Aprender a Aprender* ya que el alumnado ha de interpretar la información que recibe del material, incorporar a su repertorio habilidades que le permitirán iniciarse en el aprendizaje y que le servirán para seguir aprendiendo paulatinamente.

En cuanto a la *Competencia Matemática*, su desarrollo está profundamente ligado a nuestro taller al aplicar los conocimientos matemáticos a situaciones reales para la resolución de problemas. Se apoya la compresión conceptual a través de las relaciones entre los números para realizar operaciones. También desarrollamos destrezas procedimentales conforme el alumnado vaya avanzando de nivel en el pensamiento relacional y consiga usar estrategias de compensación y reconocimiento en las transformaciones que se dan en las igualdades. La capacidad de comunicar y explicar matemáticamente se potencia cuando el alumno debe explicar al resto la estrategia que utiliza para resolver las actividades. Esto también nos ayudará a determinar en qué nivel del pensamiento relacional se encuentra. En cuanto al pensamiento estratégico, es muy importante que conforme avanzan en el pensamiento relacional, aprendan otras formas de resolver igualdades como las que se trabajarán. Por último, potenciará la confianza en las propias capacidades matemáticas, además de una disposición positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Los contenidos son

CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
-El signo igual como expresión de equivalencia. -Descomposiciones aritméticas. La propiedad conmutativa y asociativa de estructuras aditivas. -Uso del pensamiento relacional para la resolución de sentencias numéricas.	-Operaciones con números naturales: adición y sustracción. -Resolución de sentencias numéricas haciendo uso de regletas Cuisenaire simbólicamente y mediante representaciones gráficas. -Utilización de términos matemáticos para la explicación del proceso.	-Disposición y actitud positiva hacia el trabajo por parejas y hacia el uso del material didáctico.

2.1 Trayectoria de aprendizaje

Para la elaboración del presente taller, se ha seleccionado como tópico el desarrollo del *pensamiento relacional* mediante el uso de las regletas Cuisenaire. El pensamiento relacional requiere que el alumno desarrolle una visión relacional del signo igual. Éste le permite (Carpenter, Franke, y Levi, 2003):

- Utilizar propiedades aritméticas, como por ejemplo la distributiva.

  $(3 \times 234) + (2 \times 234) = (\boxed{5} \times 234)$

- Descomponer y recomponer expresiones.

  $\frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{6}$

- Usar de modo flexible operaciones y relaciones.

  ¿Cómo puedo calcular 34 x 9?

  $34 \times (10 - 1) = 340 - 34 = 300 + 40 - 30 - 4 = 306$

- Centrarse únicamente en relaciones y no en el cálculo de una respuesta.

Antonio corrió menos distancia en menos tiempo que ayer. ¿Cuándo corrió más rápido?

- Considerar las expresiones y ecuaciones como un total y no como procedimientos a realizar paso a paso.

  Resuelve $45 + 67 = \square + 65$. Una respuesta que evidencia el pensamiento relacional sería *"La respuesta es 2 más que 45 ya que 65 es dos menos que 67"*.

Se ha comprobado que el desarrollo del pensamiento relacional se da en los alumnos mucho antes de lo que se creía, pero para ello deben tener una comprensión adecuada del signo igual como expresión de equivalencia y comprender las distintas operaciones, sus propiedades fundamentales y las relaciones entre sí. Generalmente, el alumnado concibe el signo igual como un signo operacional ("hay que hacer algo"). Sin embargo, el signo igual representa una relación de igualdad o equivalencia entre expresiones.

La concepción operacional del signo igual conduce al alumnado a cometer algunos errores. Por ejemplo, hay alumnos que ante un ejercicio como: $3 + 4 = \square + 2$ realizan una suma de los términos de la izquierda y ponen el resultado en el recuadro vacío situado justo al lado del signo igual sin darse cuenta de que hay otro número situado a la derecha de dicho signo.

$$3 + 4 = \square + 2 \Rightarrow 3 + 4 = \boxed{7} + 2$$

Otra evidencia del significado operacional del signo igual es que, realizan la primera suma y pone su resultado en el recuadro, realiza la siguiente suma y añade el signo igual y el resultado final.

$$3 + 4 = \square + 2 \Rightarrow 3 + 4 = \boxed{5} + 2 = 7$$

Por último, a veces algunos niños suman todos los números en la expresión y colocan el resultado en el recuadro.

$$3 + 4 = \square + 2 \Rightarrow 3 + 4 = \boxed{9} + 2$$

Como posibles causas de este uso del signo igual tenemos:

- Que los alumnos hayan trabajado siempre con expresiones en las que aparece una operación y un resultado separado por el signo igual, tipo 3 + 4 =
- El uso de calculadoras, ya que para obtener el resultado de una operación hay que pulsar la tecla "=", reforzando la visión operacional del signo igual
- La predisposición de los alumnos a calcular en vez de a establecer relaciones.

Un hecho que apoya el objetivo de potenciar el desarrollo del pensamiento relacional en la educación primaria es que los alumnos que muestran un pensamiento relacional en situaciones aritméticas, tienen mejores resultados cuando se enfrentan a situaciones algebraicas.

Según Matthews (2012), los niveles de desarrollo del pensamiento relacional en sentencias numéricas son los siguientes:

Nivel 1: Operacional rígido

En este primer nivel, el alumno sólo tiene éxito con ecuaciones con estructura tipo operación - igual - respuesta, tanto si el recuadro vacío es el resultado como si es parte de la operación.

$$3 + 4 = \square\ ;\ 3 + \square = 7$$

Nivel 2: Operacional flexible

En este caso, el alumno ya resuelve y evalúa con éxito estructuras de ecuaciones que son compatibles con una visión operacional del signo igual, como por ejemplo situando las operaciones a la derecha. $\square = 3 + 4$

Nivel 3: Relacional básico

En este nivel el alumno resuelve y evalúa con éxito estructuras de ecuación con operaciones a los dos lados del signo igual, por tanto dispone de una visión relacional del signo =.

$$3 + 4 = \square + 2;\ \text{o bien}\ 3 + \square = 5 + 2$$

Sin embargo, En este nivel todavía se resuelven las ecuaciones como un procedimiento a realizar paso a paso.

$$45 + 67 = \square + 65$$

"La respuesta es 47 ya que 45 + 67 = 112 y tengo que restar 112 - 65 para saber el resultado".

Nivel 4: Relacional comparativo

En el último nivel, el alumno resuelve con éxito y evalúa ecuaciones comparando las expresiones en los dos lados del signo igual usando estrategias de compensación y reconocimiento de las transformaciones que mantiene la igualdad.

Sin sumar 68 + 49, ¿puedes decirme si la ecuación 68 + 49 = 69 + 48 es verdadera o falsa?

R1: *68 es una menos que 69, y como 49 es uno más que 48, son iguales.*

R2: *Si al 49 le quito 1 y se lo pongo al 68 tengo 69, que es lo mismo que hay en la otra parte.*

Resuelve 68 + 49 = $\square$ + 46. *"La respuesta es 3 más que 68 ya que 46 es tres menos que 49".*

2.2 Actividades

La metodología se centra en el aprendizaje manipulativo, aprender haciendo, a través de diferentes actividades en las que emplearemos las regletas de Cuisenaire como material de trabajo. El cometido del docente será actuar como guía en el proceso de aprendizaje, tratando de no dar las respuestas a los alumnos, sino de guiarlos en el proceso hasta que encuentren por sus propios medios la solución; y lo más importante, su propia estrategia para resolver el problema planteado. La distribución del alumnado será en agrupamientos variables. Se trabajará de manera individual, por parejas y en gran grupo, en los que el juicio y experiencia del docente deberá evaluar qué combinaciones de alumnos son las óptimas para lograr los aprendizajes más efectivos.

Para el aprovechamiento de las sesiones se debe prestar atención al mantenimiento de un clima de trabajo adecuado en clase, con un ritmo de trabajo apropiado y distendido que no haga a los alumnos perder el interés por la propuesta.

ACTIVIDAD 1

Esta actividad está enfocada a un primer nivel de desarrollo del pensamiento relacional, (nivel operacional rígido). El alumnado trabajará de manera individual utilizando las regletas Cuisenaire. Se les presentará una ficha con actividades como las que aparecen en la Figura 2 y se les dejará un tiempo prudencial para que la realicen (aproximadamente 30'). Se pedirá que se utilice una única regleta en cada uno de los huecos proporcionados. El objetivo de la ficha es que los alumnos se familiaricen con el material en contextos en que el pensamiento operacional (tanto rígido como flexible) es adecuado (*operación-signo igual-resultado)*, expresándolas también de forma simbólica viendo la relación entre lo que se hace manipulativamente y lo que se escribe de manera simbólica. Al finalizar se procederá a la corrección de la ficha en la pizarra, prestando especial atención a los tipos de justificación que proporciona el alumnado.

Nombre____Fecha___________

1. Utiliza las regletas para averiguar qué números faltan en las cajas y represéntalo con un dibujo.

   Ejemplo:

a.	Vc	+	Rs	=	Ne
	3	+	4	=	□
b.		+		=	
	2	+	1	=	□
c.		-		=	
	6	-	4	=	□

Figura 2. Ficha para evidenciar el pensamiento operacional en tareas del tipo a + b = □

ACTIVIDAD 2

En este ejercicio se proporcionará a los alumnos una ficha con sentencias numéricas como las proporcionadas en la Figura 3, donde deberán resolver de forma individual las operaciones que contiene utilizando las regletas. Además, deberán representar con dibujos de las regletas cada operación siguiendo el ejemplo. El objetivo de esta ficha es que el alumno resuelva sentencias numéricas del tipo *resultado-signo igual-operación*, y al igual que en la anterior, que relacionen lo que hacen con el material didáctico (regletas de Cuisenaire) y lo que escriben de manera simbólica. Al finalizar se procederá a la corrección de la ficha en la pizarra, prestando especial atención a los tipos de justificación que proporciona el alumnado.

1. Utiliza las regletas para averiguar qué números faltan en las cajas y represéntalo con un dibujo.

   Ejemplo:

a.	Ne	=	Am	+	Vc
	□	=	5	+	3
b.		=		+	
	7	=	□	+	4
c.		=		-	
	□	=	6	-	1

Figura 3. Ficha para evidenciar el pensamiento operacional en tareas del tipo □ = a+b

ACTIVIDAD 3

Este ejercicio consiste en completar sentencias numéricas de estructura *a+b = c+d*. El alumnado se distribuirá por parejas y se le dará a cada uno de ellos una ficha diferente (Ficha A o Ficha B. Ejemplos de las actividades de estas fichas se muestran en la Figura 4).

En la primera parte de la actividad, cada uno, por separado y utilizando las regletas, deberá completar una de las fichas dadas. Se solicitará al alumnado que complete los huecos con una única cifra evitando así la aparición de estructuras del tipo *a+b = c+d+e*. En la segunda parte, se realiza un intercambio de las fichas y el compañero tendrá que comprobar si la sentencia numérica escrita es correcta o incorrecta haciendo uso de las regletas y realizando una representación gráfica de las mismas en el recuadro habilitado para ello en las fichas.

Regletas Cuissenaire Ficha A

Nombre______________________________Fecha__________

1. Encuentra el número que falta en cada una de las cajas. Para ello, puedes hacer uso de las regletas.

a. $10 + 8 = 9 + \boxed{}$
Comprobación de tu compañero usando las regletas:
b. $10 + 7 = \boxed{} + 8$
Comprobación de tu compañero usando las regletas:

Regletas Cuissenaire Ficha B

Nombre______________________________Fecha__________

1. Encuentra el número que falta en cada una de las cajas. Para ello, puedes hacer uso de las regletas.

a. $2 + 2 = 1 + \boxed{}$
Comprobación de tu compañero usando las regletas:
b. $10 + 5 = \boxed{} + 8$
Comprobación de tu compañero usando las regletas:

Figura 4. Fichas para evidenciar el pensamiento operacional en tareas del tipo a+b = c+d.

Para la corrección, se solicitará al alumnado que vaya saliendo a la pizarra a justificar sus comprobaciones. Es en este caso cuando el docente ayudará a los alumnos a expresarse con un vocabulario matemático adecuado, mostrándoles que lo que se encuentra en la parte izquierda del signo "=" es equivalente a los que se encuentra en la parte derecha (visión relacional del signo "="). Para que el alumno dé el salto a pensar de manera relacional, es necesario que el maestro muestre una reflexión similar a la siguiente: *"Como 9 es uno menos que 10, entonces el número de la caja tendrá que ser uno más que 8".*

Ejemplo: Un alumno, tras realizar una sentencia numérica de la ficha, se la muestra al compañero: $10 + 8 = 9 + \boxed{7}$

El compañero comprueba con las regletas que la igualdad es errónea y, para justificarlo realiza la siguiente representación.

Na	M
Az	Az

En este caso, el alumno que está comprobando ha representado la igualdad

$10 + 8 = 9 + \boxed{9}$.

ACTIVIDAD 4

La siguiente tarea se realizará por parejas. Cada alumno tendrá un número determinado de regletas, que inicialmente deberán sumar atendiendo a su valor para saber la cantidad total de la que disponen (por ejemplo si un niño tiene 8 regletas blancas, 7 regletas rojas, 9 regletas verde claro, 6 regletas rosas, 10 regletas amarillas, 12 regletas verde oscuro, 3 regletas negras, 4 regletas marrones, 6 regletas azules y 5 regletas naranjas, el valor total de las regletas que tiene será 352).

Una vez sepan el valor total de las regletas con las que inician el ejercicio, procederán a intercambiárselas con su compañero de manera que el valor total de las regletas que tengan nunca varíe. Para ello, el alumno A ofrecerá al alumno B dos regletas que querrá cambiar por otras dos de su compañero. El alumno B acepta el cambio y le entrega una regleta. El alumno A deberá elegir la regleta que le falta (de entre las que tenga B) para obtener un cambio equivalente a las primeras dos regletas que ofrecía.

Durante el desarrollo de la actividad, se realizarán un total de 10 intercambios aproximadamente (en función de las características y las disposiciones de cada aula el docente decidirá cómo realizar los intercambios). Finalmente, cuando esta acabe, deberán volver a sumar el valor de las regletas que tienen ahora para comprobar que no ha variado desde el inicio del ejercicio y asegurarse así de que han realizado los cambios correctamente.

El alumnado llevará un registro de los cambios efectuados utilizando una ficha como la siguiente. Esta hoja de registros permitirá tanto la evaluación del docente como la autoevaluación del alumnado para comprobar, en caso de no acabar con el mismo valor de regletas que empezó, en qué parte del proceso se produjo el error.

Representación regletas	Cambio 1	Cambio 2	Cambio 3
Operación	8 + 4 = 6 + 6		
Representación regletas	Cambio 4	Cambio 5	Cambio 6
Operación			
Representación regletas	Cambio 7	Cambio 8	Cambio 9
Operación			
Representación regletas	Cambio 10	Cambio 11	Cambio 12

Figura 5. Ficha de registro de cambios efectuados

Al acabar cada alumno explicará al resto de la clase uno de los cambios que haya realizado. Al haberse incidido en la actividad anterior en la necesidad de utilizar el pensamiento relacional, se incitará al alumnado a justificar el cambio realizado utilizando un vocabulario matemático adecuado.

Ejemplo: El alumno A le dice al B que le cambia una regleta marrón más una rosa (Figura 6). El alumno B acepta y le dice que le da una regleta amarilla y otra que tiene que decidir el alumno A. De este modo, se obtiene la siguiente ecuación: $8 + 4 = 5 + \square$

Figura 6. Ejemplo de intercambio

El alumno A comprobará (mediante la estrategia de resolución que utilice según el nivel en el que se encuentre) que la otra regleta que tiene que coger del alumno B junto a la amarilla, es la de color negro que vale 7 (Figura 7). Se resuelve así la ecuación: 8 + 4 = 5 + 7

Figura 7. Resolución de intercambio

Posteriormente el alumno A explica a sus compañeros lo siguiente: *La ficha que me ha dado B es 5, y eso es uno menos que 4. Por tanto la ficha que me faltaba por coger era 1 menos que 8, es decir 7.*

ACTIVIDAD 5

Presentamos un enlace con un recurso digital interesante para que el alumnado, con carácter voluntario, pueda reforzar y ampliar los contenidos trabajados durante las sesiones utilizando el soporte de las TIC.

http://www.didactmaticprimaria.com/2015/01/regletas-de-cuisenaire-version-digital.html

En él se realizarán actividades de manipulación libre, de seriación, de cálculo multiplicativo y de iniciación a la división así como de varios niveles de cálculo mental. La Figura 8 corresponde a una de esas actividades: se presentan dos figuras de un determinado valor y el estudiante debe encontrar otras dos del mismo valor.

Figura 8. Actividad interactiva

3. Evaluación

Para la evaluación, se tendrá en cuenta si los alumnos han alcanzado los objetivos planificados para el presente taller, además de la comprensión alcanzada en relación a los niveles de desarrollo del pensamiento relacional. Para evaluar si los alumnos han alcanzado los objetivos planificados, se completará una rúbrica como la siguiente, donde se tiene en cuenta el resultado final y el proceso seguido durante el taller. Para evaluar la comprensión alcanzada en relación a la trayectoria de aprendizaje definida, se utilizará una ficha de evaluación (Figura 8).

Alumna/o____ Sesión_________

	Nunca	Casi nunca	Casi siempre	Siempre
Comprensión				
Resuelve ecuaciones de tipo operación-igual-respuesta.				
Resuelve ecuaciones compatibles con una visión operacional del signo igual.				
Resuelve ecuaciones con operaciones a ambos lados del signo igual, desarrollando una visión relacional del signo igual.				
Resuelve ecuaciones comparando ambos lados del signo igual usando estrategias de compensación y reconociendo transformaciones.				
Dificultades				
Presenta dificultades para observar el signo igual como equivalencia de dos expresiones.				
Presenta dificultades en usar estrategias de compensación cuando resuelve ecuaciones comparando ambos lados del signo igual.				
Errores observados y otros comentarios:				
Acciones didácticas a aplicar:				

Figura 8. Ficha de evaluación

REFERENCIAS

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann

Fernández, J. A. (1989). *Los números en color de G. Cuissenaire. Relaciones dinámicas para el descubrimiento de la matemática en el aula.* Seco Olea. Madrid.

Gateño, C. (1963). *Introducción a los números en color.* Cuisenaire de España. Madrid

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K. y Taylor, R. (2012). Measure for Measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(2), 220-254.