

Polígonos mágicos, círculos lullianos y otros problemas insalubres

Lucio R. Berrone* - Pablo A. Lotito**

Abstract

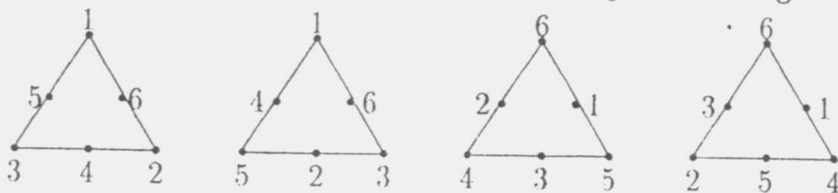
Estudiamos ciertos sistemas de ecuaciones diofantinas asociados a polígonos y diversos problemas relacionados. Estos últimos comparten con aquellos propiedades fuertemente adictivas, motivo por el cual se advierte al lector sobre el potencial peligro que para su salud representa la lectura de este trabajo.

1 Introducción

En el libro [2] se plantea el siguiente problema

Problema 1 *Es posible marcar los vértices y los lados de un triángulo con los enteros $1, 2, \dots, 6$ de manera que la suma sobre cada lado del triángulo sea la misma ?*

Con una formulación similar y bajo el nombre de "triángulos mágicos", este mismo problema es propuesto en la revista de divulgación científica[11], cuya página de soluciones contiene correctamente las cuatro posibles configuraciones:



En este trabajo estudiaremos diversas generalizaciones y variantes del problema anterior. La siguiente parece una generalización muy natural del problema 1:

Problema 2 *Es posible marcar los vértices y los lados de un n -ágono con los enteros $1, 2, \dots, 2n$ de manera que la suma sobre cada lado sea la misma ?*

Inmediatamente nos damos cuenta de que el enunciado "geométrico" de este problema es circunstancial, pues en realidad se trata de resolver el sistema diofantino

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = s \\ x_3 + x_4 + x_5 = s \\ \vdots \\ x_{2n-1} + x_{2n} + x_1 = s \end{array} \right. , \quad (1)$$

con las restricciones

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x_i \leq 2n \quad i = 1, 2, \dots, 2n \\ x_i \neq x_j \quad \text{si } i \neq j \end{array} \right. . \quad (2)$$

También nos ocuparemos de la versión en congruencias de este problema, que enunciamos como sigue:

Problema 3 *Es posible marcar los vértices y los lados de un n -ágono con los enteros $1, 2, \dots, 2n$ de manera que la suma sobre cada lado sea la misma módulo $2n$?*

Formalmente deberemos resolver el sistema de ecuaciones en congruencias

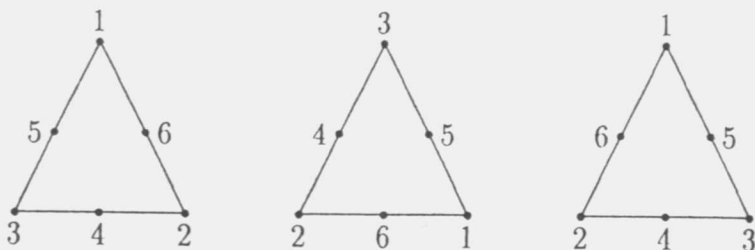
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \equiv s \pmod{2n} \\ x_3 + x_4 + x_5 \equiv s \pmod{2n} \\ \vdots \\ x_{2n-1} + x_{2n} + x_1 \equiv s \pmod{2n} \end{array} \right. , \quad (3)$$

donde $\{x_1, \dots, x_{2n}\}$ es un sistema completo de residuos módulo $2n$; en particular tomaremos

$$\begin{cases} 1 \leq x_i \leq 2n & i = 1, 2, \dots, 2n \\ x_i \neq x_j & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

A pesar de tratarse, como hemos dicho arriba, de problemas de naturaleza algebraica, su atractivo estético es fuerte y llamaremos *n*-*ágono mágico* a toda solución del Problema 2, en tanto que una solución del Problema 3 será denominada *n*-*ágono mágico en congruencias*. Obsérvese que todo *n*-*ágono mágico* es un *n*-*ágono en congruencias*. Para $n = 4$ esta terminología no está de acuerdo con lo que clásicamente se conoce como cuadrado mágico [1][2]; no obstante la mantendremos sin temor a confusión, o bien utilizaremos la palabra "clásico" para distinguirlo uno de otro.

Naturalmente, para los problemas anteriores puede formularse el correspondiente problema de enumeración de soluciones, es decir, el de determinar cuántas configuraciones diferentes existen en cada caso. Pero antes de "empezar a contar" debemos precisar qué se entiende por "configuraciones diferentes". Aquí viene a auxiliarnos el lenguaje geométrico: consideraremos a dos soluciones *S* y *T* del problema 2 (ó 3) como equivalentes cuando *T* pueda obtenerse de *S* a través de rotaciones y reflexiones. Por ejemplo los siguientes triángulos mágicos



serán considerados como uno solo. De forma más precisa, como el grupo de simetría de un *n*-*ágono regular* es el grupo diédrico de orden $2n$ (ver al respecto

el clásico libro de Coxeter [3], o el ameno artículo [15]), puede afirmarse que habrá $2n$ configuraciones equivalentes a una dada.

Una vez convenido el sentido de equivalencia entre polígonos mágicos planteamos, como corresponde, el problema de enumeración.

Problema 4 *Para cada $n \geq 3$ determinar el número de n -ágonos mágicos y el de n -ágonos mágicos en congruencias.*

Notaremos a dichos números con $sp(n)$ y $spc(n)$, respectivamente.

Hasta aquí los enunciados de los problemas que serán motivo de nuestro interés. Las secciones subsiguientes están dedicadas al análisis (más o menos feliz) de los mismos.

2 Existencia y enumeración

Entre otras cosas, en esta sección construiremos n -ágonos mágicos para cualquier $n \geq 3$ y mostraremos que $sp(n)$ es siempre un número par. Para comenzar tenemos el siguiente lema que establece restricciones sobre los valores que la suma lateral s puede asumir.

Lema 1. *Si el sistema (1) con las restricciones (2) admite soluciones, entonces*

$$\left\lceil \frac{5n+3}{2} \right\rceil \leq s \leq \left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor$$

Dem: Definiendo $V = \sum_{i \text{ impar}} x_i$ y $M = \sum_{i \text{ par}} x_i$, luego de sumar miembro a miembro las ecuaciones de (1) se obtiene

$$2V + M = ns;$$

por otra parte, de las restricciones (2) resulta

$$V + M = 1 + 2 + \dots + 2n = n(2n + 1).$$

De estas ecuaciones se obtiene

$$ns = V + n(2n + 1),$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1+2+\dots+n \leq V \leq (n+1)+(n+2)+\dots+2n = \frac{n(3n+1)}{2},$$

resulta finalmente que

$$\frac{5n+3}{2} \leq s \leq \frac{7n+3}{2}$$

con lo que se completa la prueba.

De la demostración anterior se deduce que la suma $V = \sum_{i \text{ impar}} x_i$ de los números asignados a los vértices y la suma $M = \sum_{i \text{ par}} x_i$ sobre los lados del polígono son ambas divisibles por n , es decir:

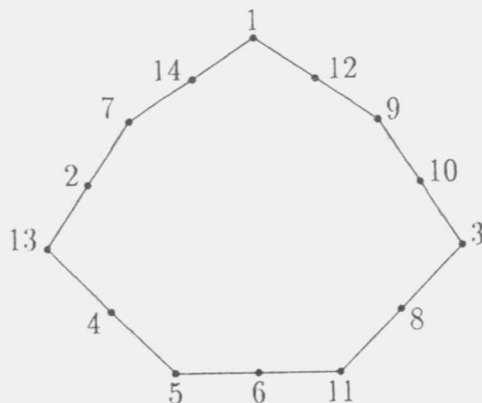
$$n \mid V \text{ y } n \mid M.$$

Hacia el final de la sección tendremos ocasión de aprovechar esta propiedad de los n -ágonos mágicos en relación al Problema 4.

La construcción de cuadrados mágicos "clásicos" es generalmente más difícil cuando n es par. Para el caso n impar existen métodos llamados de "recorrido continuo", en donde los naturales se disponen en sucesión recorriendo convenientemente las casillas del cuadrado. Buen ejemplo de esta clase de procedimiento es el método de *De la Loubère* [2][1] (según Rouse Ball, S. De la Loubère aprendió este método en Siam, donde fue enviado como diplomático por Luis XIV en 1687-1688).

El mismo papel juega la paridad de n en el problema de construcción de n -ágonos mágicos: para n impar existe una construcción asimilable a un recorrido sobre el polígono, en tanto que si n es par no parece haber nada tan sencillo. La solución propuesta a continuación para n impar se debe a Ricardo Ros

(UNCPBA, Tandil). Se cuenta que, confrontado con el problema, Ros dio su solución a poco de pensar en ello, en un "raptó de intuición". Su método consiste en asignar a los vértices los impares entre 1 y $2n$ empezando por un vértice cualquiera y recorriendo el polígono en una dirección, saltando un vértice por vez, hasta disponer todos los impares. Luego, en la misma dirección se disponen los pares sobre las aristas en forma consecutiva y decreciente empezando por $2n$ en la arista de vértices 1 y n . Como ejemplo, para el heptágono se encuentra



Verificación del método:

Definimos $(x_k)_{k=1, \dots, 2n}$ como la sucesión de valores sobre los vértices y aristas en forma ordenada, siendo x_1 un vértice. Se tiene entonces que $\{x_{2k+1} : k = 0, \dots, n-1\}$ son los valores sobre los vértices y $\{x_{2k} : k = 1, \dots, n\}$ son los valores sobre las aristas. Según el método de Ros estos valores están dados por las siguientes fórmulas

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_{4k+1} = 2k+1 & \text{para } k = 0, \dots, \frac{n-1}{2} \\ x_{4k+3} = n+2k+2 & \text{para } k = 0, \dots, \frac{n-3}{2} \\ x_{2j} = 2n-2j & \text{para } j = 1, \dots, n-1 \\ x_{2n} = 2n & \end{array} \right. \quad (5)$$

Verificaremos que se satisfacen las ecuaciones del sistema 1 con $s = 3n+1$. En las aristas con índices de la forma $4k+2$, $k = 0, \dots, \frac{n-3}{2}$,

tenemos

$$\begin{aligned}x_{4k+1} + x_{2(2k+1)} + x_{4k+3} &= 2k + 1 + 2n - 2(2k + 1) + n + 2k + 2 \\ &= 3n + 1 ;\end{aligned}$$

en las aristas con índices $4k + 4$, $k = 0, \dots, \frac{n-3}{2}$,

$$\begin{aligned}x_{4k+3} + x_{2(2k+2)} + x_{4(k+1)+1} &= n + 2k + 2 + 2n - 2(2k + 2) + 2(k + 1) + 1 \\ &= 3n + 1 ,\end{aligned}$$

y por último para la arista $2n$

$$x_{2n-1} + x_{2n} + x_1 = n + 2n + 1 = 3n + 1.$$

Las restricciones (2) se satisfacen trivialmente.

Como hemos dicho antes la construcción de n -ágonos mágicos cuando el número n de lados es par presenta mayor complejidad. A continuación exhibiremos una solución, con suma $s = \frac{5n}{2} + 2$, para $n > 6$, cuya forma dependerá de la paridad de $\frac{n}{2}$. Más adelante, en esta misma sección, listaremos todos los cuadrados mágicos; en la próxima, siguiendo ideas distintas, daremos soluciones para el caso $n = 6$, lo que nos permitirá asegurar la existencia de n -ágonos mágicos para cualquier n .

En una carta dirigida a uno de los autores, fechada el 27 de octubre de 1992, J.J. Araujo (UNCPBA, Tandil) ingeniosamente hace el siguiente razonamiento:

“Sea n par, y la suma sobre las aristas $5\frac{n}{2} + 2$, en este caso si la suma sobre los vértices y la suma sobre las aristas son V y M respectivamente, de las identidades

$$\begin{aligned}2V + M &= n\left(\frac{5n}{2} + 2\right) , \\ V + M &= n(2n + 1) ,\end{aligned}$$

se tiene

$$V = \frac{n(n+2)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + \frac{3n}{2}.$$

Se puede tratar de enumerar los vértices con los elementos $1, 2, \dots, n-1, \frac{3n}{2}$ en algún orden. Entre los números restantes, los más pequeños posibles son n y $n+1$ lo que obliga a poner antes y después de $\frac{3n}{2}$ a 1 y 2 y, sobre las aristas, a $n+1$ y n .

Los vértices entre 1 y 2 deben ser ocupados por $3, 4, \dots, n-1$, y las aristas por $n+2, n+3, \dots, \frac{3n}{2}-1, \frac{3n}{2}+1, \dots, 2n$. La suma de dos vértices consecutivos debe pertenecer al conjunto

$$\left\{ s - (n+2), s - (n+3), \dots, s - \left(\frac{3n}{2} - 1 \right), s - \left(\frac{3n}{2} + 1 \right), \dots, s - 2n \right\}$$

donde $s = \frac{5n}{2} + 2$. Este conjunto puede escribirse como

$$B = \left\{ \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 3, \dots, n+1, n+3, \dots, \frac{3n}{2} \right\}$$

En otras palabras debe reordenarse la sucesión $1, 2, \dots, n-1$, de modo tal que el primer elemento sea 1 , el último 2 y la suma de dos consecutivos llene el conjunto B .

La carta de Araujo finaliza con varios ejemplos en los que se advierte una cierta regularidad que depende de la paridad de $\frac{n}{2}$. Apoyándonos en su argumento damos ahora una fórmula general para obtener soluciones, seguida de algunos ejemplos de su aplicación. Escribimos x_i , $i = 1, \dots, 2n$, para denotar los valores sobre los vértices para i impar y los valores sobre las aristas para i par. Si $\frac{n}{2}$ es par tenemos

$$x_{4k+1} = \begin{cases} k+1 & \text{si } k = 0, \dots, \frac{n}{4} \\ k+2 & \text{si } k = \frac{n}{4} + 1, \dots, \frac{n}{2} - 1 \end{cases}$$

$$x_{4k+3} = \begin{cases} \frac{3}{2}n & \text{si } k = 0 \\ \frac{n}{2} + 1 + k & \text{si } k = 1, \dots, \frac{n}{4} - 2 \\ \frac{n}{4} + 2 & \text{si } k = \frac{n}{4} - 1 \\ \frac{n}{2} + k & \text{si } k = \frac{n}{4}, \dots, \frac{n}{2} - 1 \end{cases}$$

$$x_{2k} = \begin{cases} n+1 & \text{si } k = 1 \\ n & \text{si } k = 2 \\ 2n+1-k & \text{si } k = 3, \dots, \frac{n}{2} - 2 \\ 2n & \text{si } k = \frac{n}{2} - 1 \\ 2n-1 & \text{si } k = \frac{n}{2} \\ \frac{3}{2}n+1 & \text{si } k = \frac{n}{2} + 1 \\ 2n+1-k & \text{si } k = \frac{n}{2} + 2, \dots, n-1 \\ \frac{3}{2}n+2 & \text{si } k = n \end{cases}$$

y si $\frac{n}{2}$ es impar

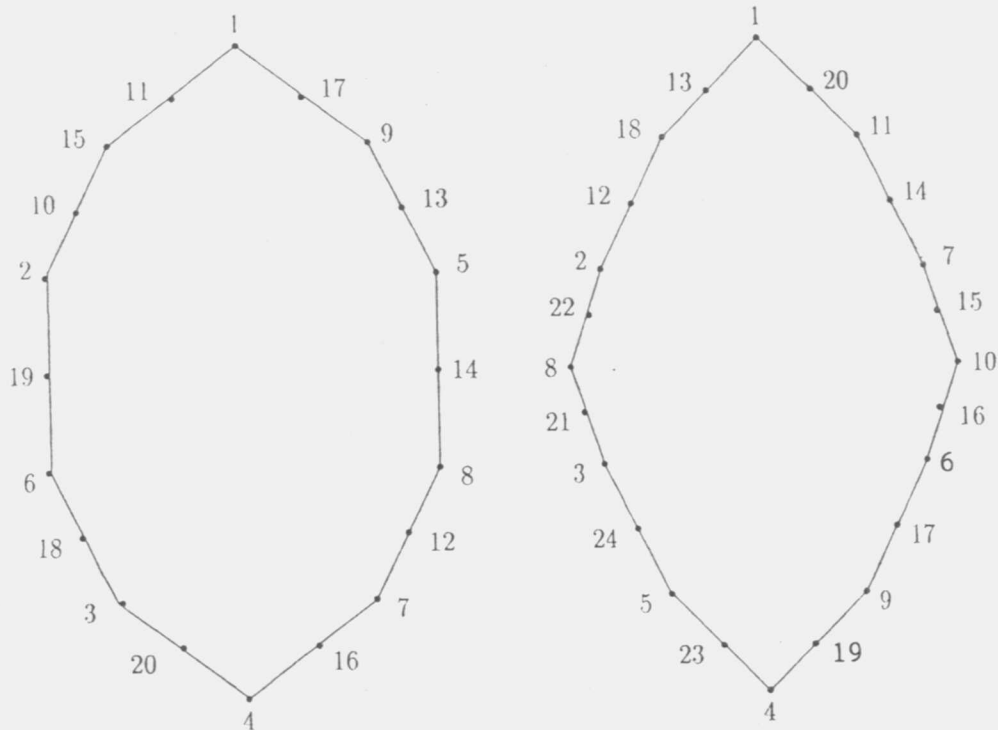
$$x_{4k+1} = \begin{cases} k+1 & \text{si } k = 0, \dots, \frac{n-2}{4} \\ \frac{3}{4}n - \frac{1}{2} & \text{si } k = \frac{n+2}{4} \\ k+1 & \text{si } k = \frac{n+6}{4}, \dots, \frac{n}{2} - 1 \end{cases}$$

$$x_{4k+3} = \begin{cases} \frac{3}{2}n & \text{si } k = 0 \\ \frac{n}{2} + k & \text{si } k = 1, \dots, \frac{n-6}{4} \\ \frac{n}{4} + \frac{3}{2} & \text{si } k = \frac{n-2}{4} \\ \frac{n}{2} + k & \text{si } k = \frac{n+2}{4}, \dots, \frac{n}{2} - 1 \end{cases}$$

$$x_{2k} = \begin{cases} n+1 & \text{si } k = 1 \\ n & \text{si } k = 2 \\ 2n+2-k & \text{si } k = 3, \dots, \frac{n}{2} - 1 \\ 2n & \text{si } k = \frac{n}{2} \\ \frac{3}{2}n+1 & \text{si } k = \frac{n}{2} + 1 \\ n+2 & \text{si } k = \frac{n}{2} + 2 \\ 2n+2-k & \text{si } k = \frac{n+6}{2}, \dots, n-1 \\ \frac{3}{2}n+2 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Observando atentamente la solución precedente se concluye que los números $1, 2, \dots, 2n$ han sido efectivamente dispuestos sobre vértices y aristas del n -ágono, cumpliéndose entonces las restricciones (2). Dejamos la verificación de que

la suma sobre las aristas es la indicada arriba como ejercicio ingrato para el animoso lector. Los menos animosos deberán conformarse con las figuras mostradas a continuación, en las cuales hemos ejemplificado las soluciones correspondientes al decágono y al dodecágono.



De lo expuesto hasta aquí se desprende que la cuestión planteada en el Problema 1 tiene respuesta positiva, hecho que recordaremos enunciando un teorema.

Teorema 1 *Existen n -ángonos mágicos para cualquier $n \geq 3$.*

Demostración: De las construcciones anteriores se deduce la veracidad del enunciado para $n \neq 4, 6$. Ejemplos de cuadrados y hexágonos mágicos serán vistos en lo que resta de esta sección y en la siguiente.

Ahora discutiremos someramente el problema de enumeración de n -ágonos mágicos. Como hemos indicado en la Introducción, existen cuatro triángulos mágicos esencialmente distintos; es decir, $sp(3) = 4$. El cálculo directo de cuadrados mágicos no es difícil, encontrándose que

$$(1, 8, 3, 7, 2, 4, 6, 5); (1, 7, 5, 2, 6, 3, 4, 8); (1, 4, 8, 3, 2, 6, 5, 7);$$

$$(1, 5, 8, 2, 4, 3, 7, 6); (3, 6, 5, 1, 8, 2, 4, 7); (3, 5, 7, 2, 6, 1, 8, 4),$$

es una lista de todos ellos, con lo que $sp(4) = 6$. No obstante, el número de n -ágonos mágicos parece aumentar rápidamente con n de manera que, si deseamos resolver el problema 4, deberemos emplear alguna idea distinta del cálculo exhaustivo. Por el momento no disponemos de una tal idea, pero un bello argumento (similar al que se emplea para probar que un grupo finito de orden par tiene al menos un elemento de orden dos, un caso particular del Teorema de Cauchy, ver ejercicio 11, pág. 44, de [10]), permite obtener el siguiente resultado.

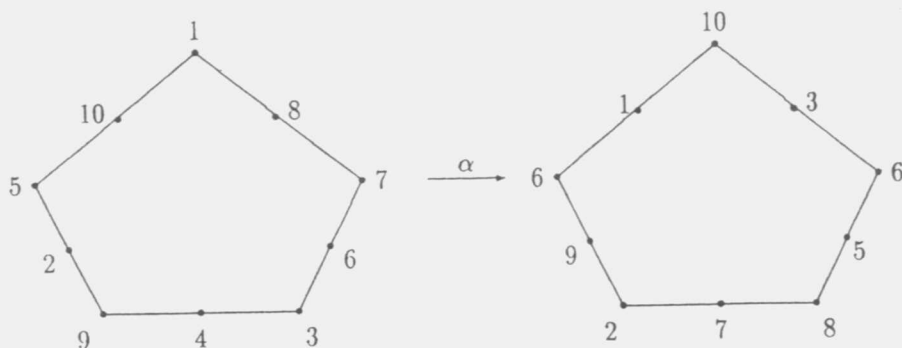
Teorema 2 $sp(n)$ es un número par.

Dem.: Si $SP(n)$ denota al conjunto de los n -ágonos mágicos y $X = (x_i)_{i=1}^{2n} \in SP(n)$, la aplicación $\alpha : SP(n) \rightarrow SP(n)$ definida por $\alpha(X) = Y = (y_i)_{i=1}^{2n}$ donde $y_i = 2n + 1 - x_i$, satisface $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha = 1_{SP(n)}$ y $\alpha(X) \neq X$ para cada $X \in SP(n)$. En efecto, indicando con s a la suma lateral que corresponde a X , se encuentra fácilmente que la suma lateral correspondiente a $Y = \alpha(X)$ es $s^* = 3(2n + 1) - s \neq s$ (puesto que si $s^* = s$ resultaría $2s = 3(2n + 1)$, absurdo). Esto muestra que $\alpha(X) \neq X$. Que $\alpha^2 = 1_{SP(n)}$ es inmediato de la definición de α .

Ahora bien, si S es un conjunto finito, la existencia de una función γ sobre S que verifique las propiedades anteriores es equivalente a

la afirmación de que S contiene un número par de elementos. Esto puede comprobarse fácilmente observando que γ permite entonces partir a S en dos conjuntos de igual cardinalidad (la recíproca es obvia). Esto completa la prueba.

A continuación, a través de un ejemplo mostramos cómo "funciona" la aplicación α definida en la demostración anterior.



Dado un n -ágono mágico con suma lateral s , con ayuda de la aplicación α podemos fácilmente obtener otro distinto con suma lateral $s^* = 3(2n + 1) - s$. Esta cualidad de α merece resaltarse en vista de la dificultad en construir n -ágonos mágicos. Sería sumamente interesante encontrar otras funciones, digamos β , sobre $SP(n)$ que cumplan con la condición $\beta(X) \neq X$ para cada $X \in SP(n)$: ello permitiría obtener nuevos n -ágonos de otros ya conocidos. Hacemos notar de paso que la equivalencia entre la divisibilidad por un entero k del cardinal de un conjunto finito S y la existencia de funciones sobre S que satisfacen ciertas propiedades es un argumento poderoso en muchas situaciones, algunas de las cuales pueden verse en [9].

Si X es un n -ágono mágico y V, M indican respectivamente la suma sobre los vértices y aristas de X , fue observado arriba que $n \mid V$ y $n \mid M$. Finalizaremos

esta sección utilizando esta propiedad para obtener cotas superiores para $sp(n)$ y plantear nuevos y desafiantes problemas.

Una vez asignados a los vértices del n -ágono n naturales entre 1 y $2n$ y fijada una suma admisible s , las ecuaciones (1) determinarán unívocamente los valores sobre las aristas. En general estos números no cumplirán con las restricciones (2), pero si lo hacen habremos encontrado de ese modo un n -ágono mágico. En todo caso, nos damos cuenta que no existen más n -ágonos mágicos que combinaciones de n números $\{x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}\}$ del conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$ cuya suma $\sum_{i \text{ impar}} x_i$ sea divisible por n , por lo que este número de combinaciones es cota superior para $sp(n)$. Aprovechamos la ocasión para generalizar el cálculo de dicho número de combinaciones, planteando el siguiente

Problema 5 Sean n, p, m y r enteros no negativos con $n \geq p$ y $m > r$. Determinar el número de combinaciones p -arias del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ tales que la suma de sus elementos sea congruente con r módulo m .

Indicando con $csd(n, p, m, r)$ a dicho número, de la discusión anterior resulta

$$cs(n) \leq csd(2n, n, n, 0),$$

pero esta cota, aunque algo más precisa que escribir $cs(n) \leq \binom{2n}{n}$, sigue siendo burda. El lector interesado podrá, a poco de pensar en el problema, obtener acotaciones más ajustadas.

3 Configuraciones en congruencias: un método lulliano.

Hasta ahora hemos utilizado para la obtención de n -ágonos mágicos solo la estructura aditiva de los números naturales. En esta sección veremos que también la estructura multiplicativa puede usarse para resolver, o al menos para facilitar la solución del problema en congruencias. En conexión con los cuadrados

mágicos clásicos, este orden de ideas ha sido explorado en [4]. A grandes rasgos, el procedimiento consiste en obtener ciertas configuraciones más simples y disponerlas sobre n -ágonos concéntricos; haciéndolos girar unos sobre otros y sumando los valores sobre cada uno de los radios correspondientes a vértices y puntos medios puede conseguirse un n -ágono en congruencias con suma lateral especificada de antemano.

Este método francamente recuerda al empleado por Ramón Lull —hombre singular de la alta edad media española—, quien en su "Ars Magna" utiliza círculos concéntricos giratorios como dispositivo combinatorio con la finalidad de "colocar a la apologética Cristiana sobre una base racional para su uso en las disputas contra los Musulmanes" (cfr. la biografía ofrecida por Pring-Mill en [13]). En [6] Martin Gardner hace una descripción pintoresca de la personalidad y de la obra de Lull, de la cual extraemos un breve párrafo referente a su método combinatorio:

"Un tercer método, del cual Lull se sentía muy ufano, consista en situar dos o más conjuntos de términos en círculos concéntricos... Haciendo girar el círculo interior obtenemos fácilmente una tabla de combinaciones. Cuando haya muchos sistemas de términos para combinar, este método mecánico es mucho más eficiente que los otros. En tiempos de Lull, los círculos se hacían de pergamino o metal, y se pintaban de vivos colores para distinguir las diferentes subdivisiones de los términos. No cabe duda de que al utilizar estos extraños y multicolores artilugios se creaba una impresionante aureola de misterio en torno a las enseñanzas de Lull, que debían dejar profundamente intrigados a hombres de pocas luces, ansiosos de dar con un atajo que les permitiera dominar las intrincadas complejidades del escolasticismo..."

Lull compuso su Ars Magna alrededor del año 1273, después de haber ex-

perimentado cierta "iluminación mística" en la cima del monte Randa en Mallorca. Menos místicos que él y menos iluminados, a continuación describimos cómo pueden utilizarse los "círculos concéntricos giratorios" para calcular configuraciones en congruencias. Consideremos para ello la factorización prima de $2n$,

$$2n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

y sea s la suma constante del sistema (1). Para cada $i = 1, 2, \dots, k$ sea $1 \leq s_i \leq p_i^{\alpha_i}$ tal que $s_i \equiv s \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Supongamos que para cada uno de tales i hemos construido una configuración n -gonal de suma lateral s_i ; donde los valores asignados son los enteros $1, 2, \dots, p_i^{\alpha_i}$, cada uno repetido exactamente $2n/p_i^{\alpha_i}$ veces. Llamaremos a éstas n -ágonos primitivos. Ubiquemos concéntricamente los n -ágonos primitivos; por ejemplo, de manera que los radios de los polígonos crezcan según crece i . De este modo, a cada radio y apotema le queda asignada una k -upla de números $(n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_k})$, tal que $1 \leq n_{i_j} \leq p_j^{\alpha_j}$. Imaginemos ahora que el conjunto de n -ágonos primitivos constituye un dispositivo lulliano; es decir, es posible rotar sobre su centro común y de manera independiente a cada uno de ellos. Más aún, supongamos que girando los polígonos logramos conseguir que ninguna de las k -uplas $(n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_k})$ se repita. Por el Teorema Chino del residuo (ver [12],[8]) las k congruencias simultáneas

$$\begin{cases} x_i \equiv n_{i_1} \pmod{p_1^{\alpha_1}} \\ x_i \equiv n_{i_2} \pmod{p_2^{\alpha_2}} \\ \vdots \\ x_i \equiv n_{i_k} \pmod{p_k^{\alpha_k}} \end{cases}, \quad (6)$$

admiten solución para cada $i = 1, \dots, 2n$. Además, el mismo teorema asegura que dos soluciones distintas de (6) son congruentes módulo $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = 2n$; de aquí se desprende que, para cada $i = 1, 2, \dots, 2n$, existe una única solución y_i de (6) comprendida entre 1 y $2n$. Afirmamos que la configuración $C = (y_i)_{i=1}^{2n}$ es un n -ágono mágico en congruencias; i.e., es solución del problema 3 del la

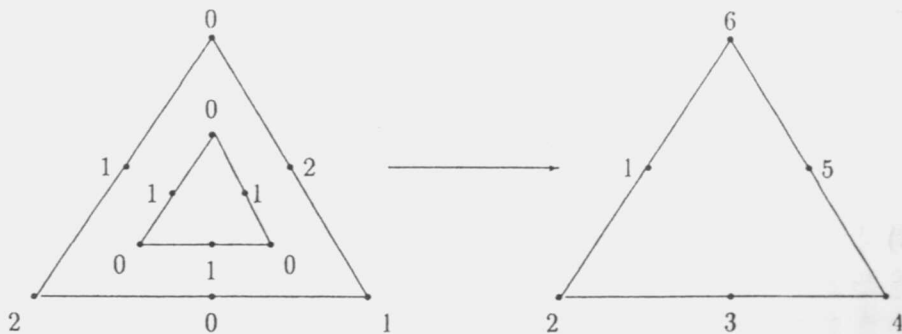
primera sección. En efecto, los y_i son dos a dos distintos pues corresponden a k -uplas distintas. Como además $1 \leq y_i \leq 2n$ deducimos que las restricciones (4) son satisfechas. De la construcción efectuada resulta que la suma de los y_i correspondientes a una arista es congruente con $s_j \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ para cada $j = 1, 2, \dots, k$, y por tanto congruente con $s \pmod{2n}$. Hemos comprobado así que el sistema de ecuaciones en congruencias (3) también es satisfecho por C .

Con el fin de calcular efectivamente n -ágonos mágicos en congruencias, es útil conocer la solución general del sistema (6), dada por (cfr. [12],[8]),

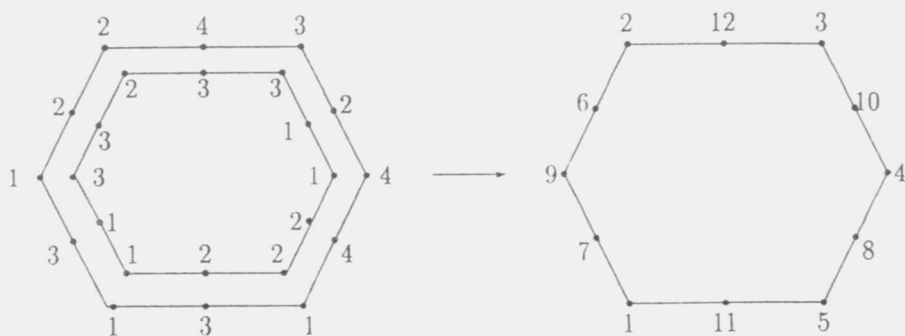
$$x_i = \sum_{j=1}^k \frac{2n}{p_j^{\alpha_j}} n_j b_j + 2n,$$

donde cada b_j es a su vez solución de $(2n/p_j^{\alpha_j}) b_j \equiv 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$, (siempre existente, puesto que $2n/p_j^{\alpha_j}$ y $p_j^{\alpha_j}$ son coprimos).

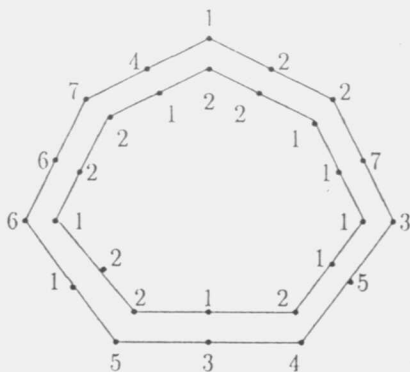
Damos fin a esta sección haciendo algunas observaciones y exhibiendo ejemplos del procedimiento descrito. Notemos primeramente que el método desarrollado se vuelve particularmente sencillo cuando n es primo, pues entonces resultan solo dos polígonos, pudiéndose rotar el polígono interior. A continuación mostramos distintos ejemplos de configuraciones en congruencias que han sido construidos siguiendo el procedimiento lulliano. Comenzamos con el más simple de ellos:



Una vez obtenida una configuración "lulliana" en congruencias puede muy bien ocurrir, cuando su suma lateral s sea una suma admisible (i.e., cumple con las restricciones del Lema 1), que resulte también una configuración estándar. El hexágono mágico siguiente ejemplifica tal situación y a la vez proporciona el ejemplo necesario para completar la prueba del teorema que asegura la existencia de n -ágonos mágicos de la sección anterior.



No obstante puede ocurrir que, para un sistema dado de configuraciones primitivas, ninguna de las rotaciones conduzca a un configuración estándar. Más problemático es el hecho de que no siempre la rotación de las configuraciones primitivas hace que las k -uplas $(n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_k})$ que marcan los radios y las apotemas de los polígonos sean distintas entre sí, lo cual puede comprobarse girando el heptágono interior en la siguiente figura:



El lector interesado en la vida y obra de Ramón Lull, puede consultar, además de las obras citadas, el excelente libro [14]

4 Conclusión

Por si lo expuesto hasta aquí pareciera poco, a continuación mostraremos que los problemas que hemos considerado pueden todavía generalizarse. Con este fin podríamos plantear un sistema de ecuaciones diofantinas como (1) asociado a un grafo G cualquiera. As, si $V = \{v_i : i = 1, \dots, n\}$ es el conjunto de vértices y A el conjunto de aristas de G , se trata de resolver el siguiente sistema de ecuaciones diofantinas

$$x_i + x_j + x_{ij} = s \quad , \quad \overline{v_i v_j} \in A, \quad (7)$$

donde x_i son los valores asignados a los vértices, x_{ij} los asignados a las aristas y s la suma sobre las aristas, sujeto a la condición de que x_i y x_{ij} asuman valores distintos entre los enteros 1 y $|V| + |A|$. Como veremos a continuación, no cabe esperar la existencia de soluciones del problema enunciado con esta generalidad, de manera que aparece naturalmente la cuestión de caracterizar la clase de grafos para los que existe solución. En la sección 2 vimos que cuando G es el n -ciclo siempre existen soluciones; la situación es distinta cuando G es el grafo completo de orden 4 (K_4): mediante un razonamiento similar al usado en la prueba del Lema 1 concluiremos que no existe solución para este grafo. Para K_4 corresponde estudiar el sistema diofantino

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_{12} + x_2 = s \\ x_1 + x_{13} + x_3 = s \\ x_1 + x_{14} + x_4 = s \\ x_2 + x_{23} + x_3 = s \\ x_2 + x_{24} + x_4 = s \\ x_3 + x_{34} + x_4 = s \end{array} \right. , \quad (8)$$

sujeto a las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} 1 \leq x_i, x_{ij} \leq 10 & 1 \leq i, j \leq 4 \\ x_i \neq x_j, x_i \neq x_{kl}, x_{ij} \neq x_{kl} \end{cases} \quad (9)$$

Sumando las ecuaciones de (8), obtenemos

$$3 \sum x_i + \sum x_{ij} = 6s;$$

mientras que de las restricciones (9) resulta

$$\sum x_i + \sum x_{ij} = 1 + 2 + \dots + 10 = 55.$$

Restando miembro a miembro estas ecuaciones obtenemos

$$2(3s - \sum x_i) = 55,$$

imposible dado que s y $\sum x_i$ son números enteros. Esto prueba que, como afirmamos anteriormente, no existe solución para K_4 .

A diferencia de lo que sucede con K_4 , existen otros grafos para los cuales el problema que hemos planteado admite solución; más aún es posible resolverlo de manera sencilla y enumerar además las soluciones. Un buen ejemplo es el caso en que G es una "estrella"; es decir, el grafo $G = (V, A)$ con $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $A = \{\overline{v_0v_1}, \overline{v_0v_2}, \dots, \overline{v_0v_n}\}$, para el cual el problema 1 se escribe

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_{01} = s \\ x_0 + x_2 + x_{02} = s \\ \vdots \\ x_0 + x_n + x_{0n} = s \end{cases}, \quad (10)$$

con las restricciones correspondientes. Sumando miembro a miembro las ecuaciones se obtiene

$$n x_0 + \sum x_i + \sum x_{0i} = n s, \quad (11)$$

y de las restricciones se deduce

$$x_0 + \sum x_i + \sum x_{0i} = 1 + 2 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)(2n + 1). \quad (12)$$

Restando (11) de (12) resulta la ecuación diofantina lineal

$$n s - (n - 1) x_0 = (n + 1)(2n + 1),$$

cuya solución general viene dada por [12],[8]

$$\begin{cases} x_0 = (n + 1)(2n + 1) - k n \\ s = (n + 1)(2n + 1) - k(n - 1) \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta una vez más las restricciones impuestas, debe verificarse $1 \leq x_0 \leq 2n + 1$, y por lo tanto sólo interesan las soluciones

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ s = 2n + 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = n + 1 \\ s = 3n + 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = 2n + 1 \\ s = 4n + 2 \end{cases}. \quad (13)$$

Para estos valores de x_0 y s el sistema (10) con las correspondientes restricciones puede admitir solución. Veamos que así ocurre efectivamente para $x_0 = 1$ y $s = 2n + 4$. Para ello sustituimos x_0 y s en (10), obteniendo de este modo el nuevo sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_{01} = 2n + 3 \\ x_2 + x_{02} = 2n + 3 \\ \vdots \\ x_n + x_{0n} = 2n + 3 \end{cases}, \quad (14)$$

el cual admite, por ejemplo, la solución $x_i = i + 1, x_{0i} = 2n + 2 - i$ para $i = 1, \dots, n$ que verifica también las restricciones impuestas. Los casos restantes se resuelven de manera análoga.

Respecto del problema de enumeración de las soluciones (problema 5) deberemos previamente, como en el caso en que G es un polígono (n -ciclo), acordar en

qué sentido consideraremos distintas dos de ellas. Para la estrella, por ejemplo, sólo existen tres soluciones cuando se adopta un criterio algebraico de equivalencia, correspondiendo cada una de ellas a los valores de x_0 y s dados por (13). En cambio, si se consideran distintas las soluciones cuando en una arista se permutan los valores del vértice y la arista, aparecen 2^n nuevas soluciones por cada una de las que teníamos, lo que da un total $3 \cdot 2^n$ soluciones.

Pondremos fin a esta sección (y al trabajo!) mencionando todavía algunos casos notables y variaciones de los problemas que hemos tratado. En el capítulo 5 de [7] M. Gardner refiere algunas variantes interesantes del Problema 7: estrellas y poliedros mágicos. En su monumental obra [5](Vol. II, pg.705) L.E. Dickson nos ilustra sobre un problema resuelto a fines del siglo pasado por E. Cesàro, que presenta cierto parecido con los que hemos venido estudiado y, sobre todo, señala una nueva dirección de generalización: pasar de ecuaciones lineales a no lineales. Específicamente, se trata de encontrar una permutación x_1, x_2, \dots, x_9 de los números $1, 2, \dots, 9$ tal que las siguientes ecuaciones sean satisfechas

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 = x_7^2 + x_8^2 + x_9^2 + x_1^2.$$

Obsérvese que las tres cuaternas de números pueden ubicarse sobre los lados de un triángulo con x_1, x_4, x_7 como vértices. La solución es $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 9, x_4 = 5, x_5 = 1, x_6 = 6, x_7 = 8, x_8 = 3, x_9 = 7$.

A esta altura, estimamos que no será difícil para el lector continuar por si mismo el proceso de generar más y más problemas "insalubres" emparentados con los anteriores. Con el último suspiro obsequiamos al lector con una solución del problema 2 para el caso del polígono de 100 lados.

{1, 152, 99, 102, 51, 103, 98, 104, 50, 105, 97, 106, 49, 107, 96, 108, 48, 109, 95, 110, 47, 111, 94, 112, 46, 113, 93, 114, 45, 115, 92, 116, 44, 117, 91, 118, 43, 119, 90, 120, 42, 121, 89, 122, 41, 123, 88, 124, 40, 125, 87, 126, 39, 127, 86, 128, 38, 129, 85, 130, 37, 131, 84, 132, 36, 133, 83, 134, 35, 135, 82, 136, 34, 137, 81, 138, 33, 139, 80, 140, 32, 141, 79, 142, 31, 143, 78, 144, 30, 145, 77, 146, 29, 147, 76, 148, 28, 149, 75, 151, 26, 199, 27, 200, 25, 153, 74, 154, 24, 155, 73, 156, 23, 157, 72, 158, 22, 159, 71, 160, 21, 161, 70, 162, 20, 163, 69, 164, 19, 165, 68, 166, 18, 167, 67, 168, 17, 169, 66, 170, 16, 171, 65, 172, 15, 173, 64, 174, 14, 175, 63, 176, 13, 177, 62, 178, 12, 179, 61, 180, 11, 181, 60, 182, 10, 183, 59, 184, 9, 185, 58, 186, 8, 187, 57, 188, 7, 189, 56, 190, 6, 191, 55, 192, 5, 193, 54, 194, 4, 195, 53, 196, 3, 197, 52, 198, 2, 100, 150, 101}.

5 Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias a la colaboración de distintos colegas, y a la cuidadosa revisión del referee, lo que no siempre ha quedado explícitamente reflejado en sus páginas. Expresamos a ellos nuestro especial reconocimiento. La versión \TeX del manuscrito se preparó en el Laboratorio de Matemática "Dr. Luis A. Santaló" del Instituto Politécnico de Rosario.

References

- [1] W. Rouse Ball, "*Mathematical recreations and essays*", MacMillan, London, 1967.
- [2] G. Berman, K.D. Fryer, "*Introduction to combinatorics*", Academic Press, New York, 1972.

- [3] H.S.M. Coxeter, "*Fundamentos de geometría*", Limusa-Wiley, Mexico, 1971.
- [4] G.L. Chia, "*A construction for magic squares of composite order*", *Mene-mui Matematik (Discovering Mathematics)* 11, No. 1, 1989, pp. 1-9.
- [5] L.E. Dickson, "*History of theory of numbers*", Vol II, "Diophantine Analysis", Chelsea Publishing Company, New York, 1952.
- [6] M. Gardner, "*Máquinas y diagramas lógicos*", Alianza, Madrid, 1985.
- [7] M. Gardner, "*Mathematical carnival*", MAA, Washington, 1989.
- [8] E. Gentile, "*Aritmética elemental*", Monografía No. 25, OEA, Washington, 1985.
- [9] M. Hausner, "*Applications of a simple counting technique*", *Amer. Math. Monthly* 90, No.2, 1983, pp.127-129.
- [10] I. Herstein, "*Álgebra moderna*", Ed. Trillas, México, 1979.
- [11] "*Muy Interesante*" No. 68, Junio, 1991.
- [12] I. Niven, H. Zuckerman, "*An introduction to the theory of numbers*", John Wiley & Sons, New York, 1960, (Existe traducción castellana).
- [13] Pring-Mill, "*Dictionary of scientific biographies*" Gillispie(Ed.) , New York, 1978.
- [14] G. Sarton, "*Seis alas*", EUDEBA, Bs.Aires, 1978.
- [15] G. Thorbergsson, "*Grupos de reflexões*", *Matemática Universitaria* No.11, junho de 1990, pp.15-26.

* Instituto de Matemática Beppo Levi. Av. Pellegrini 250 - 2000-Rosario.

** Instituto Politécnico Superior General San Martín. Av. Pelegrini 250 - 2000-Rosario.