Forma canónica de Jordan

R. J. Miatello *M.I. Pacharoni*

1 Introducción

Para resolver problemas relacionados con una matriz u operador lineal A, es importante poder reducir A a una forma sencilla, mediante un conveniente cambio de base. Uno desearía, en lo posible, llevar A a forma diagonal, pero no toda matriz es diagonalizable. Sin embargo el matemático francés C. Jordan demostró que siempre es posible, mediante un cambio de base, representar A por medio de una matriz triangular superior, con bloques de una forma particular sencilla. Esta matriz especial, unívocamente asociada a cada matriz compleja A es la llamada forma de Jordan de A.

Además de la gran importancia teórica de la forma de Jordan, el conocerla explícitamente es útil en muchos problemas matemáticos, por ejemplo, para resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales del tipo $X' = AX$.

El objeto de este trabajo es dar un método efectivo para hallar la forma de Jordan de A, suponiendo conocidos sus autovalores, y presentar una variedad de ejemplos ilustrativos.

2 Preliminares

Esta sección será dedicada a fijar notación y a introducir ciertas nociones básicas del álgebra lineal.

Sea A una matriz compleja $n \times n$. Se dice que un número complejo λ es un *autovalor* de A si existe un vector $v \in \mathbf{C}^n$, no nulo tal que $Av = \lambda v$. Un *autovector* o *vector propio* de A asociado al autovalor λ es un vector v, tal que $Av = \lambda v$.

Se llama *polinomio característico* de A al polinomio

$p_A(x) = det(xI - A) = (x - \lambda_1)^{q_1} \cdots (x - \lambda_r)^{q_r}$.

Es claro que λ es un autovalor de A si y sólo si λ es raíz del polinomio característico de A. Se llama a q_j la *multiplicidad* del autovalor λ_j.

Dos matrices A y B se dicen *semejantes* si existe una matriz P inversible, tal que $A = PBP^{-1}$.

Es inmediato que matrices semejantes tienen igual polinomio característico. En efecto, si $A = PBP^{-1}$ entonces $p_A(x) = det(xI - A) = det(P(xI - B)P^{-1}) = det(P)det(xI - B)det(P)^{-1} = det(xI - B) = p_B(x)$.

Es claro que la recíproca no es válida. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son matrices no semejantes entre sí, y el polinomio característico de ambas es igual a $(x - 1)^2$.

Un conjunto de vectores de $\mathbf{C}^n$, $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ se dice *linealmente dependiente* si existen $c_1, c_2, ..., c_r$ números complejos, no todos nulos, tales que $c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_r v_r = 0$. Un conjunto de vectores que no es linealmente dependiente, se dice *linealmente independiente.* Una *base* de $\mathbf{C}^n$ es un conjunto de vectores linealmente independiente maximal. Se prueba que tal conjunto posee siempre n elementos y se llama a n la *dimensión* de $\mathbf{C}^n$.

Dada una matriz A, se llama *núcleo de* A al conjunto de los vectores $v \in \mathbf{C}^n$ tales que $Av = 0$ y se denota por $\ker A$. Se llama *imagen de* A al conjunto $Im(A) = \{Av \mid v \in \mathbf{C}^n\}$.

Un hecho importante del álgebra lineal es el siguiente

Teorema 2.1 *Para toda matriz* A, *es* $\dim Im(A) + \dim \ker(A) = n$.

La dimensión de la imagen de A se llama el *rango* de A (se denota por $r(A)$). La *nulidad* de A es la dimensión del núcleo de A. Llamaremos *rango* *fila* (o *rango columna*) de A a la cantidad de filas (o columnas) linealmente independientes. Se prueba que el rango fila de una matriz A, coincide con el rango columna y con el rango de la matriz.

Una matriz A se dice *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal. Es fácil ver que A es diagonalizable si y sólo si existe una base de $\mathbf{C}^n$ formada por vectores propios de A. En efecto, si A es diagonalizable existe M una matriz inversible tal que $M^{-1}AM$ es diagonal y los vectores columnas de M forman la base de autovectores buscada. Recíprocamente, si existe una base de autovectores de A, $\{v_1, \cdots, v_n\}$ tomamos por M la matriz cuyas columnas son los v_j y se verifica fácilmente que $M^{-1}AM$ es diagonal.

Observemos que no toda matriz compleja es diagonalizable. Por ejemplo, si tomamos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos que el polinomio característico de A es $(x-1)^2$, luego el único autovalor de A es $\lambda = 1$. Ahora bien, si $v \in \mathbf{C}^2$ satisface $Av = v$ resulta $v = (c, 0)$, con $c \in \mathbf{C}$, por lo tanto es claro que no puede existir una base de vectores propios de A.

En general se prueba que, mediante un adecuado cambio de base, se puede llevar A a una matriz a bloques triangulares, uno para cada autovalor λ_j. Es decir A es semejante a una matriz del tipo

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad A_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

Sea $p_A(x) = (x - \lambda_1)^{q_1} \ldots . (x - \lambda_r)^{q_r}$ el polinomio característico de A. Se llama *espacio característico asociado a* λ_j al espacio

$$V_j = \ker(A - \lambda_j I)^{q_j}.$$

Notemos que la parte de la base $\mathcal{B}_j$ de $\mathbf{C}^n$ correspondiente al bloque j genera el espacio característico V_j asociado a λ_j, es decir A_j es la matriz de la restricción de A a V_j, pensada como operador lineal.

3 La forma de Jordan

En esta sección describiremos un método efectivo para determinar la matriz de Jordan de una matriz dada A.

Definicion 3.1 *Una matriz de Jordan J es una matriz de la forma*

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{bmatrix} \quad \textit{donde } J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Cada bloque J_i se llama bloque elemental de Jordan, de autovalor λ_i.

Teorema 3.2 (Jordan) *Toda matriz A es semejante a una matriz de Jordan J. Esta matriz J es única salvo por una permutación de los bloques.*

En relación a la unicidad observamos que por ejemplo

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son tres matrices de Jordan que son semejantes entre sí, pues basta hacer un cambio de base permutando adecuadamente los vectores, para transformar una matriz en la otra. Por ejemplo, se obtiene $S\,J_1\,S^{-1} = J_3$, tomando $S=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En adelante supondremos conocidos los autovalores de A y sus multiplicidades, o sea el conjunto $\{(\lambda_i, q_i) : 1 \leq i \leq r\}$. En primer lugar determinaremos el número de matrices de Jordan, no semejantes entre sí, con los mismos autovalores que A e igual multiplicidad.

Llamemos $p(n)$ a la cantidad de *particiones de un número* n, esto es la cantidad de r-uplas $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ con $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_r$ y $n = k_1+k_2+\cdots+k_r$.

Si λ_j es autovalor de A de multiplicidad q_j, a cada partición $q_j = k_1 + k_2 + \cdots + k_{m_j}$ con $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_{m_j}$ $(1 \leq j \leq r)$, le hacemos corresponder la matriz de Jordan J con bloques elementales de Jordan con autovalor λ_j y de lados $k_1, k_2, \ldots, k_{m_j}$ respectivamente.

Por ejemplo, si $n = 5$ y A tiene un único autovalor $\lambda = 1$, a la particion $5 = 2 + 2 + 1$ le hacemos corresponder la matriz de Jordan J con dos bloques de Jordan de lado 2 y uno de lado 1, o sea

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es simple de verificar que este procedimiento permite obtener todas las posibles matrices de Jordan, conocidos los autovalores y sus multiplicidades. En efecto, para cualquier matriz en forma de Jordan, el bloque asociado al autovalor λ_j estará formado por bloques elementales de lado $k_1, \ldots, k_{m_j}$ y reordenando, si es necesario, podemos suponer que $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_r$. Así para cada j la partición que se le asocia a q_j es $q_j = k_1 + k_2 + \cdots + k_{m_j}$.

Dejaremos para más adelante la verificación de que a particiones distintas corresponden matrices no semejantes entre sí (ver Corolario 3.5).

Tenemos de este modo el siguiente teorema

Teorema 3.3 *Dada una matriz A con autovalores $\{\lambda_j, q_j\}_{j=1}^{r}$, el número total de matrices de Jordan no semejantes entre sí es $p(q_1).\, p(q_2)\dots p(q_r)$*

Por ejemplo, si la matriz A tiene un único autovalor de multiplicidad n, las distintas formas de Jordan están descriptas en la siguiente tabla, si $2 \leq n \leq 5$.

n	$p(n)$							
2	2	2	1 + 1					
3	3	3	2 + 1	1 + 1 + 1				
4	5	4	3 + 1	2 + 2	2 + 1 + 1	1 + 1 + 1 + 1		
5	7	5	4 + 1	3 + 2	3 + 1 + 1	2 + 2 + 1	2 + 1 + 1 + 1	1 + 1 + 1 + 1 + 1
$\vdots$	$\vdots$							

Dada una matriz A y suponiendo conocidos los autovalores λ_j y sus multiplicidades q_j, el objetivo de este trabajo será describir un método para encontrar la forma de Jordan J de A. Es importante observar que con frecuencia es necesario conocer, además de J, una matriz P de cambio de base, de modo que $A = PJP^{-1}$. Si bien esto es también posible, la determinación efectiva de P no será tratada en este artículo.

Para hallar la forma de Jordan J de A hay que determinar, para cada autovalor λ_j de A y cada número k, la cantidad $n_k(\lambda_j)$ de bloques elementales de Jordan de J de lado k asociados a λ_j. Este conjunto de números determina la matriz J (salvo por el orden de los bloques). Es decir, conocer el conjunto $\{n_k(\lambda_j) : 1 \leq j \leq r,\ k = 1, 2, 3 ...\}$ es lo mismo que conocer la matriz J.

Para cada autovalor λ, si $1 \leq j \leq n$, $n = n(\lambda)$, definimos

$$d_j(\lambda) = \dim\ \ker(A - \lambda I)^j \qquad (1)$$

Observamos en primer lugar que si S es inversible y $A' = SAS^{-1}$, para todo $j = 1, \dots n$ vale $(A' - \lambda I)^j = S(A - \lambda I)^j S^{-1}$, luego $\ker(A' - \lambda I)^j =$

$S\,(\ker(A - \lambda I)^j)$. Como S es no singular, es claro que $\dim\ker(A' - \lambda I)^j = \dim\ker(A - \lambda I)^j$, si $1 \leq j \leq n$. Esto demuestra que si A y A' son semejantes y λ es un autovalor de A (y por lo tanto de A'), los números $d_j(\lambda)$ son los mismos para A y A'.

Nuestro objetivo principal será probar que recíprocamente, los $\{d_j(\lambda)\}$ determinan la matriz J salvo semejanza, es decir, que bastará calcular todos los números $d_i(\lambda)$ para conocer exactamente la matriz de Jordan de A.

Dada una matriz de Jordan, para cada autovalor λ de multiplicidad q, llamemos $n'_j(\lambda)$ a la cantidad de bloques elementales de Jordan correspondientes a λ, de lado mayor o igual que j (si $1 \leq j \leq q_\lambda$).

Sea como anteriormente $n_j(\lambda)$ la cantidad de bloques elementales de Jordan de lado j, y sea k_λ el tamaño del mayor bloque elemental de Jordan correspondiente a λ, que aparece en J. Surgen de inmediato las siguientes observaciones:

(i) Los números $n_j(\lambda)$, con $j = 1, ..., k_\lambda$, determinan la matriz de Jordan J, salvo por el orden de los bloques.

(ii) $n'_1(\lambda)$ es igual a la cantidad total de bloques elementales de Jordan correspondientes a λ, que tiene la matriz J.

(iii) Se tiene que $k_\lambda = q$ si y sólo si hay un único bloque de Jordan, asociado a λ. Además, $k_\lambda = 1$ para todo autovalor λ, si y sólo si J es diagonal, o sea, si y sólo si hay n bloques elementales de Jordan.

(iv) Los números $n_j(\lambda)$ y $n'_j(\lambda)$ están relacionados del siguiente modo

$$\begin{aligned}
n_1(\lambda) &= n'_1(\lambda) - n'_2(\lambda) \\
n_2(\lambda) &= n'_2(\lambda) - n'_3(\lambda) \\
&\vdots \\
n_j(\lambda) &= n'_j(\lambda) - n'_{j+1}(\lambda) \qquad (2) \\
&\vdots \\
n_{k_\lambda}(\lambda) &= n'_{k_\lambda}(\lambda)
\end{aligned}$$

El próximo paso consistirá en escribir los números $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots$, en términos de $n'_1(\lambda), n'_2(\lambda), \ldots$ y luego los números $n'_i(\lambda)$ en términos de los $d_i(\lambda)$, si $1 \leq i \leq k_\lambda$. El objetivo final será escribir los $\{n_i(\lambda)\}$ en términos de los $\{d_i(\lambda)\}$, lo que reducirá el problema de encontrar la matriz de Jordan de A a calcular los números $d_i(\lambda)$.

Una observación simple pero fundamental es que cada bloque elemental de Jordan de J asociado al autovalor λ, de tamaño $h \times h$, contribuye a $\ker(J - \lambda I)^s$ con s (respectivamente h) vectores linealmente independientes si $s \leq h$ (respectivamente $s > h$).

En particular $d_1(\lambda)$ es igual a la cantidad de bloques de Jordan correspondientes a λ, pues cada bloque elemental contribuye con un vector a $\ker(J - \lambda I)$.

Gracias a estas observaciones, es fácil ver que los $d_i(\lambda)$ y los $n'_i(\lambda)$ están relacionados de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&d_1 = n'_1 \\
&d_2 = (n'_1 - n'_2) + 2n'_2 = n'_1 + n'_2 \\
&d_3 = (n'_1 - n'_2) + 2(n'_2 - n'_3) + 3n'_3 = n'_1 + n'_2 + n'_3 \\
&\vdots \\
&d_k = (n'_1 - n'_2) + 2(n'_2 - n'_3) + 3(n'_3 - n'_4) + \cdots + (k-1)(n'_{k-1} - n'_k) + kn'_k \\
&\quad = n'_1 + n'_2 + \cdots + n'_k
\end{aligned}
$$

Escribiendo este sistema de ecuaciones lineales en forma matricial resulta:

$$
\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ \vdots \\ n'_k \end{bmatrix}
$$

y usando que

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

resulta

$$\begin{bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ \vdots \\ n'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix}$$

Es decir

$$n'_1 = d_1,\ n'_2 = d_2 - d_1,\ \ldots\ ,\ n'_k = d_k - d_{k-1}. \tag{3}$$

Usando la relación (2) obtenemos que

$$\begin{aligned} n_1(\lambda) &= 2d_1(\lambda) - d_2(\lambda) \\ n_2(\lambda) &= 2d_2(\lambda) - d_1(\lambda) - d_3(\lambda) \\ &\vdots \\ n_j(\lambda) &= 2d_j(\lambda) - d_{j-1}(\lambda) - d_{j+1}(\lambda) \\ &\vdots \\ n_k(\lambda) &= d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) \end{aligned} \tag{4}$$

Resulta de estas ecuaciones que los $\{d_i(\lambda)\}_{i=1}^{k_\lambda}$ determinan a los $\{n_i(\lambda)\}_{i=1}^{k_\lambda}$, luego hemos finalmente probado:

Teorema 3.4 *Dos matrices A y A' son semejantes si y sólo si para cada autovalor λ, los números $d_j(\lambda)$ para A y A' son los mismos.*

Prueba. Sea J_1 la forma de Jordan de A y J' la de A'. Las ecuaciones (4) implican que J y J' tienen los mismos $\{n_k(\lambda_j)\}$ para todo k y j, pero ya hemos observado que, salvo por el orden de los bloques, este conjunto de números determina unívocamente a J. Esto dice que J' se obtiene de J permutando bloques, luego éstas son semejantes. Como toda matriz es semejante a su forma de Jordan, resulta A' semejante a A.

Resulta ahora inmediato el siguiente

Corolario 3.5 *Las matrices de Jordan que se obtienen al tomar todas las particiones distintas posibles de los q_j, son no semejantes dos a dos.*

Prueba. Si dos matrices de Jordan son semejantes, para cada autovalor λ, éstas tienen los mismos números $d_j(\lambda)$. Luego también los $n_j(\lambda)$ son los mismos, para todo j, lo que implica que las particiones originales son las mismas.

Como ilustración, calcularemos los números $\{d_i(\lambda)\}$ para todas las posibles matrices de Jordan que posean un único autovalor λ con multiplicidad $n = 4, 5$ ó 6. Para $n = 4, 5$ ya hemos dado una lista de todas las particiones.

$n = 4$

	4	(3, 1)	(2, 2)	(2, 1, 1)	(1, 1, 1, 1)
n_1	0	1	0	2	4
n_2	0	0	2	1	0
n_3	0	1	0	0	0
n_4	1	0	0	0	0
d_1	1	2	2	3	4
d_2	2	3	4	4	4
d_3	3	4	4	4	4
d_4	4	4	4	4	4

$n = 5$

	5	(4, 1)	(3, 2)	(3, 1, 1)	(2, 2, 1)	(2, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 1)
n_1	0	1	0	2	1	3	5
n_2	0	0	1	0	2	1	0
n_3	0	0	1	1	0	0	0
n_4	0	1	0	0	0	0	0
n_5	1	0	0	0	0	0	0
d_1	1	2	2	3	3	4	5
d_2	2	3	4	4	5	5	5
d_3	3	4	5	5	5	5	5
d_4	4	5	5	5	5	5	5
d_5	5	5	5	5	5	5	5

$n = 6$

	6	(5, 1)	(4, 2)	(4, 1, 1)	(3, 3)	(3, 2, 1)	(3, 1, 1, 1)
d_1	1	2	2	3	2	3	4
d_2	2	3	4	4	4	5	5
d_3	3	4	5	5	6	6	6
d_4	4	5	6	6	6	6	6
d_5	5	6	6	6	6	6	6
d_6	6	6	6	6	6	6	6

	(2, 2, 2)	(2, 2, 1, 1)	(2, 1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 1, 1)
d_1	3	4	5	6
d_2	6	6	6	6
d_3	6	6	6	6
d_4	6	6	6	6
d_5	6	6	6	6
d_6	6	6	6	6

Para concluir la sección probaremos un lema que simplifica significativamente el cálculo de los $d_j(\lambda)$.

Lema 3.6 *Sea A una matriz triangular superior de la forma*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix} \quad \text{donde } \mathrm{A_j} = \begin{bmatrix} \lambda_j & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Entonces $\dim\ker(A - \lambda_j I) = \dim\ker(A_j - \lambda_j I)$.

Prueba. Si A_j es de tamaño $k_j \times k_j$, (en particular $n = k_1 + \cdots + k_r$), por el teorema 2.1, $\dim\ker(A-\lambda_j I) = n - r(A-\lambda_j I)$ y $\dim\ker(A_j - \lambda_j I) = k_j - r(A_j - \lambda_j I)$. Por lo tanto, debemos verificar que $r(A - \lambda_j I) = n - k_j + r(A_j - \lambda_j I)$.

Fijemos j_0 y sea $B = A - \lambda_{j_0} I = (b_{ij})$. Sean $v_1, \ldots, v_n$ los vectores columnas de B y $e_1, \ldots, e_n$ los de la base canónica de $\mathbf{C}^n$.

Sea J el subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$, correspondiente a los índices que aparecen en el bloque A_{j_0} de la matriz A. Se tiene $|J| = k_0$, $b_{jj} = 0 \quad \forall j \in J$ y $b_{jj} = \lambda_j - \lambda_{j_0} \neq 0 \ \ \forall j \notin J$.

Además $\{v_i\}_{i \notin J}$ es un conjunto linealmente independiente y genera el mismo espacio que el conjunto de vectores $\{e_i\}_{i \notin J}$.

Ahora, para cada $j \in J$, el vector v_j se escribe de manera única como $v_j = w_j + v'_j$, con $w_j \in W$, el subespacio generado por $\{e_i \,|\, i \notin J, i < j\}$, y $v'_j \in W'$, el subespacio generado por $\{e_i \,|\, i \in J, i < j\}$.

Observamos que si $v'_k \neq 0$ entonces v_k y v_i son linealmente independientes para todo $i \notin J$, $k \in J$.

Afirmamos ahora que dados $v_{k_1}, \ldots, v_{k_s}$, con $k_i \in J$, el conjunto $\{v'_{k_1}, \ldots, v'_{k_s}\}$ es linealmente independiente, si y sólo si el conjunto $\{v_{k_1}, \ldots, v_{k_s}, v_i \mid i \notin J\}$ es linealmente independiente.

En efecto, si $v'_{k_1}, \ldots, v'_{k_s}$, con $k_i \in J$ son linealmente independientes, entonces $\{v_{k_1}, \ldots, v_{k_s}\}$ tambien lo son y por lo tanto $\{v_{k_1}, \ldots, v_{k_s}, v_i \mid i \notin J\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente de $\mathbf{C}^n$.

Recíprocamente, si $\{v_{k_1}, \ldots, v_{k_s}, v_i \mid k_i \in J,\ i \notin J\}$ es linealmente independiente, supongamos que una combinación lineal $c_1 v'_{k_1} + \cdots + c_s v'_{k_s} = 0$. Entonces, claramente, resulta $c_1 v_{k_1} + \cdots + c_s v_{k_s} + w = 0$, para cierto $w \in W$, lo que implica que $c_1 = \cdots = c_s = 0$.

Es fácil ver, usando la afirmación anterior, que el rango columna de B es $n - |J| + r(A_{j_0} - \lambda_{j_0} I)$, lo cual concluye la prueba.

Si dada una matriz arbitraria C, denotamos $d_j(C, \lambda)$ al $d_j(\lambda)$ correspondiente a la matriz C, tenemos el siguiente:

Corolario 3.7 *Si A es como en el teorema anterior, para cada autovalor λ de A se tiene $d_j(A, \lambda_i) = d_j(A_i, \lambda_i)$.*

Prueba Para j=1 es el teorema anterior. En general basta observar que la matriz $(A - \lambda_i I)^j$ es de la misma forma que en el teorema anterior y su i-ésimo bloque en la diagonal es justamente $(A_i - \lambda_i I)^j$.

4 Ejemplos

El procedimiento utilizado anteriormente da un método para obtener la forma de Jordan de A, conocidos sus autovalores. Dada la matriz A, se calculan los $d_j(\lambda)$, para cada autovalor de A y mediante las ecuaciones (4) se obtiene el valor de los $n_j(\lambda)$. La matriz determinada por éstos es la matriz de Jordan de A. Para concluir veremos cómo usar el método anterior, en algunos casos concretos.

Ejemplo 1. Sea A la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El único autovalor de A es λ=1, con multiplicidad n=5, luego el polinomio característico de A es $p_A(x) = (x-1)^5$.

La dimensión del núcleo de A es igual n menos el número de columnas de A que son linealmente independientes.

Como

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se vé claramente que $d_1 = \dim\ker(A-I) = 1$, luego hay un único bloque 5×5, pues vimos que cada bloque elemental de Jordan aporta un vector al valor de $d_1 = 1$. La forma de Jordan de A es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2. Con el mismo argumento que en el ejemplo anterior, para cualquier matriz A de la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & a_1 & & \\ & \lambda & a_2 & \\ & & \ddots & a_{n-1} \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

con $a_j \neq 0$ para $1 \leq j \leq n-1$, se concluye que la forma de Jordan de A tiene un sólo bloque $n \times n$, es decir

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A - 3I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-3I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad (A-3I)^4 = 0$$

Así se obtiene fácilmente

$$d_1(3) = 2 \ , \ d_2(3) = 4 \ , \ d_3(3) = 5 \ , \ d_4(3) = d_5(3) = d_6(3) = 6$$

De esta información se deduce que la matriz J buscada es la matriz de Jordan correspondiente a la partición (4,2). En efecto, de $d_1 = 2$ se deduce que hay dos bloques elementales, pero no conocemos el tamaño de cada uno. Ahora $d_2 = 4$ implica que cada uno de estos bloques es de lado por lo menos 2 (porque cada uno aportó un vector más) y $d_3 = 5$ dice que sólo un bloque tiene dimensión mayor o igual que 3. Por eso la única posibilidad es que haya un bloque 4×4 y otro 2×2.

Es decir, la forma de Jordan de A es

$$J = \left[\begin{array}{cccc|cc} 3 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 3 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 3 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & & \\ \hline & & & & 3 & 1 \\ & & & & 0 & 3 \end{array}\right] .$$

Ejemplo 4. Sea

$$A = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

La matriz A posee dos autovalores: $\lambda = 1$, con multiplicidad 4 y $\lambda = 2$, con multiplicidad 3. Gracias al corolario 3.7 para calcular los $d_j(1)$ nos podemos restringir al bloque superior izquierdo A_1 de autovalor 1.

$$A_1 - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; (A_1 - I)^2 = 0$$

De este modo resulta

$$\begin{aligned} d_1(1) &= 3 \\ d_2(1) &= d_3(1) = d_4(1) = 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el bloque de Jordan correspondiente al autovalor 1 será

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En realidad no era necesario calcular $(A - I)^2$, pues en la tabla en § 3 , se vé que la única matriz posible con $d_1 = 3$ es la del tipo (2,1,1).

Busquemos ahora el bloque de Jordan J_2 correspondiente al autovalor $\lambda = 2$, que es de tamaño 3×3. Nuevamente, para el cálculo de los $d_j(2)$, podemos limitarnos a considerar el bloque inferior derecho A_2 correspondiente al autovalor 2.

$$(A_2 - 2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad (A_2 - 2I)^2 = 0$$

resulta $d_1(2) = 2, \quad d_2(2) = d_3(2) = 3$.

Es decir

$$J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

De este modo se obtiene que la forma de Jordan de A es

$$J = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & & 2 & 1 & 0 \\ & 0 & & & 0 & 2 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Ejemplo 5. Sea

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \\ 5 & 10 & 3 & -2 \\ -9 & -18 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Calculando el determinante de la matriz $xI - A$ se ve que el polinomio característico de A es $p_A(x) = (x-2)^4$.

Como

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -8 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 5 & 10 & 1 & -2 \\ -9 & -18 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

si e_j son las columnas de esta matriz, se verifica que $2e_1 = e_2$ y que $e_2 + e_4 = 2e_3$, por lo tanto $d_1(2) = \dim\ker(A - 2I) = 2$.

Además

$$(A - 2I)^2 = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & -3 \\ -6 & -12 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

de donde se deduce que $d_2(2) = 3$.

Es decir la forma de Jordan de A es

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio. Hallar J para 5 elecciones de A con $n \geq 4$, y uno o dos autovalores distintos.

Fa.M.A.F. Universidad Nacional de Córdoba.