

EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN DE LA ALEATORIEDAD EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Luis Serrano¹, Carmen Batanero¹, Rodrigo Esteban²

lserrano@ugr.es, batanero@ugr.es, counterrodrigo@hotmail.com

¹Universidad de Granada (España), ²Universidad de Zaragoza (España)

Modalidad: Comunicación breve (CB)

Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)

Núcleo Temático: Investigación en Educación Matemática

Palabras clave: Aleatoriedad; Comprensión, Estudiantes, Educación Secundaria

Resumen

Diferentes currículos han incidido en la importancia de la probabilidad para la formación del estudiante y recomiendan proporcionarle experiencia aleatoria por medio de la realización de experimentos y simulaciones, usando la tecnología. Estas propuestas requieren que el alumno comprenda las características de las secuencias aleatorias, tema analizado por Batanero y Serrano (1999) utilizando experimentos con sólo dos resultados posibles. El objetivo de este trabajo fue completar dicha investigación analizando la comprensión de secuencias con más de dos resultados posibles y comparando nuestros resultados con los de Batanero y Serrano. Para ello se proponen a 159 alumnos de tres cursos de Educación Secundaria Obligatoria cinco ítems donde se pide decir si una secuencia de resultados es aleatoria, analizando también sus argumentos.

Introducción

Ha venido siendo habitual el tratar la enseñanza de la probabilidad según unos principios psicopedagógicos condicionados por el desarrollo cognitivo del alumno y por la dificultad de su conceptualización. Pero en las últimas décadas diferentes currículos (por ejemplo, CCSSI, 2010) han incidido en la necesidad de introducir cambios metodológicos en su enseñanza y en la importancia de la probabilidad para la formación del estudiante, recomendando que los estudiantes realicen experimentos aleatorios con material manipulativo o mediante simulación, obtengan datos empíricos de los mismos y comparen los resultados obtenidos con sus predicciones. En esta línea, en España la enseñanza de estos contenidos se adelantó al último curso de Educación Primaria en el anterior currículo (MEC, 2006), tendencia que se continúa en el actual currículo (MECD, 2014).

El punto de partida para el aprendizaje de estos contenidos debe ser la comprensión del concepto de aleatoriedad, ya que es el origen de la construcción de la teoría de la probabilidad. Pero el concepto de aleatoriedad puede sugerir gran diversidad de interpretaciones, como lo indican Batanero y Serrano (1995) y esto hace que surgan errores y sesgos subjetivos en su percepción e interpretación. En este trabajo tratamos de completar las investigaciones previas, en las que los alumnos no habían estudiado probabilidad en la educación primaria, usando para nuestra actual investigación una muestra de estudiantes que sí tuvieron ese aprendizaje previo. Además utilizamos una tarea ligeramente diferente de las usadas en dichas investigaciones a fin de detectar la complejidad del razonamiento aleatorio al usar secuencias de varias opciones en lugar de solo dos.

Fundamentos

Las principales investigaciones sobre desarrollo de la idea de azar fueron llevadas a cabo por Piaget e Inhelder (1975) y Fischbein (1975). Los primeros supusieron que la comprensión del azar es complementaria a la idea de causa y efecto y requiere de razonamiento combinatorio y proporcional, lo cual supone una lenta maduración de la idea de azar. Por el contrario Fischbein supone intuiciones parcialmente formadas sobre la aleatoriedad en los niños y sugiere adelantar cuanto antes la enseñanza del tema.

Green (1983) preparó un cuestionario donde trataba de reproducir en forma escrita los experimentos de Piaget e Inhelder y lo pasó a 2930 estudiantes ingleses entre 11 y 16 años. Uno de sus ítems pide a los niños decidir cuál entre dos niñas que han lanzado una moneda equilibrada 150 veces ha hecho trampas (inventó los resultados) explicando el por qué. Observa que la mayoría de los niños considera aleatoria precisamente la secuencia que es inventada, porque esperan un balance de caras y cruces muy cercano al 50% y porque no aceptan las rachas de más de dos o tres resultados iguales. En la argumentación de la elección se consideran propiedades como la frecuencia de resultados, longitud de las rachas, patrón de la secuencia o impredecibilidad de resultados.

Serrano (1996) diseñó un cuestionario con tareas de reconocimiento y generación de secuencias aleatorias en experimentos con dos resultados equiprobables (lanzar una moneda) y lo pasó a 277 estudiantes españoles de 13 (147) y 17 años (130). El autor indica tres puntos para comprender las secuencias aleatorias: variabilidad local (frecuentes alternancias entre distintas posibilidades y ausencia de patrones establecidos), regularidad global (convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica) y diferencia entre valores teóricos y observados. Entre los errores mostrados por estos estudiantes, el autor resalta la creencia en que los datos deben ser erróneos, si no corresponden a las expectativas; confusión entre alta probabilidad y certeza y búsqueda de razones causales para un resultado inesperado. En lo que sigue tratamos de completar las investigaciones previas utilizando secuencias con más de dos resultados aleatorios.

Método

Para este estudio hemos utilizado una muestra de 159 alumnos de Educación Secundaria Obligatoria, distribuidos en los siguientes cursos: 2º curso (n = 51), 3º curso (n = 64), 4º curso (n = 44), estando las edades de estos alumnos comprendidas entre 13 y 17 años.

Hemos de considerar que en Educación Primaria y en los cursos anteriores de Educación Secundaria habían recibido enseñanza de contenidos de Estadística y Probabilidad. La tarea planteada a los estudiantes, que se presenta en la Figura 1 y consta de sus cinco ítems, ha sido adaptada de la investigación de Chernoff (2011) que utilizó un problema parecido en una investigación con 163 futuros profesores de educación primaria en Canadá, dentro de un curso de Didáctica de la Matemática. La diferencia entre ambos es que el autor usó sólo tres letras, mientras que en la prueba aleatoria que ahora consideramos hay cuatro resultados posibles. Todas las secuencias que proponemos tienen 10 resultados y hemos cambiado las características de las secuencias en cada uno de los ítems propuestos, destaquemos por ejemplo que Chernoff siempre usó las mismas frecuencias de resultados.

Ítems 1 a 5. Un examen tiene 10 preguntas, cada una con cuatro posibles respuestas, A, B, C y D. Solo una respuesta es correcta en cada pregunta.
 Te mostramos continuación las respuestas que eligieron algunos estudiantes a las 10 preguntas:
 Item 1. Ana: A C C B D C A A D B
 Item 2. Borja: C C C B B B B B B B
 Item 3. Carlos: C B C B B C B B B B
 Item 4. Danilo: A A A C C C B B D D
 Item 5. Emilia: A B C B A C D A C D
 Rodea con un círculo los nombres de los alumnos o alumnas que podrían estar respondiendo al azar.

Figura 1. Tarea usada en la evaluación.

En los cinco ítems se presenta un conjunto de experimentos, cada uno de los cuáles podría ser aleatorio o no. Basándonos en que un profesor no pone las preguntas del examen siguiendo un patrón evidente que los alumnos puedan adivinar, los estudiantes deben aplicar su conocimiento del contexto de un “examen” para responder en cada uno de los ítems propuestos. Según esto y suponiendo que los cuatro resultados son equiprobables, ya que el profesor usualmente trata de usar las cuatro opciones posibles como correctas en alguno de los ítems, observamos que:

- La secuencia de Ana sigue lo esperado en una aleatoria; aparecen todas las opciones, no hay un orden evidente y aparece alguna racha (se repite algún resultado).
- La secuencia de Borja sólo contiene dos de las cuatro opciones. La respuesta esperada es diferente de lo que se espera en un proceso aleatorio. Además hay una racha muy larga.
- La secuencia de Carlos también tiene sólo dos opciones únicamente; aunque tiene rachas no demasiado largas. La respuesta esperada es que no es aleatorio.
- La de Danilo contiene todas las opciones e incluso tiene alguna racha larga. Sería típicamente una secuencia aleatoria.
- La secuencia de Emilia contiene todas las opciones, no hay un orden evidente, pero no contiene rachas.

Resultados

De acuerdo a lo esperado, observamos en la Figura 2 que la mayoría de alumnos consideran se está respondiendo al azar en los ítems 1 (Ana), 4 (Danilo) y 5 (Emilia) donde se

presentan todos los tipos de resultados. Los estudiantes utilizan acá su conocimiento del contexto, pues es difícil que un profesor prepare un examen de opciones múltiples con respuestas que sigan un patrón dado. Además en estas secuencias aparecen todas las opciones y no hay un orden evidente. Por otro lado, se rechazan con más frecuencia como aleatorios los ítem 2 y 3; en el primero nunca se dan ni la opción A ni la D, es decir, nunca aparecen dos de los resultados posibles. El resultado en este ítem coincide con lo expuesto en otro similar (con tres opciones de Chernoff, 2011) en que la mayoría de los futuros profesores consideran que la secuencia no puede ser aleatoria si los resultados no reflejan la equiprobabilidad de sucesos en la población. Al comparar por curso encontramos diferentes patrones de respuesta. Los alumnos de segundo curso encuentran más aleatorio que sus compañeros el ítem 2 donde claramente no hay aleatoriedad; los de tercero el 4 y 5 donde aparecen todos los resultados y hay rachas largas; los de cuarto el último. Observamos que, conjuntamente, los alumnos de tercero muestran mejores intuiciones para detectar la aleatoriedad en estas preguntas.

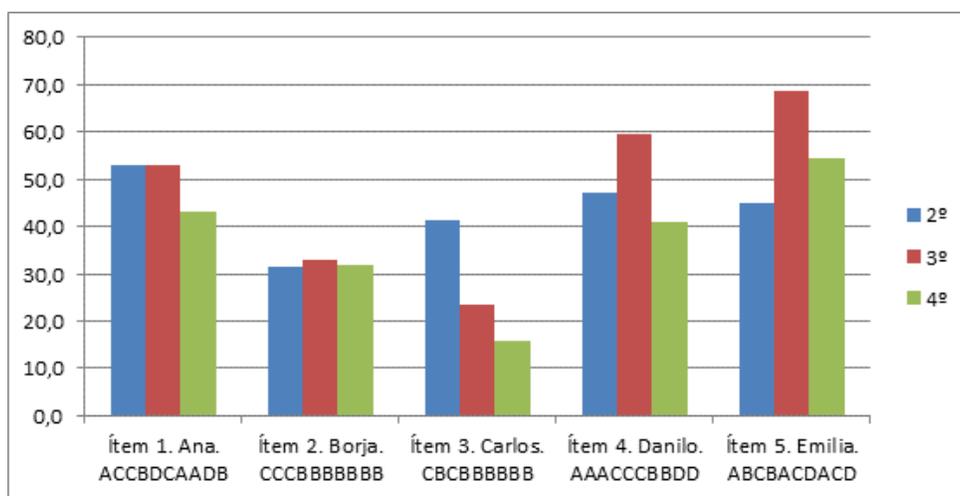


Figura 2. Porcentaje de alumnos que consideran se responde al azar en cada ítem.

Los argumentos usados por los alumnos para razonar la existencia de aleatoriedad se presentan en la Figura 3. En el análisis de los argumentos dados por los estudiantes para justificar sus respuestas observamos las propiedades de las secuencias seleccionadas que les parecen que han sido generadas al azar. Estos argumentos los clasificamos en la forma siguiente:

Frecuencias: Si los estudiantes consideran que hay una distribución equilibrada en la secuencia de todas las opciones posibles (A, B, C y D), o no se contemplan todas alternativas de respuesta en la secuencia: “*porque responden C y B sólo*” (Alumno 30); “*porque han respondido muchas veces la misma letra*” (Alumno 64); “*porque el número de letras que aparecen en las series está equilibrado*” (Alumno 31). Este argumento aparece más en los ítems 1 y 5.

Patrones: Si, en las secuencias seleccionadas como aleatorias, se mencionan regularidades o patrones irregulares: “*porque están todas las letras más ordenadas*” (Alumno 1, 2º curso); “*porque siguen un orden*” (Alumno 10, 2º curso); “*porque se ocupan de seleccionar una distinta cada vez y no repetir mucho la misma letra*” (Alumno 8, 4º curso). Se asocia a los ítems 2 y 4.

Rachas: Cuando los alumnos reconocen esta característica en las secuencias seleccionadas como aleatorias: “*porque repiten mucho las letras*” (Alumno 16, 2º curso); “*porque casi nunca responden con la misma letra en dos o tres ocasiones seguidas*” (Alumno 23, 3º curso); “*porque se repite mucho la respuesta*” (Alumno 8, 3º curso). La existencia de rachas largas se asocia sobre todo a los ítems 2 y 4.

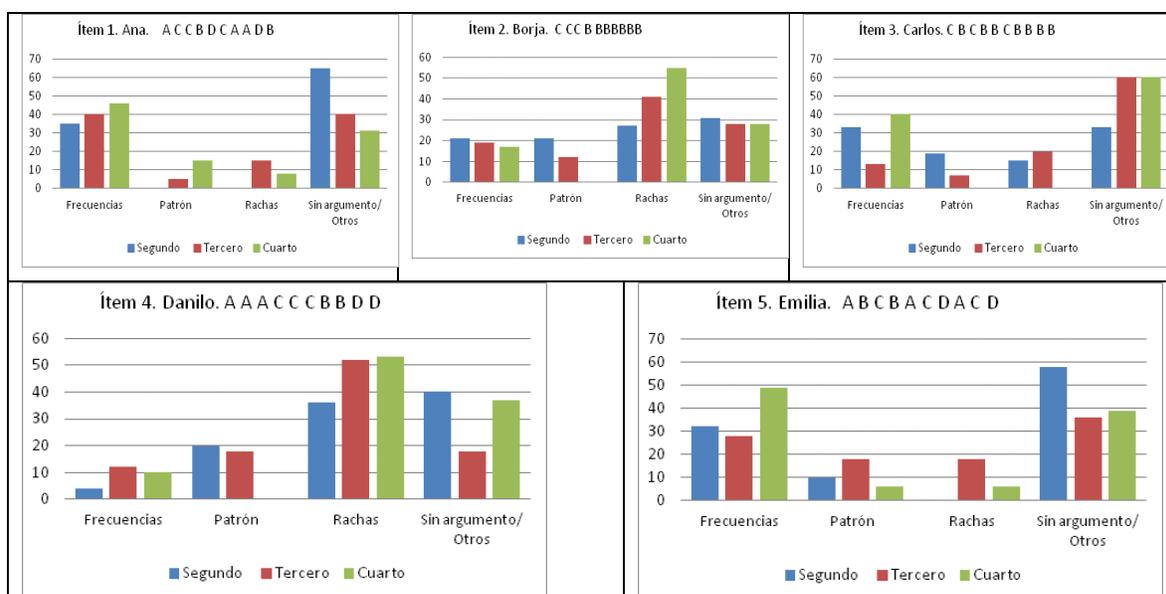


Figura 3. Porcentaje de alumnos que consideran se responde al azar en cada ítem.

Sin argumentos/otros argumentos: Cuando los alumnos no expresan ningún tipo de razonamiento sobre las secuencias de resultados aleatorios seleccionados o bien realizan razonamientos no clasificados anteriormente: “*todos responden al azar*” (Alumno 6, 2º curso); “*porque pueden ser todas probables porque es azar*” (Alumno 39, 2º curso); “*porque en un examen no suelen poner muchas respuestas de la misma letra*” (Alumno 3, 3º curso).

Observamos que en todos los ítems hay un alto porcentaje de estudiantes que no son capaces de razonar la aleatoriedad o emplean argumentos no pertinentes.

En general los estudiantes han reconocido las características de las secuencias propuestas. Por otro lado, al comparar por curso son los alumnos de segundo los que con más frecuencia no saben dar un argumento en los ítems 1 y 5, y los de tercero los que identifican con más facilidad las rachas largas.

Implicaciones para la enseñanza

El cuestionario ha sido sencillo de completar para los estudiantes e interesante para ellos, sirviendo la discusión posterior para mejorar su aprendizaje. Además, nos ha proporcionado bastante información para el análisis. Por tanto, pensamos que se ha cumplido nuestro objetivo, pues hemos analizado las intuiciones de los alumnos y comparado las respuestas por ítem y curso. Además, al utilizar secuencias con más de dos resultados posibles, ampliamos la información respecto al estudio de Serrano (1996) donde solo se consideraron dos sucesos elementales.

Los resultados nos sugieren que, a pesar de haber sido objeto de enseñanza, es necesario afianzar y proporcionar a los estudiantes un conocimiento más exhaustivo y preciso de las propiedades de las secuencias aleatorias, puesto que en algunos casos no saben razonar su elección y en otros, consideran no aleatorias las secuencias con rachas largas. Una sugerencia didáctica sería partir de la experimentación y simulación en actividades y problemas que se planteen, tal como se establece en los nuevos diseños curriculares. También sería importante utilizar una metodología activa, exploratoria, manipulativa y por descubrimiento, que facilite la comprensión de la noción de aleatoriedad y sus propiedades, partiendo del contexto y de la experiencia del alumno para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de estos contenidos. En este sentido, este trabajo nos da una pauta de los conocimientos previos sobre la aleatoriedad en los cursos segundo a cuarto.

Dada la importancia de la comprensión de este concepto para el aprendizaje de otros contenidos curriculares, es importante conocer y tener presente los resultados de investigaciones como la actual, donde se proporciona información sobre las concepciones previas y sesgos subjetivos del alumnado. La discusión en clase de ítems parecidos a los nuestros sería un buen medio de hacer florecer sus argumentaciones y llevarlos a reconocer las que son incorrectas.

Agradecimiento: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC), y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

- Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO*, 5, 15-28.
- Batanero, C. y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (5), 558-567.
- Chernoff, E. J. (2011). Investigating relative likelihood comparisons of multinomial, contextual sequences. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of European Research in Mathematics Education* (591-600). Reszlow: ERME.
- Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_MathStandards.pdf. Consultado 15/12/2015.
- Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3.000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783). University of Sheffield.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in students*. New York: Norton.
- Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, Granada, España.