View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Funes

CB-815

¡NO SOLO ECUACIONES! LA POTENCIA DEL LENGUAJE ALGEBRAICO. ACTIVIDADES DE INVESTIGACIÓN PARA EL AULA.

Mireia López Beltran – Cyntia Riquelme Carvallo
mireia.lopez.beltran@upc.edu – criquelme@padredamiansscc.net
ICE de la UPC, España y Padre Damián Sagrados Corazones, España

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB
Nivel educativo: Secundario - Primario
Palabras clave: Lenguaje algebraico, patrón, resolución de problemas, tareas ricas

Resumen
La introducción y adquisición del lenguaje algebraico nos brinda una magnífica oportunidad para trabajar actividades ricas en el aula. El trabajo del álgebra no se puede limitar a la resolución ecuaciones, sino que debemos presentar toda su potencia con actividades motivadoras. En esta comunicación presentamos una selección de actividades del blog Banco de recursos del FEM Matemàtiques (http://bancfm.blogspot.com.es/) que permiten a los alumnos trabajar el álgebra de una manera significativa a partir de las investigaciones que se les proponen.

En la mayoría de libros de matemáticas el trabajo de álgebra se limita en exceso a una serie de contenidos con gran protagonismo en el planteamiento y la resolución de ecuaciones de diferentes tipos. Desde este enfoque, la introducción al álgebra del alumnado se realiza a partir de ejercicios de operaciones con expresiones algebraicas cada vez más complicados, acabando con el aprendizaje de la resolución de ecuaciones y su función para resolver problemas con esta herramienta.

En este planteamiento, la resolución de problemas no está en la introducción ni en el núcleo del aprendizaje sino que se trabaja en la parte final de aplicación y sólo después de que el alumnado haya mecanizado la resolución de las ecuaciones pertinentes. De esta manera muchos de los alumnos se introducen en el álgebra como un lenguaje abstracto y sin significado para ellos, lleno de letras, números y operaciones cada vez más complejas. Además, este planteamiento no suele dar suficiente protagonismo a otro tipo de trabajo que

ISBN 978-84-945722-3-4

también debemos realizar con nuestros alumnos y que encontramos, por ejemplo, en los contenidos del currículum español en los cursos de 1º y 2º de la ESO (12-14 años): "El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades" (BOE, 2015).

Creemos que es fundamental dotar de significado a las expresiones algebraicas y que los alumnos experimenten la necesidad de su utilización para facilitar lo que quieren comunicar. Como todo lenguaje tiene un carácter o sentido comunicativo "que nos permite expresar de manera general e interpretar de forma sintética propiedades y relaciones numéricas conocidas o desconocidas" (Calvo et al., 2016). En el caso de la investigación de patrones hacemos que los alumnos puedan dotar de significado a las expresiones algebraicas ya que las necesitan para expresar aquellas relaciones que ellos mismos han elaborado. También encontramos fundamental que los alumnos deban argumentar "al desvelar relaciones nuevas, buscar equivalencias entre expresiones aparentemente diferentes y justificar las relaciones, afirmaciones o conjeturas que realizan dando razones matemáticas en todo el proceso" (Calvo et al., 2016).

Podemos enseñar contenidos y procesos matemáticos a partir de la Resolución de Problemas (RP) ya que ésta "no tiene que ser una tarea a realizar al final del proceso de aprendizaje, sino que puede ser perfectamente el desencadenante del proceso" (Burgues y Sarramona, 2013). Los problemas a trabajar no pueden ser de cualquier tipo, es importante que sean "actividades competencialmente ricas formulando preguntas que promuevan conexiones, reflexiones y argumentaciones" (Calvo et al., 2016, p.254)[7]

En esta comunicación presentamos una serie de problemas (actividades competencialmente ricas) seleccionadas de nuestro blog que ayudarán a dotar de significado el trabajo del álgebra y a trabajar los procesos de comunicación y argumentación.

Investigación de patrones

Los problemas que hemos seleccionado trabajan el álgebra a partir del planteamiento de investigaciones en que los alumnos deben conjeturar y buscar un patrón. Hemos escogido

[7] Para más información sobre activitades competencialmente ricas ver la introducción del blog: http://bancfm.blogspot.com.es/p/blog.html

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

este enfoque ya que “el estudio de patrones es clave para desarrollar el pensamiento algebraico y crítico para la abstracción de la idea de relación” (Burgués, 2011). Además, siguiendo a la autora, “existe en el hombre una tendencia natural a utilizar patrones (nos gusta la repetición, sensibilidad artística, para recordar...) ya que están presentes en la naturaleza, tendemos a la generalización y los buscamos para clasificar.” Por eso la autora nos recomienda que aprovechemos esta “tendencia natural”. Otra característica que hace atractivo el uso de patrones en el aula es que “nos permiten predecir, saber lo que puede ocurrir gracias a establecer fórmulas o reglas…”. De hecho, en parvulario y primeros cursos de primaria se realiza un trabajo de series y patrones, con material y sin, que después desaparece en los cursos posteriores.

Este tipo de actividades también comporta una metodología de aula y un papel del profesor enfocado a “ayudar a nuestros alumnos a matematizar el patrón” con el uso del lenguaje algebraico y “mostrando las virtudes” de este lenguaje (Burgués, 2011).

En muchos de los problemas del *Fem Matemàtiques* se trabaja la identificación de patrones y de sus reglas en contextos numéricos y geométricos (en el plano y en el espacio). Ser capaz de resolverlos es una indicación del trabajo con un tipo de pensamiento funcional que permite generalizar y desarrollar una regla algebraica o fórmula que nos permita predecir comportamientos.

La investigación pasaría por diferentes fases: Darse cuenta de las semejanzas (módulos o tipos de cambio); Recoger datos y organizarlos; Realizar pruebas y conjeturas; Expresar las relaciones y reglas; Comprobar y justificar. (Burgués, 2011)

Darse cuenta de las semejanzas (módulos o tipos de cambio)

Los alumnos deben darse cuenta de las semejanzas o características que se repiten (módulo) o de un tipo de cambio (por tanteo operativo u observación de las formas de las figuras):

ISBN 978-84-945722-3-4

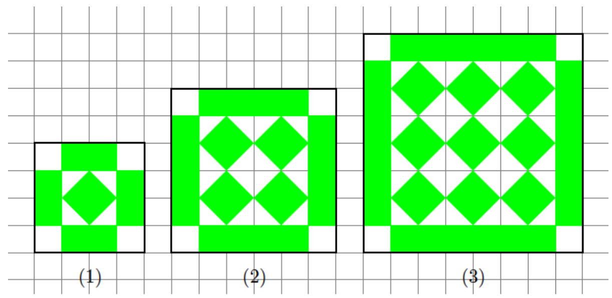


Figura 1: Patrón geométrico

En este caso podríamos ayudar en la tarea a los alumnos con una pregunta como: *¿Qué permanece igual y qué cambia al aumentar el nivel?*

En el siguiente ejemplo encontramos un patrón numérico muy sencillo:

División decimal

Si calculas, con la calculadora, el cociente con decimales de la división 9: 37, la pantalla te mostrará, como mucho, trece cifras decimales. Con estas cifras se puede deducir la respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto suman las 14 primeras cifras decimales del cociente?

b) ¿Cuánto suman las 100 primeras cifras decimales del mismo cociente?

En la siguiente respuesta de un alumno vemos como éste ha detectado la repetición del patrón numérico ("*los números 243 se repiten constantemente"*):

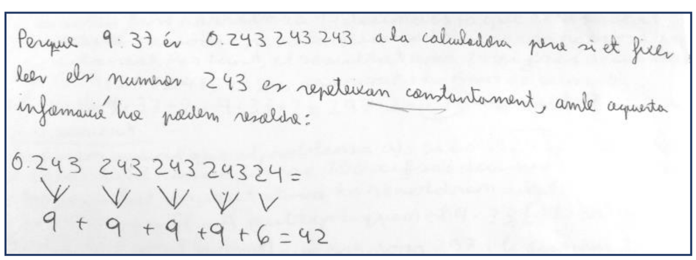


Figura 2: Patrón numérico

Recoger datos y organizarlos

Para poder ver esta repetición los alumnos deben recoger datos y organizarlos: empezar con esquemas y dibujos para llegar a la construcción de tablas que favorecen la observación de

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

pautas de crecimiento, un puente claro para el estudio posterior de funciones y para poder dar el paso de las relaciones reiterativas o recursivas a las relaciones funcionales.

Invito a magdalenas

Con 6 tiques, 1 magdalena gratis. Con 51 tiques, ¿a cuántos amigos puedo invitar gratis con los tiques que tengo?

En este caso vemos como un buen esquema les ayuda a organizar las ideas y ver las relaciones. Puede haber diversas estrategias de ataque que nos permitan recoger datos y que nos vienen dadas por diferentes perspectivas, visiones, manipulaciones o dibujos.

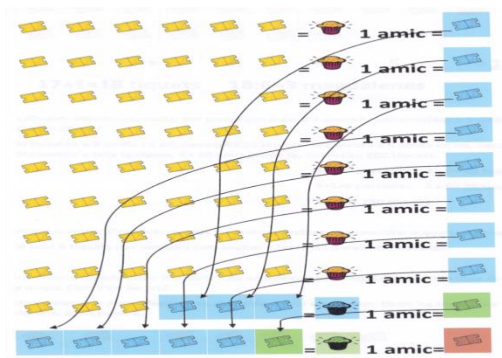


Figura 3: Esquema resolución problema Invito a magdalenas

Realizar pruebas y conjeturas

A partir de la realización de pruebas en el proceso de investigación los alumnos deben ir planteando sus hipótesis y conjeturas. Luego ponerlas a prueba y según el éxito o no, repetir el proceso o realizar un trabajo de abstracción.

Las pruebas sirven para poder dar razones matemáticas y justificar la conjetura. En este proceso de búsqueda del patrón los alumnos deben utilizar diferentes estrategias como, por ejemplo, coger casos más simples. Estas pruebas se deben ordenar, se debe realizar un trabajo sistemático y exhaustivo, de manera que no se escape nada. Una buena manera es la realización de listas ordenadas o tablas (que se ha de enseñar o sugerir porque no sale de manera natural en el alumnado) que nos ayudaran a ver relaciones verticales u horizontales entre los números que aparecen, como se ve en el ejemplo siguiente:

Una escultura cúbica

ISBN 978-84-945722-3-4

Un artista dispone de 14 cubos de un metro de arista. Con estos 14 cubos hace una escultura. Para protegerla, la pintan.

a) ¿Cuál es, en metros cuadrados, el área que tienen que pintar?

b) Y, ¿en una figura de 5 pisos?

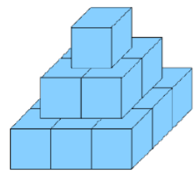


Figura 4

Para encontrar la regla general se tiene que hacer un salto de la recurrencia a la regla funcional: de la visión vertical de la tabla a la horizontal, es decir, de conocer un término sabiendo el anterior a conocerlo directamente en función de n.

Pis	Cares laterals pintades	Cares superiors pintades	Total m^2
1	4	1	5
2	8	3	11
3	12	5	17
4	X4 16	7	23
5	20	9	29
			85

+6

Figura 5: Tabla de una escultura cúbica

En esta parte, el profesor debe estar atento y en caso que el alumno no logre encontrar las relaciones puede, mediante buenas preguntas guiarles para matematizar la regla y poder predecir el patrón.

Expresar las relaciones y reglas

Una vez el alumnado ha sido capaz de visualizar un patrón o relación, ahora le surge la necesidad de expresarlo, es decir, de la utilización del lenguaje algebraico para expresar de una manera más sintética las relaciones y patrones que han encontrado. Un lenguaje algebraico que tiene sentido para ellos ya que las fórmulas y expresiones han sido encontradas de manera personal e intentan expresar como han interpretado las relaciones o la estrategia utilizada.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Contamos baldosas

El siguiente mosaico está formado por baldosas blancas y negras. Tiene una anchura de 9 baldosas.

Figura 6

(…) f) Explica cómo se encuentra el número de baldosas necesarias a partir del número de anchura del mosaico.

En este problema se les pide el salto a la abstracción al tener que calcular las baldosas para un ancho que no pueden dibujar ni contar. Para expresar la relación nos podemos encontrar, según el nivel competencial del alumnado, con: una expresión verbal (oral o escrita), una semifórmula donde se incluyen ya elementos algebraicos o una fórmula algebraica.

Expresión verbal:

L'amplada del mosaic es el resultat de la suma de rajoles negres i blanques.
Hi ha una rajola mes de negres que de blanques a l'amplada del mosaic.
El nombre total de rajoles del mosaic es la suma de les àrees dels dos quadrats que estan formats per rajoles negres i blanques.

Figura 7

Semifórmula

amplada : 2 = nombre de rajoles blanques (b) (un número enter, sense decimals)
b + 1 = nombre de rajoles negres (n)

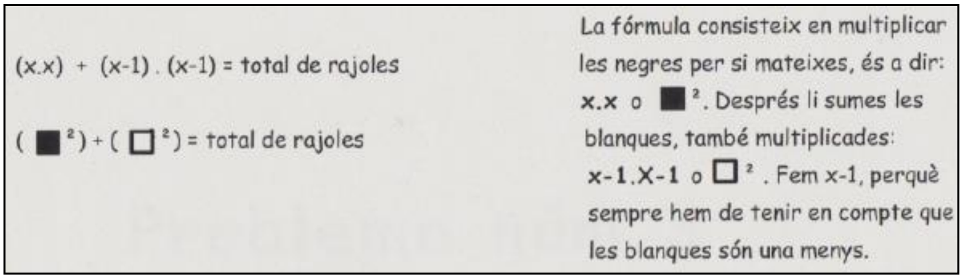
Després, per saber el nombre total de rajoles hem de fer el següent:

$b^2 + n^2$ = nombre de rajoles totals.

Figura 8

Fórmula con su justificación (6º de primaria)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



$(x.x) + (x\text{-}1).(x\text{-}1)$ = total de rajoles

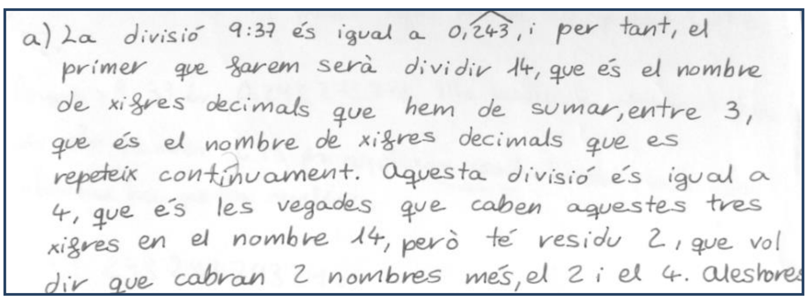
$(■^2) + (□^2)$ = total de rajoles

La fórmula consisteix en multiplicar les negres per si mateixes, és a dir: x.x o $■^2$. Després li sumes les blanques, també multiplicades: x-1.X-1 o $□^2$. Fem x-1, perquè sempre hem de tenir en compte que les blanques són una menys.

Figura 9

Comprobar y justificar.

Finalmente, es muy importante la justificación y argumentación del proceso: razonar el porqué del patrón. Por ejemplo, en el problema de la división decimal vemos como el concepto de división entera y el residuo le sirve al alumno para razonar y justificar el lugar que ocupa la cifra en el ciclo inacabado:



a) La divisió 9:37 és igual a $0,\widehat{243}$, i per tant, el primer que farem serà dividir 14, que és el nombre de xifres decimals que hem de sumar, entre 3, que és el nombre de xifres decimals que es repeteix continuament. Aquesta divisió és igual a 4, que és les vegades que caben aquestes tres xifres en el nombre 14, però té residu 2, que vol dir que cabran 2 nombres més, el 2 i el 4. Aleshores

Figura 10

"*La división 9:37 es igual a* $0'\widehat{243}$, *y por tanto, lo primero que haremos será dividir 14, que es el número de cifras decimales que hemos de sumar, entre 3, que es el número de cifras decimales que se repite continuamente. Esta división es igual a 4, que son las veces que caben estas tres cifras en el número 14, pero tiene residuo 2, que quiere decir que cabrán 2 números más, el 2 y el 4.*"

Tener que explicar a los demás es muy bueno para trabajar la argumentación. También tener que responder a preguntas clave: *¿Cómo lo has visto? o ¿Cómo convencerías al compañero de la mesa de al lado de que eso es cierto?* Y también preguntas en que deban interpretar fórmulas y expresiones*: ¿Por qué en esta fórmula se divide entre 2? o ¿Por qué se multiplica por 3?*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En el Anexo se incluyen dos ejemplos más: *Estrellas de fútbol* (anexo 1) y *Cubos agujereados* (anexo 3). Se incluyen producciones de alumnos sobre los patrones encontrados. También se aportan respuestas de los alumnos a la generalización pedida en el problema de *Invito a magdalenas* (anexo 2).

Conclusión

A partir de situaciones competencialmente ricas hemos visto producciones de alumnos que muestran como son capaces de introducirse en el lenguaje algebraico dotándolo de sentido para ellos con poco o ningún conocimiento previo de las reglas algebraicas. A partir de la resolución de problemas, las reglas expresadas ya no son un montón de letras, números y operaciones abstractas sino un lenguaje que pueden aprender de modo intuitivo al intentar expresar la relación matemática que observan en un patrón. Con este planteamiento se da mucho peso al trabajo de la competencia comunicativa ya que los alumnos deben argumentar y justificar a los demás los resultados que han encontrado.

Bibliografía

Boletín Oficial del Estado (BOE) (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 3, 169-546. https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

Burgués, C. (2011). *Constant o variable, el canvi depèn de tu. Relacions i canvi, un bloc fonamental del currículum* [Vídeo]. http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/formacio-creamat/conferencies/771-constant-o-variable-el-canvi-depen-de-tu-relacions-i-canvi-un-bloc-fonamental-del-curriculum-

Burgués, C. i Sarramona, J. (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic Identificació i desplegament a l'ESO*. Generalitat de Catalunya Departament d'ensenyament.

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J. i Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria.* Madrid: Síntesis.

ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO 1 – ESTRELLAS DE FÚTBOL[8]

d) ¿Cuántas trayectorias diferentes de la pelota puede haber en un rondo de 5 jugadores?

e) ¿Sabríais encontrar una manera de determinar el número de trayectorias diferentes para un rondo de cualquier número de jugadores? Indica el resultado para 47 jugadores.

El esquema les ayuda a responder fácilmente la pregunta d).

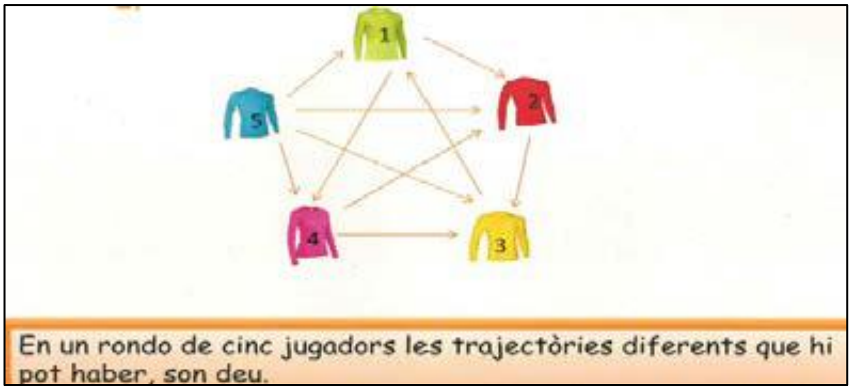


Figura 11

Otros dan una respuesta lógica a partir de las pasadas que puede hacer cada jugador.

El jugador A té 4 opcions de passada
El jugador B té 3 opcions diferents
El jugador C té 2 opcions
El jugador D té 1 sola passada
El jugador E ja no en pot fer cap de difernent
Total: 4+3+2+1= 10 passades

Figura 12

Al hacerlo así, en seguida pueden ver el patrón para la pregunta d) que elevan el número de jugadores a 47 y su generalización para cualquier número de jugadores.

En el siguiente ejemplo encontramos ya una expresión semialgebraica.

També es podria pensar d'una altra manera: cada jugador pot passar a 4 jugadors. Per tant es podrien passar 4x5 vegades, si no fos perquè d'A a cap B és igual a B cap a A. Per tant, hem de dividir per dos. (4x5)/2=10.
És a dir (nº jugadors)x(nº jugadors -1)/2

Figura 13

[8] Enunciado y ficha completa en: http://bancfm.blogspot.com.es/2015/09/estrelles-de-futbol.html

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A partir de aquí se podría trabajar, por ejemplo, la fórmula para sumar los *n* primeros números naturales: $1+2+3+...+n= n\cdot(n+1)/2$.

ANEXO 2 – INVITO A MAGDALENAS[9]

Con 6 tiques, 1 magdalena gratis. (...) ¿Cuántos tiques necesito para cualquier número n de amigos?

La continuación del problema de las magdalenas para un número cualquiera de amigos, está preguntando por la regla que nos permita predecir el número de tiques.

La solución que dan estos alumnos seria la expresión semialgebraica. Lo justifican diciendo que "*el nº de amigos x 6 = nº de tiques que se necesitan*", al que "*hemos de restar el número de amigos (...) si pueden deber*" (se dan cuenta que cada amigo que han invitado a una magdalena, esta tendrá un tique, pero claro el último tique lo "debes" porqué has conseguido la magdalena sin tenerlo, por eso dicen "si puedo deber". Entonces acaban el razonamiento que "*Para saber los tiques necesarios para no deber nada, hemos de sumar 1 al último resultado*". De esta manera obtienen: 6x – x + 1 que sería 5x + 1.

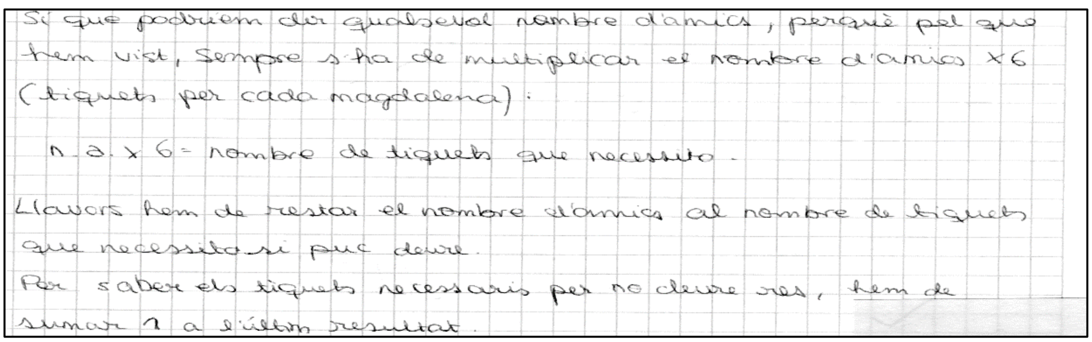


Figura 14

Este sería otro ejemplo que ya expresa la relación con una fórmula:

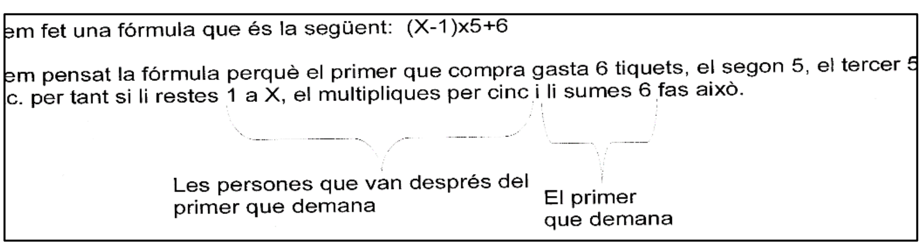


Figura 15

"*Hemos hecho un fórmula que es la siguiente: (X-1)x5+6*

[9] Enunciado y ficha completa en: http://bancfm.blogspot.com.es/2016/01/convido-magdalenes.html

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Hemos pensado la fórmula porqué el primero que compra gasta 6 tiques, el segundo 5, el tercero 5, por tanto si le restas 1 a X, el multiplicas por cinco y li sumas 6 haces esto.". Luego indican que la parte de (X-1)x5 son "*las personas que van después del primero que pide"* y sumar 6 corresponde a "*el primero que pide".*

Notamos como los alumnos han llegado a expresiones equivalentes por razonamientos diferentes con la riqueza que esto nos supone para poder ser trabajada en el aula.

ANEXO 3 – UN CUBO AGUJEREADO[10]

Cogemos un cubo formado por 27 cubitos más pequeños, 3 por arista, y le sacamos las tres filas centrales de cubitos como se muestra en la figura

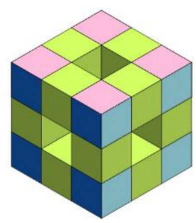


Figura 16

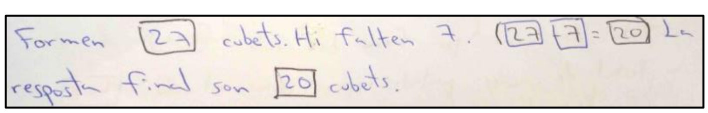
a) ¿Cuántos cubitos forman la figura resultante?

c) ¿Tomemos ahora un cubo formado por 5 cubitos de arista y le sacamos la fila central de cada cara, cuántos cubitos forman la figura resultante?

f) ¿Podéis descubrir qué pasará con un cubo formado por un número impar de cubitos cualesquiera de arista?

Este problema es un buen ejemplo para trabajo del bloque Espacio y forma en 3D. Invita a explorar la búsqueda de un patrón y permite plantear la actividad con material manipulativo (construcciones con cubitos) para ayudar en la abstracción.

Algunos, hacen un recuento ayudándose de la figura que da el enunciado:



Figura

[10] Enunciado y ficha completa en: http://bancfm.blogspot.com.es/2016/06/cubs-foradats.html

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Otros ven una regularidad en cada una de las filas que se sacan y el cubito central: *"20 cubos forman la figura resultante, ya que si en total sacamos 7 (6 cubitos de cada una de las filas y 1 en el que coinciden todas las filas, el punto central del cuadrado) nos quedan 20"*

20 cubets formen la figura resultant, ja que si en total en treiem 7 (6 cubets de cadascuna de les files i 1 en el que coincideixen totes le fileres, és a dir, el punt central del quadrat) ens en queden 20.

27- (2+2+2+1)= 27-7= 20 cubets

Figura 18

Los siguientes dan un paso más en la abstracción de una posible fórmula ya que lo expresan de manera que después se podría aplicar a cualquier medida de cubo (nº arista impar). Se dan cuenta del patrón y lo expresan en lenguaje semialgebraico:

3^3 és el nombre de cubets que estan format el cub, és a dir 27.
Com que traiem les 3 files centrals però aquestes tenen un cubet en comú, diem que en contes de tenir 3 cubets cada fila, té 2. A continuació faríem: $\boxed{3^3-(2\cdot 3+1)= 20}$

Figura 19

Traducción: "*3^3 es el número de cubitos que están formando el cubo, es decir 27. Como que traemos las 3 filas centrales pero estas tienen un cubito en común, decimos que en lugar de tener 3 cubitos cada fila, tiene 2. A continuación haríamos: $3^3 – (2·3+1)=20$*"

Esta sería una semifórmula algebraica. Es un paso importante de abstracción y visualización de las relaciones en el patrón:

[nº de cubets totals] - [(nº de cubets per aresta - 1 cubet comú) · 3 dimensions + 1 cubet comú]

Figura 20

Traducción: "*[nº de cubitos totales] – [(nº de cubitos por arista – 1 cubito en común) · 3 dimensiones + 1 cubito en común]*"

Finalmente, la fórmula. En este caso, faltaría un 6 multiplicando a $\frac{n-1}{2}$

f) Per fer aquest càlcul amb qualsevol nombre imparell de cubets de l'aresta hem fet aquesta formula: (n=nombre de cubets per aresta)

$$n^3 - \left[\frac{n-1}{2} + 1\right]$$

Figura 21

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4