CB-870

CRIANÇAS COMPARANDO PROBABILIDADES EM JOGO COM MOEDAS

Rita Batista – Rute Borba
rita_mat_@hotmail,com – resrborba@gmail.com
Universidade Federal de Pernambuco – Brasil

Núcleo temático: : I – Ensino e aprendizagem da Matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais
Modalidade: CB
Nível educativo: Primário (6 a 11 anos)
Palavras chave: probabilidade; comparação de probabilidades; crianças; jogo.

Resumo

A probabilidade é um conceito bastante complexo que exige algumas demandas cognitivas que envolvem a compreensão da aleatoriedade, do espaço amostral, da comparação e quantificação de probabilidades e das correlações (Bryant e Nunes, 2012). O recorte do estudo explora a compreensão de crianças acerca da comparação de probabilidades de eventos com mesma chance ou com chances diferentes de ocorrência, utilizando-se o jogo Passeios Aleatórios da Rute (PAR). O estudo foi realizado com 36 crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental por meio de uma entrevista clínica individual. Problemas de probabilidade repousam sobre o cálculo de proporções, mas há casos que podem ser resolvidos considerando relações simples de 'mais' e 'menos' a partir da análise do espaço amostral. Em relação à chance igual de ocorrência de eventos, 22% dos estudantes julgaram adequadamente a situação. No que concerne chances diferentes, mais de 52% responderam corretamente. Em ambos os casos, poucos alunos apresentaram justificativas coerentes. Houve gradação na qualidade das justificativas apresentadas pelas crianças em relação à faixa etária e observou-se que o jogo PAR pode possibilitar ampliação da compreensão de crianças em início de escolarização acerca da comparação de probabilidades.

Introdução

Nos últimos tempos, o ensino da probabilidade e a sua relação com a vida cotidiana tem suscitado discussões, especialmente porque os estudiosos apontam a necessidade permanente dos indivíduos em realizar julgamentos, fazer escolhas a partir de análises, tirar conclusões e tomar decisões que são imprescindíveis para a vida em sociedade. E, para tal, a probabilidade é imprescindível. Assim, há uma forte defesa amparada por estudos teóricos e empíricos, para a viabilidade, desde os anos iniciais, do ensino da probabilidade nas escolas, em função de sua relevância social.

ISBN 978-84-945722-3-4

Gal (2004), defende que a probabilidade é uma parte da Estatística e da Matemática, importantes áreas de conhecimento para se aprender, porquanto, direito próprio e essencial na educação moderna. Serve, ainda, de suporte para assuntos avançados, como amostragem e inferência estatística; além de ser fundamental para formar o aluno para a vida, considerando que, ocorrências aleatórias permeiam nosso dia a dia.

No cotidiano das pessoas, as noções a respeito da probabilidade, incertezas e riscos aparecem com frequência e é necessário interpretar, reagir ou lidar com situações que envolvem elementos probabilísticos de diferentes níveis de (im)previsibilidade. Muitas vezes é importante, para a tomada de decisões, a realização de estimativas de certos eventos, independente do conhecimento formal em probabilidade que o indivíduo possua.

Ao longo da história, o conceito de probabilidade recebeu diferentes interpretações. Batanero, Henry e Parzysz (2005), apud Batanero e Diaz (2007), apontaram os diferentes significados da probabilidade, destacando: *o intuitivo, o clássico, o frequentista, o subjetivo, o de propensão, o lógico e o axiomático*. Exploraremos apenas o *significado intuitivo* por apresentar maior proximidade com o recorte da pesquisa aqui apresentada. Para estes autores, o *significado intuitivo da probabilidade* se refere a ideias intuitivas relacionadas à possibilidade e à probabilidade. Estas ideias surgem desde muito cedo em crianças e podem estar ainda presentes no pensamento de adultos que não tiveram educação formal. É comum a utilização de palavras ou expressões qualitativas como “provável”, “improvável”, “impossível”, entre outras que expressam graus de crença na ocorrência de eventos aleatórios. As ideias intuitivas são naturais e, por vezes, muito imprecisas. Assim, as pessoas atribuem valores aos eventos incertos, como forma de comparar as suas probabilidades em um vasto mundo de incertezas.

Bryant e Nunes (2012), julgam a probabilidade um conceito bastante complexo e que para sua compreensão se faz necessário o atendimento a quatro exigências cognitivas: i) compreender a natureza e as consequências da aleatoriedade; ii) formar e categorizar espaços amostrais; iii) comparar e quantificar probabilidades; e iv) entender correlações.

A primeira exigência cognitiva considera que é preciso, inicialmente, reconhecer que o problema é sobre dados que são incertos, que envolvem elementos aleatórios, a segunda exigência, trata de refletir sobre os eventos que compõem o espaço amostral, já a terceira,

ISBN 978-84-945722-3-4

exige o cálculo de probabilidades, que são quantidades baseadas em proporções, e por fim, a quarta exigência que nem sempre é necessária, exige a observância das três exigências anteriores.

Focaremos neste artigo, mais a terceira demanda cognitiva, pois se refere ao recorte realizado neste momento. Bryant e Nunes (2012) defendem que boa parte dos problemas envolvendo probabilidade são assentados sobre o cálculo de uma ou mais proporções. No entanto, o raciocínio proporcional é, quase sempre, difícil para as crianças e esta dificuldade parece ser ainda mais acentuada quando se trata de comparar duas ou mais probabilidades. Em nosso estudo, consideraremos situações que podem ser resolvidas com base nas relações simples de 'mais' e 'menos' a partir da análise das possibilidades de formação dos eventos, ou seja, realizando comparação do espaço amostral.

Procedimentos e Métodos

Utilizamos neste estudo, jogos, dos quais um que foi denominado *Passeios Aleatórios da Rute* (PAR) (Figura 1). Na perspectiva apresentada neste texto, "os jogos devem ser encarados como situações-problema a partir das quais podem ser tratados conceitos e relações matemáticas relevantes para o ensino básico" (PERNAMBUCO, 2012, p.35). Dessa forma, o que caracteriza o jogo matemático é seu aspecto lúdico com a garantia de: i) aparência divertida, que pode imitar a realidade; ii) característica curiosa e que envolve surpresas; e iii) ser desafiador (Critton, 1997, apud Muniz, 2010). Nas situações de jogo, a criança fica motivada e envolvida, assim "percebe-se o quanto ela desenvolve sua capacidade de fazer perguntas, buscar diferentes soluções, repensar situações, avaliar suas atitudes, encontrar e reestruturar novas relações, ou seja, resolver problemas (Grando, 2000; p.20).

ISBN 978-84-945722-3-4

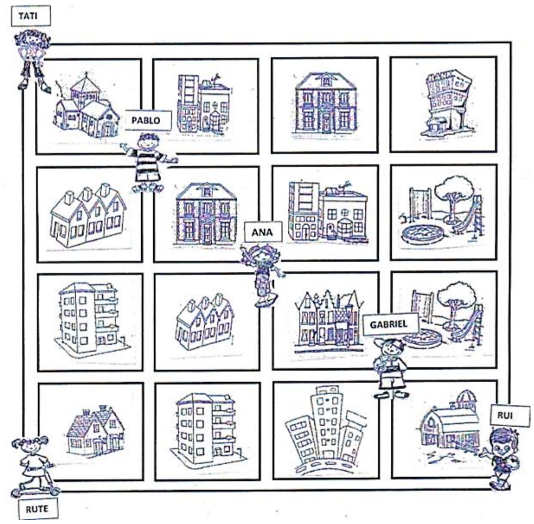

Figura 1: Passeios Aleatórios da Rute (Silva, 2016)

O jogo Passeios Aleatórios da Rute foi adaptado do jogo Passeios Aleatórios da Mônica proposto inicialmente por Fernandez e Fernandez (1999) em um estudo sobre a distribuição binomial no Ensino Superior, e, posteriormente, adaptado por Cazorla e Santana (2006) para o ensino de probabilidade na Educação Básica.

No jogo, Rute pretende visitar os amigos: Tati, Pablo, Ana, Gabriel e Rui e, para tal, resolveu criar uma estratégia utilizando uma moeda. Ao sair de casa, ela lança uma moeda, se sair *cara* ela segue no sentindo leste (em frente) e se sair *coroa* ela segue no sentido norte (para cima). Em cada esquina do quarteirão, Rute lança a moeda novamente para saber que percurso seguir. Após o lançamento da moeda quatro vezes ela chega a um dos amigos. Assim, ela não sabe previamente qual amigo visitará.

No que concerne à compreensão das crianças acerca da *comparação de probabilidades*, trabalhamos com duas perguntas norteadoras que focaram *chances iguais* de ocorrência de um evento e *chances diferentes.* A partir de uma entrevista individual, baseada no Método Clínico Piagetiano[32], as 36 crianças (1º, 3º e 5º anos do Ensino Fundamental) foram questionadas, após terem a oportunidade de entender o jogo e jogar algumas rodadas, sobre a comparação de dois eventos. Foi solicitado que elas escolhessem qual teria maior, igual ou menor probabilidade de acontecer, justificando suas respostas. Nas questões propostas, esperava-se que as

[1] -Teste que tem como finalidade “compreender como o sujeito pensa, como analisa situações, como resolve problemas, como responde às contra-sugestões do examinador” (CARRAHER, 1998, p.7).

ISBN 978-84-945722-3-4

crianças analisassem os casos favoráveis e não a relação desses com os casos possíveis (relação parte-todo), uma vez que este tipo de relação proporcional é mais difícil de ser compreendido.

Resultados e discussões

Para refletir sobre *chance igual* utilizou-se a seguinte pergunta norteadora: *Há mais caminhos para Rute encontrar Pablo ou Gabriel? Por quê?*

Ao lançar a moeda quatro vezes, há 16 resultados possíveis, dos quais para encontrar Gabriel é necessário sair *três caras e uma coroa*, em qualquer ordem. Já para chegar em Pablo, é preciso sair qualquer ordem da sequência que possua *três coroas e uma cara*. Assim, para cada um dos amigos, Rute tem quatro caminhos distintos, ou seja, as chances de visitar Gabriel é a mesma de visitar Pablo: 4 chances em 16 (4/16).

Como as crianças dispunham do desenho do jogo e de lápis para tracejar possíveis caminhos, imaginávamos que elas atentassem para a quantidade de percursos possíveis (possibilidades) para Rute chegar tanto a Gabriel quanto a Pablo e, assim, concluíssem que ambos tinham a mesma chance de serem visitados. A Tabela 1 mostra as escolhas feitas pelas crianças, na qual observa-se que a maioria julgou que Gabriel teria mais chance de ser visitado (aproximadamente 56%).

Tabela 1: Número de crianças por respostas dadas (por ano escolar) acerca da comparação de chance igual no jogo PAR

Ano	Há mais caminhos para Rute encontrar Pablo ou Gabriel?		
	Pablo	**Gabriel**	**Os dois**
1º ano	4	8	0
3º ano	1	6	5
5º ano	3	6	3

Fonte: Silva (2016)

É possível que a posição de Gabriel no desenho tenha motivado algumas escolhas. No desenho, Rute está num patinete voltada para o lado em que Gabriel se encontra e Pablo está mais ‘acima’ dela. Pode ter parecido natural para as crianças julgar que mais fácil chegar em Gabriel do que em Pablo, a partir da análise iconográfica e não probabilística da situação. Muitas vezes as crianças dissociam o jogo de suas regras e respondem ao que estava sendo indagado baseando-se em outros parâmetros.

ISBN 978-84-945722-3-4

Os alunos do 1º ano justificaram à indagação, quase sempre, considerando a análise da distância "é mais perto", "é mais longe", além de considerarem também a recente experiência vivenciada no jogo: "porque chegou mais vezes nesse quando joguei". Houve crianças que traçaram alguns caminhos com o dedo ou com o lápis e, embora tenham justificado erradamente, sinalizaram compreensões que poderiam ser usadas para explorar os espaços amostrais, como no exemplo de Pedro[33] que informou: "porque ela chega duas vezes aqui e uma aqui".

No 3º ano, 50% das crianças afirmaram que Gabriel teria mais chance de ser visitado que Pablo. Mesmo com respostas equivocadas, as justificativas apresentaram mais coerência acerca da análise dos espaços amostrais na comparação de probabilidades do que as crianças do 1º ano. Para exemplificar, trazemos o diálogo com Ana:

Pesquisadora: Quais os caminhos para chegar em Pablo?
Ana: Tem esse assim e esse assim (mostra dois jeitos, apontando com o dedo no desenho)
Pesquisadora: E pra chegar em Gabriel?
Ana: Tem esse assim, esse assim ou esse assim (mostra três caminhos)
Pesquisadora: Então, tem mais chance de chegar em Pablo ou Gabriel?
Ana: Em Gabriel! (falou com convicção).

Apesar de ter errado a resposta, Ana estabeleceu uma comparação entre os caminhos de se chegar a Gabriel e a Pablo. Imaginamos que com mais tempo de jogo, intervenções, registros, indagações e questionamentos, alunos no estágio de Ana podem avançar na compreensão referente ao tema em discussão.

No 5º ano, metade das crianças julgou que havia mais chance de chegar em Gabriel, utilizando-se de argumentos que se apoiavam na experiência do jogo, tais como: "*porque sempre sai cara*", *"porque bateu em Gabriel mais vezes quando joguei".*

André, uma criança do 5º ano, julgou, inicialmente, que Gabriel teria mais chance. No entanto, quando foi justificar sua resposta fazendo percursos, percebeu, considerando a 'geografia' do jogo, que as chances eram iguais. Apesar de não justificar corretamente, André apresentou indícios de compreensão. O diálogo, que segue, aponta a mudança de resposta de André.

Pesquisadora: Tu achas que tem mais caminhos pra Rute encontrar Pablo ou Gabriel?
André: Gabriel.
Pesquisadora: Por que tu achas que é Gabriel?

[33] Os nomes das crianças apontados neste artigo são fictícios para preservar suas identidades.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

André: Porque ela vem aqui, aqui, aqui e aqui. E ela veio aqui, aqui, aqui e aqui (aponta no desenho dois caminhos possíveis).
Pesquisadora: E Pablo?
André: Ela vem aqui, aqui, aqui e aqui (mostra um caminho)
Pesquisadora: Então, tu achas que ela tem mais caminhos de chegar em Pablo ou Gabriel?
André: Gabri... (fica pensativo olhando o tabuleiro do jogo e não conclui o que estava dizendo).
Pesquisadora: Acha ou é a mesma quantidade de caminhos? Mais pra Pablo, mais pra Gabriel ou é a mesma coisa?
André: É a mesma coisa.
Pesquisadora: Por quê?
André: Porque aqui tem três casinhas e aqui tem três. Aqui é só ele virar pra esquina e aqui também.

Felipe, outra criança do 5º ano, respondeu que "*as expectativas são as mesmas porque tem quatro caminhos*" para Rute chegar em cada amigo. Ele percebeu rapidamente todas as possibilidades de caminhos para chegar, tanto em Pablo quanto em Gabriel, não havendo necessidade de intervenção da pesquisadora. A maioria dos alunos realizou a comparação de probabilidades sem considerar a análise das possibilidades de formação do evento que compõem o espaço amostral. No entanto, observamos que houve indícios de compreensão acerca da comparação de probabilidades considerando a análise desses eventos.

Para refletir sobre *chances diferentes*, perguntamos às crianças: *todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados? Por quê?*

Para chegar tanto em Tati como em Rui as chances são de 1 em 16 (Tati - quatro coroas; Rui - quatro caras*)*. Como já visto anteriormente, para visitar Gabriel ou Pablo as chances são de 4 em 16. Por fim, o amigo que tem mais chance de ser visitado é Ana (6 em 16), podendo sair qualquer ordem da sequência que envolva duas caras e duas coroas. Logo, as chances dos amigos serem visitados são diferentes, embora sejam iguais se compararmos algumas duplas, como Tati e Rui ou Gabriel e Pablo.

Imaginamos que as crianças pensariam sobre a quantidade de caminhos para Rute chegar em alguns dos amigos, e não exatamente sobre todas as possibilidades em termos de organização sequencial de caras e coroas. A Tabela 2 aponta o julgamento das crianças acerca do questionamento sobre chances diferentes.

Tabela 2: Número de crianças por respostas dadas (por ano escolar) acerca da comparação de chance igual no jogo PAR

ISBN 978-84-945722-3-4

Ano	Todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados?	
	SIM	**NÃO**
1º	4	8
3º	6	6
5º	7	5

Fonte: Silva (2016)

A maioria dos alunos do 1º ano informou que as chances eram diferentes, no entanto as justificativas se referiram, quase sempre à proximidade e não à comparação de probabilidades, como por exemplo: *" Rui tem mais chance porque tem que ir direto",* "*alguns têm mais chance: Tati, porque num instante ela chega aqui"*.

Semelhantemente ao 1º ano, houve alunos do 3º ano que relacionaram a situação à proximidade: "*Tati tem mais chance porque chega mais rápido"*, "*Rui porque tá mais perto*". Carlos foi o único aluno do 3º ano que fez referência aos lados da moeda para justificar sua resposta, embora tenha apresentado uma resposta incorreta: *"Todos têm a mesma chance (...). Tô pensando, por causa que pode tirar cara ou coroa".*

A maioria dos alunos do 5º ano acreditou que todos os amigos teriam a mesma chance de serem visitados. No entanto, apesar da resposta equivocada, algumas justificativas consideraram não apenas a quantidade de percursos mas, também, a relação com o lançamento das moedas. Maria informou: "*aí é diferente, o joguinho funciona com uma moeda girando para ver onde sai. Aí tem vez que não sai alguns coleguinhas dela. Só apenas poucos colegas ela pode visitar: Pablo, Ana e Gabriel são os mais visitados*".

Considerações finais

Percebeu-se uma gradação na qualidade das justificativas apresentadas pelas crianças: os alunos do 1º ano não conseguiram relacionar os percursos ao lançamento das moedas; os do 3º ano, apesar de usarem a relação perto-longe, houve um discreto avanço nos argumentos, apresentando inclusão dos lados da moeda e comparação de percursos; no 5º ano, a relação com os lados da moeda e também com a comparação dos distintos percursos estiveram mais presentes.

As percepções das crianças são muito intuitivas e fundamentadas, algumas vezes, na recente experiência do jogo. Assim, poucas crianças refletiram conscientemente sobre os elementos dos eventos que fazem parte do espaço amostral para estabelecer a comparação de

ISBN 978-84-945722-3-4

probabilidades. A partir do observado com o jogo PAR, imagina-se que os jogos como intervenção pedagógica podem contribuir para uma maior compreensão acerca de muitas demandas da probabilidade, incluindo a comparação de probabilidades.

Com o estudo, observamos que as crianças apresentaram discursos que possibilitam acreditarmos que as intuições que elas trazem sobre probabilidade, aliadas ao desenvolvimento de jogos, intervenções e reflexões, podem ampliar o entendimento primário para compreensões mais elaboradas de alguns elementos da probabilidade como é o caso da comparação de probabilidades.

Referências

Batanero, C. Diaz, C. (2007) Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. In JP.Van Bendengen y K. François (Eds); Philosophical Dimensions in Mathematics Education (p. 107-128). New York: Springer.

Batanero, C., Henry, M., & Arzysz, B. (2005). *The nature of chance and probability*. In G. A. Jones (Ed.) Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (15-37). New York: Springer. Bellhouse, D. R.

Bryant, P. Nunes, T. (2012) *Children's understanding of probability*: a literature review. Nuffield Foundation.

Carraher, T. N. (1998) *O método clínico usando os exames de Piaget*. 5. Ed. São Paulo: Cortez.

Cazorla, I. & Santana, E. (2006). *Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio*. Itabuna, BA: Via Litterarum.

Criton, M. (1997). *Les jeaux mathématiques*. Paris: PUF.

Gal, I. (2004). *Towards 'probability literacy' for all citizens*. In G. Jones (ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers.

Grando, R. C. (2000). *O conhecimento e o uso de jogos na sala de aula***.** Tese. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas, SP.

Muniz, C. A. (2010) *Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Pernambuco. (2012) *Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco*: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Secretaria de Educação. UNDIME:PE.

ISBN 978-84-945722-3-4