# Teoría de Grafos (Segunda Parte)

*Ana María Teresa Lucca*

El primer paper en teoría de grafos surgió en 1736 y se debió a Leonhard Euler (1707-1783). Este matemático suizo estaba intrigado por un acertijo popular suscitado en Köningsberg. El río inunda la ciudad y se abre en ramas alrededor de una isla. Varios puentes cruzan el río (Figura 1*a*). El acertijo consistía en decidir si una persona podía pasear por la ciudad cruzando cada puente sólo una vez. En teoría es posible responder a la cuestión listando todos los caminos posibles. La idea de Euler fue representar la situación mediante un grafo (Figura 1*b*) donde los puentes son aristas y los vértices son regiones. Él entonces resolvió la situación viendo

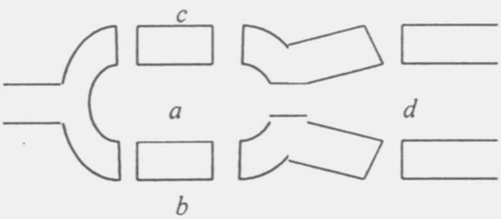


Figura 1*a*

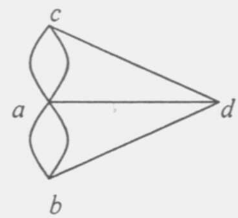


Figura 1*b*

cuántos "pasos de Euler" había en el grafo.

**Definición 1.** Un ***paso de Euler*** en un grafo *G* es un paso que usa cada arista de *G* exactamente una vez.

Asumiremos que todos los grafos son conexos, pues en otro caso generalmente no existen pasos de Euler.

Supongamos un grafo que tiene un vértice impar $v$ de grado $2k + 1$ y que existe un paso de Euler en él. Entonces para cada arista que se usa para entrar a $v$ existe una arista para dejarlo, hasta usar $2k$ aristas. La próxima vez que se entre a $v$, no se podrá salir, por tanto el paso elegido deberá terminar en $v$, en el caso que no se comience en $v$. Si se comienza en $v$, el paso no terminará en $v$. Luego, para elegir el paso de Euler en el grafo se debe salir o terminar en $v$. Ahora, si existen dos vértices impares en un grafo, se deberá comenzar en uno y terminar en el otro para que el paso sea de Euler. Si hay más de dos vértices impares en el grafo, no puede existir paso alguno en el sentido de Euler, pues de uno de los vértices impares no se tendrá salida. Así, hay dos casos posibles en los que puede existir un paso de Euler: en un grafo sin vértices impares, o en uno con dos vértices impares.

**Teorema 1.** Un paso de Euler en un grafo conexo existe si y sólo si existen dos vértices impares o ningún vértice impar.

**Dem.** Consideremos primero que el grafo $G$ es conexo y no tiene vértices impares. Supongamos que no existe un paso de Euler. Trabajaremos con un grafo $G$ de este tipo con el menor número de aristas. $G$ debe tener más de un vértice, de lo contrario tendría sólo un vértice de grado par y existiría un paso de Euler, contradiciendo lo supuesto. Sea $v$ un vértice de $G$. Como el grado de $v$ es al menos dos y $G$ es conexo, deben existir distintas aristas entre $v$ y dos vértices $a$ y $b$, que podrían ser iguales. Como $G$ es conexo, existe un paso de $a$ hacia $b$; digamos $(a, v_1, v_2, ..., b)$. Luego $(v, a, v_1, v_2, ..., b, v)$ es un ciclo. Esto muestra que existe un ciclo de $v$ a $v$. Sea $C = (v, ..., v)$ el ciclo más largo posible de $v$ a $v$. Como $G$ no tiene un paso de Euler, este ciclo no utiliza todas las aristas de $G$. Sea $G'$ el grafo que se obtiene eliminando aquellas aristas de $C$ en $G$. Como $C$ era un ciclo, al eliminar estas aristas se reduce el grado de cada vértice en 0 o en 2, obteniendo un grafo $G'$ en el cual todos los vértices son pares. Este grafo podría no ser conexo, pero alguna de sus partes si lo será. Consideremos entonces la parte conexa más grande de $G'$. Como supusimos que $G$ era el menor grafo conexo en el cual todos los vértices eran pares y que no tenía un paso de Euler, $G'$ debe tener un paso de Euler $C''$. Así, $C''$ contiene a todos los vértices de $G$ (lo cual no es posible) o existe algún vértice $v$ de $G$ que no está en $C''$. En este último caso, como $v$ debe ser adyacente a algún $v'$ en $C''$, pues $G$ es conexo, la arista que une $v$ y $v'$ debe ser una de las que fue eliminada, es decir, es una arista de $C$. Esto prueba que algún vértice $v'$ en $C''$ es también vértice de $C$, de modo que se puede construir un ciclo de mayor longitud en $G$ uniendo $C$ con $C''$ a través de $v'$. Pero esto contradice el hecho de que $C$ es el mayor ciclo posible en $G$. Por lo tanto, no existe tal $G$. Esto prueba que existe un paso de Euler.

Supongamos ahora que el grafo $G$ posee dos vértices impares $v_1$ y $v_2$. Al agregar al grafo $G$ la arista que une estos vértices se obtiene un grafo conexo cuyos vértices son todos pares. Por el caso anterior resulta que existe un paso de Euler $C'$ en este grafo. Eliminando la arista agregada se obtiene un paso de Euler en el grafo original.

El resto de la demostración resulta de lo observado antes de enunciar este teorema.

c.q.d.

De acuerdo a este teorema, el paso de Köningsberg no es posible, pues posee cuatro vértices impares lo que implica que no existe un paso de Euler. Así, es imposible realizar un paseo por toda la región pasando una única vez por cada puente.

El Teorema 1 es un algoritmo para determinar si un paso de Euler existe en un grafo conexo. A continuación se presenta el pseudocódigo del mismo. La esencia es calcular el número de vértices adyacentes a cada vértice, y determinar si éste es un número par o impar. Si existen más de dos vértices impares, no existe un paso de Euler.

En el algoritmo se ingresa un grafo conexo $G$ representado por la matriz de adyacencia $A$ de $n \times n$, y se da como resultado (salida) si existe un paso de Euler. IMPAR es una variable que guarda el número de vértices impares que se encuentran en el grafo. El grado del vértice, GRADO, se encuentra sumando los elementos de la fila de la matriz de adyacencia correspondiente a cada vértice, y cada uno de estos números da el número de vértices adyacentes al vértice en cuestión.

**ALGORITMO: PASO DE EULER**

1. IMPAR   0
2. $i$   1
3. **Mientras** IMPAR   2 e $i$   $n$ **hacer**

   **comienzo**

   4. GRADO   0
   5. **Para** $j = 1$ **hasta** $n$ **hacer**

   **comienzo**

   6. GRADO   GRADO + $a_{ij}$

   **fin**

   7. **Si** GRADO es impar **entonces** IMPAR   IMPAR + 1
   8. $i$   $i + 1$

   **fin del mientras**

9. **Si** (IMPAR = 0 o IMPAR = 2) **entonces** escribir "Sí, existe un paso de Euler."

   **sino** escribir "No existe un paso de Euler."

Analicemos este algoritmo. En el peor de los casos, el lazo **mientras** de la línea 3 debe ser ejecutado $n$ veces (eligiendo una fila). Entre cada ejecución de este lazo, el de la línea 5 requiere $n$ ejecuciones (eligiendo una columna entre esa fila). Así, existen $n \cdot n = n^2$ elementos por analizar. Para aquellos que estén familiarizados con el análisis de algoritmos, lo que estamos diciendo es que el número de operaciones requeridas por el algoritmo de Pasos de Euler es $O(n^2)$.

**Definición 2.** Un ***ciclo de Euler*** es un paso de Euler que es también un ciclo.

**Teorema 2.** Un grafo $G$ posee un ciclo de Euler si y sólo si $G$ es conexo y todo vértice tiene grado par.

**Dem.** Supongamos que $G$ posee un ciclo de Euler. Esto significa que existe un ciclo que utiliza cada arista de $G$ exactamente una vez. Afirmamos que no existen vértices impares en $G$. Para probarlo, supongamos que al menos un vértice de $G$ es impar. Si el ciclo comienza en él, una vez que todas sus aristas sean recorridas quedaremos fuera de este vértice, lo cual contradice la idea de ciclo. Si el ciclo no comienza en él, una vez utilizadas todas sus aristas nos atascaremos en este vértice, pues no contaremos con una arista de salida y nuevamente estaremos contradiciendo la definición de ciclo. Así, todo vértice en $G$ posee grado par. Si $v$ y $w$ son vértices en $G$, la porción del ciclo de Euler que tomamos de $v$ a $w$ sirve como un paso entre estos vértices. Por lo tanto, $G$ es conexo.

Para probar la recíproca, procederemos por inducción sobre $n$, el número de aristas en $G$.

Para $n = 0$, como $G$ es conexo, si $G$ no tiene aristas, $G$ consta de solamente un vértice. Así, existe un ciclo de Euler formado por un solo vértice y ninguna arista.

Supongamos ahora que $G$ tiene $n$ aristas, con $n > 0$, y que cualquier grafo conexo con $k$ aristas, $k < n$, en el cual todo vértice tiene grado par posee un ciclo de Euler.

Resulta muy sencillo verificar que un grafo conexo con uno o dos vértices, cada uno de grado par, tiene un ciclo de Euler, por lo que supondremos que el grafo tiene al menos tres vértices.

Como $G$ es conexo, existen vértices $v_1$, $v_2$ y $v_3$ en $G$ con aristas $a_1$ incidente en $v_1$ y $v_2$ y arista $a_2$ incidente en $v_2$ y $v_3$ . Eliminando las aristas $a_1$ y $a_2$, pero ningún vértice, y agregando una arista $a$ incidente en $v_1$ y $v_3$ obtendremos un grafo $G'$. Cada componente del grafo $G'$ tiene menos de $n$ aristas, y en cada componente del grafo $G'$ todo vértice tiene grado par. Mostraremos que $G'$ tiene o una o dos componentes.

Sea $v$ un vértice. Como $G$ es conexo, existe un paso $P$ en $G$ desde $v$ a $v_1$ . Sea $P'$ la porción del paso $P$ que comienza en $v$ y cuyas aristas están también en $G'$. Ahora $P'$ finaliza en $v_1$, $v_2$ o $v_3$, pues para determinar $G'$ hemos eliminado en $G$ las aristas $a_1$ y $a_2$. Si $P'$ termina en $v_1$, entonces $v$ está en la misma componente que $v_1$ en $G'$. Si $P'$ finaliza en $v_3$, entonces $v$ está en la misma componente que $v_3$ en $G'$, que está en la misma componente que $v_1$ en $G'$ (dado que $a$ en $G'$ es incidente en $v_1$ y $v_3$). Si $P'$ termina en $v_3$, entonces $v_2$ está en la misma componente que $v$. Por lo tanto, cualquier vértice en $G'$ está en la misma componente que $v_1$ o $v_2$. Así, $G'$ tiene una o dos componentes.

Si $G'$ tiene una componente, esto es, si $G'$ es conexo, podemos aplicar la hipótesis inductiva para concluir que $G'$ tiene un ciclo de Euler $C'$. Éste puede ser modificado para producir un ciclo de Euler $C$ en $G$ como sigue: reemplazamos la arista $a$ en $C'$ por las aristas $a_1$ y $a_2$.

Si $G'$ tiene dos componentes, por hipótesis inductiva, la componente que contiene a $v_1$ tiene un ciclo de Euler $C'$ y la componente que contiene a $v_2$ tiene un ciclo de Euler $C''$ que comienza y termina en $v_2$. Para obtener un ciclo de Euler en $G$

procedemos del siguiente modo: modificamos $C'$ reemplazando $(v_1, v_3)$ por $(v_1, v_2)$, le unimos $C''$, y por último le agregamos $(v_2, v_3)$.

El paso inductivo es así completado, resultando que $G$ tiene un ciclo de Euler.

c.q.d.

Con *Mathematica* es posible hallar, si existe, un ciclo de Euler en un grafo o en un digrafo. Recuerde que para utilizar estos comandos debe cargar previamente el paquete necesario, que se especificó en la entrega anterior.

| |
|---|
| **EulerianCycle**[*g*] encuentra, si existe, un ciclo de Euler para el grafo (no dirigido) *g*. |

| |
|---|
| **EulerianCycle**[*g*, **Directed**] encuentra, si existe, un ciclo de Euler para el digrafo *g*. |

Es claro que resultaría útil reconocer antes si el grafo o digrafo contiene un ciclo de Euler. Para ello *Mathematica* cuenta con los siguientes comandos:

| |
|---|
| **EulerianQ**[*g*] devuelve True (verdadero) si el grafo (no dirigido) *g* posee un ciclo de Euler. |

| |
|---|
| **EulerianQ**[*g*, **Directed**] devuelve True (verdadero) si el digrafo *g* posee un ciclo de Euler. |

Otro famoso matemático, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) estableció un rompecabezas a mediados de 1800 en forma de dodecaedro (ver Figura 3). Cada esquina tenía el nombre de una ciudad y el problema consistía en comenzar en una ciudad cualquiera, y viajando a lo largo de las aristas, visitar cada ciudad exactamente una vez, retornando a la ciudad inicial. El grafo de las aristas del dodecaedro se muestra en la Figura 4. Para resolverlo, basta hallar un ciclo en el grafo de la Figura 4 que contenga a cada vértice exactamente una vez (excepto el vértice de inicio y fin que aparecerá dos veces). La Figura 5 provee una visualización de la solución.

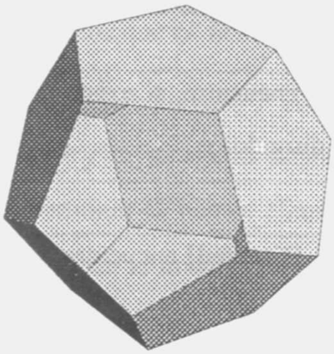

Figura 3

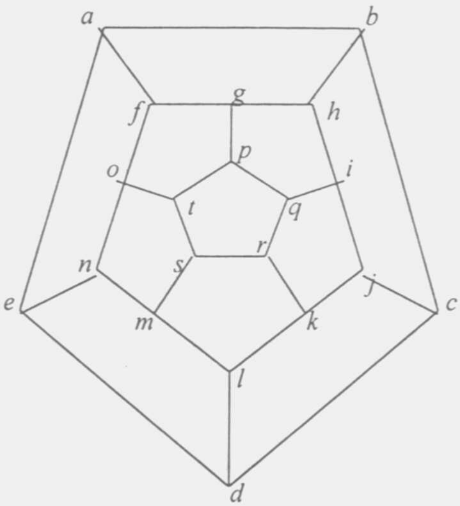


Figura 4

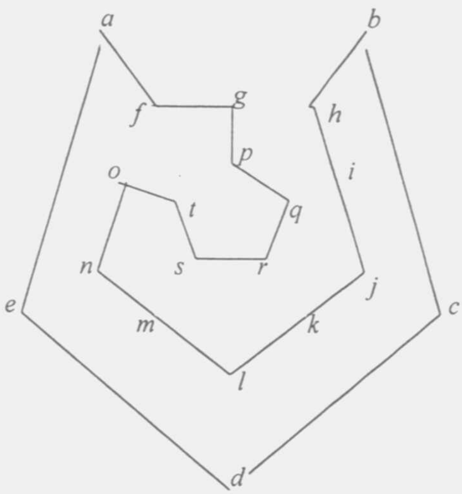


Figura 5

**Definición 3.** Un *ciclo de Hamilton* en un grafo $G$ es aquel ciclo que contiene a cada vértice de $G$ exactamente una vez, excepto el caso del vértice inicial y final que aparece precisamente dos veces.

En lo que sigue supondremos que $G$ es un grafo conexo con $n$ vértices, $n > 2$, sin lazos cerrados ni aristas múltiples. Los siguientes teoremas nos proporcionarán métodos para construir un ciclo de Hamilton.

**Teorema 3.** Un grafo $G$ tiene un ciclo de Hamilton si para cualesquiera dos vértices $v_1$ y $v_2$ de $G$ que no sean adyacentes, el grado de $v_1$ más el grado de $v_2$ es mayor o igual que $n$; esto es, $\delta(v_1) + \delta(v_2) \quad n$.

Omitiremos la demostración de este resultado, pero mediante él puede demostrarse lo siguiente:

**Corolario 1.** Un grafo $G$ tiene un ciclo de Hamilton si cada vértice tiene grado mayor o igual que $n/2$.

**Dem.** Por hipótesis, la suma de los grados de cualesquiera dos vértices es al menos $n/2 + n/2 = n$, de modo que el grafo $G$ satisface las hipótesis del Teorema anterior. Así, $G$ tiene un ciclo de Hamilton.

c.q.d.

**Teorema 4.** Sea $m$ el número de aristas de $G$. Entonces el grafo $G$ tiene un circuito de Hamilton si $m \quad 1/2\,(n^2 - 3n + 6)$.

**Dem.** Supongamos que $v_1$ y $v_2$ son cualesquiera dos vértices no adyacentes de $G$. Sea $G'$ el grafo que se obtiene a partir de $G$ eliminando $v_1$ y $v_2$ junto con las aristas que tienen a $v_1$ y a $v_2$ como extremos. Entonces $G'$ tiene $n - 2$ vértices y $m - \delta(v_1) - \delta(v_2)$ aristas (habría que eliminar una arista más si $v_1$ y $v_2$ fueran adyacentes). El número máximo de aristas que $G'$ podría tener es $\binom{n-2}{2}$. Esto sucede cuando existe una arista que conecta a cada pareja distinta de vértices. Por lo tanto, el número de aristas de $G'$ es a lo sumo

$$\binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} \quad \text{o} \quad \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$$

Entonces, se tiene $m - \delta(v_1) - \delta(v_2) \quad 1/2\,(n^2 - 5n + 6)$. Así, $\delta(v_1) + \delta(v_2) \quad m - 1/2\,(n^2 - 5n + 6)$. Por la hipótesis del teorema resulta

$$\delta(v_1) + \delta(v_2) \quad 1/2\,(n^2 - 3n + 6) - 1/2\,(n^2 - 5n + 6) = n,$$

y el resultado es consecuencia inmediata del Teorema 3.

c.q.d.

Nótese que los recíprocos de estos teoremas no son válidos.

**Ejemplo 1.** Considere el grafo de la Figura 6. En este caso el número de vértices es $n = 8$, cada vértice es de grado 2 y $\delta(v_1) + \delta(v_2) = 4$ para cada pareja de vértices no adyacentes $v_1$ y $v_2$. El número de aristas es también 8. Así, las hipótesis de los teoremas 3 y 4 no son satisfechas, sin embargo existen ciclos de Hamilton para este grafo.

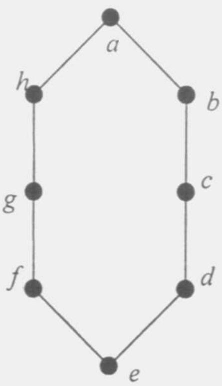


Figura 6

Con ***Mathematica*** podemos también determinar si un ciclo es de Hamilton e incluso encontrar, si existe, tal ciclo para un grafo dado, ya sea dirigido o no dirigido, del mismo modo que ocurría para el ciclo de Euler. A continuación listamos los comandos necesarios.

| |
|---|
| **HamiltonianCycle**[*g*] encuentra, si existe, un ciclo de Hamilton para el grafo (no dirigido) *g*. |

| |
|---|
| **HamiltonianCycle**[*g*, **Directed**] encuentra, si existe, un ciclo de Hamilton para el digrafo *g*. |

| |
|---|
| **HamiltonianQ[*g*]** devuelve True (verdadero) si el grafo (no dirigido) *g* posee un ciclo de Hamilton. |

| |
|---|
| **HamiltonianQ[*g*, Directed]** devuelve True (verdadero) si el digrafo *g* posee un ciclo de Hamilton. |

Por último presentaremos el problema de coloración de mapas, que surgió a mediados del siglo XIX, y algunos teoremas útiles cuando se estudia este caso. En ese entonces se pensaba que bastaban cuatro colores para colorear cualquier mapa dibujado en un plano, de tal modo que no existan dos regiones distintas que compartan una frontera común con el mismo color. En 1976 se demostró que esta conjetura era cierta, con la ayuda de cálculos realizados gracias al potencial de las computadoras modernas.

Para modelar este problema a través de un grafo se procede del siguiente modo. Supongamos por ejemplo que deseamos colorear el mapa *M* que se muestra en la Figura 7.

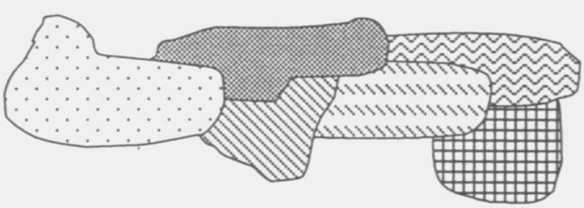

Figura 7

Si identificamos cada región con un vértice y dibujamos una arista entre aquellos vértices que comparten una frontera común, obtendremos el grafo $G$ asociado al mapa $M$. En nuestro caso resulta el grafo presentado en la Figura 8.

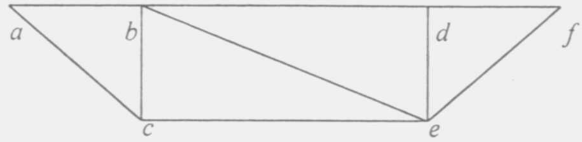


Figura 8

En lo que sigue consideraremos al grafo $G$ sin aristas múltiples. Denotaremos al conjunto de vértices de $G$ con $V$, y al conjunto de sus aristas por $A$.

**Definición 4.** La ***coloración del grafo G con x colores*** es una función $f: V \rightarrow C$ siendo $C$ un conjunto que consta de $x$ colores. Para cada vértice $v_1$, $f(v_1)$ es entonces el color de $v_1$.

Resulta claro que el problema de colorear el mapa de la figura 7 equivale a tratar la coloración del grafo $G$ de la figura 8. Más evidente es si consideramos la siguiente definición.

**Definición 5.** Una coloración de un grafo $G$ se dice ***propia*** si cualesquiera dos vértices adyacentes $v_1$ y $v_2$ tienen colores distintos.

**Definición 6.** Dado un grafo $G$, se llama ***número cromático de G*** al número mínimo de colores necesarios para obtener una coloración propia de $G$. Lo denotaremos con $(G)$.

Para calcular este número debemos involucrarnos con problemas de conteo. Si $G$ es un grafo y cuento con $x$ colores, podemos denotar con $P_G(x)$ al número de posibilidades de obtener una coloración propia del grafo con $x$ colores o menos. La idea es que, elegido un vértice del grafo, tenemos $x$ posibles colores para él. Si consideramos otro vértice adyacente al anterior nos quedarán ahora $x - 1$ colores para utilizar, y así siguiendo. Por ello, a $P_G$ se lo llama **polinomio cromático** de $G$.

No nos detendremos demasiado en los detalles, pues esto pretende sólo ser una introducción a problemas que involucran teoría de grafos. Sin embargo, es intuitivo que precisamente $(G)$ es el menor entero positivo $x$ tal que $P_G(x) \neq 0$.

**Teorema 5.** Si $G$ es un grafo no conexo de componentes $G_1$, $G_2$, ..., $G_m$ entonces el polinomio cromático de $G$ es el producto de los polinomios cromáticos de cada componente.

**Dem.** Si el grafo $G$ tuviera dos componentes $G_1$ y $G_2$, dado que los vértices entre estos no están conectados, por cada coloración de $G_1$ tendremos una coloración de $G_2$. De este modo $P_G(x) = P_{G_1}(x)P_{G_2}(x)$. Fácilmente esto se extiende a más componentes.

c.q.d.

**Teorema 6.** Si $G$ es un grafo en el cual el grado máximo de sus vértices es $k$, entonces

*i.* $(G) \leq k + 1$

*ii.* si $G$ es conexo y sus vértices no tienen todos el mismo grado, $(G) \leq k$.

**Dem.** *i.* Ordenemos los vértices de $G$ de cualquier modo: $v_1$, $v_2$ , ..., $v_n$ . Como el grado de cada vértice es menor o igual a $k$, cada uno de estos vértices tiene a lo sumo $k$ vértices adyacentes. Asignemos un color 1 a $v_1$. Para $v_j$ $(2 \leq j \leq n)$ construyamos el conjunto $S$ con los colores asignados a los vértices que preceden a $v_j$ y son "adyacentes" a él. Le asignamos entonces a $v_j$ un color que no esté en $S$. Como el máximo grado de los vértices de $G$ es $k$, el conjunto $S$ tendrá a lo sumo $k$ elementos. Resulta claro entonces que necesitaremos a lo sumo $k$ + 1 colores. Es decir, $(G) \leq k + 1$.

*ii.* De los vértices de grado menor que $k$, sea $v_n$ el de grado mayor (su grado será a lo sumo $k$ -1). A continuación listamos los vértices adyacentes a él: $v_{n-1}$ , $v_{n-r}$ . Como el máximo grado de los vértices de $G$ es $k$, tenemos aquí a lo sumo $k$ - 1 vértices. A continuación listamos todos los (a lo sumo $k$ - 1) vértices adyacentes a $v_{n-1}$ que aún no hayan sido escritos. Continuando de esta manera , como $G$ es conexo, obtendremos un ordenamiento de todos los vértices de $G$ : $v_n , \ldots , v_2 , v_1$.

Consideremos ahora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ . La particularidad de este orden es que cada vértice es adyacente a lo sumo a $k$ - 1 de sus predecesores. De esta manera, según la asignación de colores que hicimos en el caso anterior, el conjunto $S$ tendrá a lo sumo $k$ - 1 elementos, lo que nos conduce a la conclusión de que necesitaremos a lo sumo $k$ colores. Esto es, $(G) \leq k$.

c.q.d.

Este último teorema está asociado fuertemente al **algoritmo greedy**, que permite programar la asignación de colores a los vértices de un grafo en cierto orden. El lector que esté interesado en esto puede remitirse a la bibliografía que se especifica a continuación, o en el mejor de los casos a *Discrete Mathematics*; N. Biggs, Clarendon Press, Oxford, 1989.

***Bibliografía.***


- Discrete Mathematics; Johnsonbaugh; Prentice Hall; 1997
- Discrete Mathematics in Computer Science; Stanat; Prentice Hall
- Estructuras de Matemáticas Discretas para computación; Kolman-Busby-Ross;

Prentice Hall; 1995.

- Matemática Discreta; Tiraboschi; FAMAF; 1996.
- The Mathematica Book; Wolfram; Wolfram media - Cambridge University Press; 1988.

Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería.
Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco.