CB-785

UNA EXPERIENCIA SOBRE EL USO DEL FORO ONLINE EN CURSOS DE ALGEBRA UNIVERSITARIA: UNA POSIBILIDAD PARA FAVORECER LAS COMPETENCIAS DE COMUNICACIÓN Y ARGUMENTACIÓN

Aurora Olivieri – Sabrina Garbin
olivieri@usb.ve– sgarbin@usb.ve
Universidad Simón Bolívar - Venezuela

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y el aprendizaje
Modalidad: CB
Nivel educativo: Universitario
Palabras clave: Álgebra, foro, argumentación, comunicación

Resumen

En esta comunicación presentamos a partir de un estudio de caso, parte del análisis de una experiencia realizada con un grupo de estudiantes universitarios de matemáticas y física, que cursaron Álgebra I, II y III a través de una metodología mixta: clase formal en aula y apoyo tecnológico a través de las plataformas OSMOSIS. Nos motiva el estudio, los pocos trabajos exploratorios que hemos encontrado en cuanto al beneficio del uso específico del foro online en Álgebra universitaria, para discutir conjeturas, resolver problemas algebraicos o demostrarlos, y por la resistencia manifiesta de profesores en cuanto al uso del foro por la complejidad de la escritura simbólica formal a partir de un procesador de palabras. Ante la hipótesis, que la etapa en que comienzan los alumnos en Álgebra I, es la de transición entre el PME y el PMA (Tall, 1995, 2013), con necesidad de adquirir mayor competencia en cuanto a comunicación matemática y argumentación, hemos encontrado indicios que la variedad de lenguajes, notaciones algebraicas e instrumentos usados por los estudiantes en el foro para superar dificultades, favorece dichas competencias matemáticas y hacen que las notaciones formales resulten más significativas.

Fundamento teórico del estudio

La experiencia se circunscribe en el segundo año de Universidad, en los cursos de Álgebra I, II y III para matemáticos y físicos. Los estudiantes tienen edades comprendidas entre 18 y 20 años aproximadamente. Considerando el tipo de educación matemática del sistema escolar venezolano y estas edades, podemos afirmar que los alumnos involucrados en la experiencia, se encuentran en la franja cognitiva llamada de transición entre el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Avanzado (PMA) (Garbin, 2005, 2015). Esto es particularmente importante debido a que, desde el punto de vista cognitivo, estos alumnos requieren de un

ISBN 978-84-945722-3-4

proceso de reconstrucción, que supone por un lado, el paso de “describir” a “definir”, y por otro, el paso de “convencer” a “demostrar” (Tall, 1995). Tall (2013), retoma este proceso, reconociendo el desarrollo diferente de la demostración aritmética a la algebraica. Afirma que a la larga, la demostración simbólica se hace más complicada, debido a que en la aritmética muchas propiedades pueden deducirse de las propiedades de números, muchas manipulaciones algebraicas son basadas en “reglas aritméticas”. Sin embargo, en el nivel avanzado las estructuras son definidas basándose en axiomas y deducciones de la teoría de conjuntos que conducen a la prueba formal.

Esta transición, requiere además de lo dicho, un paso de construcción y reconstrucción en el tipo de argumentación matemática, en un uso específico de símbolos y formalidades comunicativas. La argumentación puede en un principio apoyarse o presentarse en generalizaciones aritméticas, usarse técnicas pictóricas, argumentos visuales. Este tipo de demostración es llamada por Tall (2013, p. 196) “embodied proof”, y que podríamos traducir “demostración representada”, no responde a la rigurosidad que los matemáticos desean con la “demostración formal”.

Dumas y McCarthy (2007) en su libro Transition to Higher Mathematics, Structure an Proof, en efecto, reconociendo la transición afirman “Los matemáticos han alcanzado, después de milenios de luchas y argumentos, un acuerdo generalizado (si no universal) sobre lo que constituye un argumento matemático aceptable (…) en este libro, trataremos de enseñarle qué es una prueba: qué nivel de argumento se considera convincente, qué se considera excesivo y qué nivel de detalle se considera demasiado (…) El propósito de este libro es presentarles la cultura, el lenguaje y el pensamiento de los matemáticos” (p.2)

Nuestros estudiantes, se encuentran entonces, en la etapa que Tall expresa como un paso desde la mezcla entre la experiencia simbólica y “demostración representada” presente en la matemática teórica, a una estructura de pensamiento basada en las definiciones formales y la demostración formal, propio de la matemática formal.

ISBN 978-84-945722-3-4

Esto nos hace considerar como hipótesis, sumado a la dificultad de escribir en lenguaje matemático en un foro en línea, que el uso de esta herramienta es un potencial para favorecer el paso de un estadio a otro, "apremiar" en los estudiantes el aprendizaje y el uso de diferentes argumentaciones y representaciones para poder comunicarse, e impulsar el aprendizaje del uso formal riguroso en su justa medida.

Algunos referentes y antecedentes

Además de la importancia cognitiva antes mencionada en cuanto a su reconstrucción, si nos centramos en las competencias a desarrollar en la formación del matemático, el proyecto Tuning América Latina (2007) (http:// tuning.unideusto.org./tuningal) nombra entre otras, en cuanto a las competencias genéricas: Habilidades en el uso de las TIC´s; y específicas: capacidad para construir y desarrollar argumentaciones lógicas con una identificación clara de hipótesis y conclusiones, capacidad para expresarse correctamente utilizando el lenguaje de la matemática y capacidad para formular problemas en lenguaje matemático, de forma tal que faciliten su análisis y solución. Por nuestro interés de la etapa universitaria no nombramos la importancia que el NCTM (2000) le ha dado a la introducción de las TIC´s en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y para el desarrollo de habilidades y destrezas de los estudiantes en todas las etapas hasta la preuniversitaria,

Lo que si podemos afirmar es que en los últimos años se ha dado mucha importancia en ambas etapas, escolaridad preuniversitaria, y en la universitaria a raíz del proyecto Tuning, el uso de redes de computadoras, software como el Cabri, Geogebra, Sketchpad, Matlab, entre otros y en especial el Internet y más recientemente el uso de ciertas plataformas educativas que cada universidad ha evaluado, en la nuestra Aula Virtual a través de Osmosis.

Sin embargo, si bien hay bastante bibliografía sobre el tema de las TIC's, hemos encontrado poca en Iberoamérica, pero no hemos encontrado en relación al Álgebra formal en el nivel Universitario en relación al caso específico del uso del foro.

Juárez, Chamoso y González (2015) recogen y citan algunos antecedentes dentro de un contexto de foro virtual, y aunque ni el tipo de matemática ni estudiantes corresponden a los

ISBN 978-84-945722-3-4

nuestros, podemos resaltar algunos de los hallazgos. Nason y Woodruff (2003) afirman que en un contexto de este tipo, enriquece en los estudiantes la comprensión de la naturaleza y el discurso de las matemáticas, y la búsqueda de la compresión colectiva de los conceptos claves matemáticos.

Juárez, Chamoso y González (2015) se interesan en analizar las interacciones de estudiantes de ingeniería al realizar una actividad de modelación matemática. Se basan en algunos trabajos de Llinares y Valls (2009) y Silva y Gross (2007), específicamente en los modelos de interacción de Llinares y Valls, adaptado. Evidenciaron niveles bajos y medios de interacción, pero confirman los resultados de Nason y Woodruff antes nombrados, y la necesidad de introducir elementos para poder obtener mayores interacciones entre los estudiantes.

Roig, Llinares y Penalva (2011) en el área de investigación de la formación de profesores en matemáticas, analizan estructuras argumentativas, pero referidas a la competencia docente "mirar con sentido". Recopilan líneas de investigación que se interesan a tratar de categorizar los patrones de discusión matemáticas (Cobb y Bauersfeld, 1995), o a caracterizar los tipos de iteración que se establece en el aula de clases (Voigt, 1995). Roig , Llinares, y Penalva, tratan de llevar en el contexto online de un foro, la búsqueda de caracterización de la estructura argumentativa en un debate en línea, lo cual ha sido su resultado. Llinares, (2012) extiende y profundiza los desafíos que deja a la didáctica de la matemática la incorporación de entornos en línea, o entornos b-learning, en todo lo relacionado a las interacciones, estructuras argumentativas, construcción del conocimiento matemático, enfocado a la mirada de las competencias de un profesor de matemáticas. Los resultados alientan la importancia del uso de este tipo de estrategias para poder desarrollar la competencia que a los autores interesa en la investigación.

Metodología

Contexto y participantes

La experiencia se desarrolla durante tres trimestres en los que se imparten los programas de Álgebra I, II y III, del segundo año de Universidad, para matemáticos y físicos. El primer

ISBN 978-84-945722-3-4

programa corresponde a Álgebra Abstracta (Números y Polinomio) y los dos últimos a Álgebra Lineal. Cada trimestre dura 12 semanas, con tres clases semanales de 2 horas cada una, 2 de teoría y 1 de práctica. Los tres cursos se dictaron en modalidad mixta (b-learning), con el apoyo de un Aula Virtual de la Universidad. La plataforma utilizada es GNU/Osmosis, un Sistema para la Gestión del Aprendizaje (SGA) basado en las versiones estables de Dokeos y Caroline, que permite escribir ecuaciones matemáticas en Latex. Los foros se destinan como un espacio de práctica voluntario y no evaluado, organizados con la estructura del temario en tres espacios independientes, uno para cada asignatura. En los 3 cursos formales participaron en total 68 alumnos. En la siguiente tabla se muestra la variación de alumnos en cuanto a permanencia e incorporación en las materias.

1er trimestre (47)	**2do trimestre (33)**	**3er trimestre (31)**
47	22 *desde Algebra I*	14 *desde Algebra I*
	11 *Nuevos*	7 *desde Algebra II*
		10 *Nuevos*

Metodológica de análisi*s*

Para analizar la experiencia se elige el estudio de casos (Stake, 1998), el carácter es exploratorio, de tipo interpretativo y descriptivo. Stake afirma que en este tipo de metodología, el investigador elige varios casos de situaciones extremas de un contexto de objeto de estudio. Al maximizar sus diferencias, se hace que afloren las dimensiones del problema de forma clara. Para poder elegir los estudiantes objeto de estudio, se utilizan todas las interacciones de los estudiantes, guardadas en el foro de la plataforma virtual. Al estructurarlas y organizarlas se evidencia que la participación de los estudiantes fueron variadas. Las más relevantes se han categorizado en: (a) expresar una duda sobre el enunciado del problema; (b) preguntar sobre alguna estrategia para comenzar; (c) proponer una solución parcial o completa del problema; (d) comentar alguna solución propuesta por otro compañero para apoyarla o disentir del razonamiento propuesto. Con relación al tipo de comunicación usada se evidencia: (a) Envía foto de cuaderno, pizarra o lugar de trabajo; (b) Envía documento en cualquier editor o en latex, usa una nube, (c) Usa el editor del foro directamente y (d) Interactúa de forma relevante. Tomando en cuenta las diferencias que se observan en los estudiantes, en cuanto a la variedad de pertenencias o no a las categorías antes mencionadas, los elegidos para el estudio:

ISBN 978-84-945722-3-4

Marco: Participa en los tres cursos. Hace un uso excepcional del editor. Para la presentación de sus ejercicios se vale de imágenes, Latex y el resaltado de ideas, apoyándose en el cambio de fuente, letra itálica o negrillas. Luis Leonel: Participa en los tres cursos. Se mantiene con el uso del editor del foro. Usa la descripción de los símbolos, en lugar de latex, o una notación propia para responder. Mantiene una participación elevada durante los tres cursos. Héctor: Participa en los tres cursos. Sus intervenciones son más frecuentes en el primero de ellos. Destaca porque siempre responde con documentos en pdf, pero se vale de diferentes plataformas para presentar sus respuestas, entre ellas: blog, google drive y página web. Daniel: participa en los tres cursos. La mayoría de sus intervenciones son realizadas usando fotos de una pizarra donde sacaba sus cuentas, utiliza también el editor de texto del foro y latex. Yaher: se integra en álgebra 2. Tiene alta participación y desde el principio presenta sus documentos con el uso de Latex. Su participación destaca porque atiende las observaciones que se le hacen y presenta el documento con ellas. Siria: Ella se une al grupo en álgebra 3. Su participación es elevada y en todas ellas utiliza el editor del foro.
Estas dos últimas estudiantes, fueron elegidas para evidenciar que la participación de los estudiantes no está sujeta a que se habitúe a la herramienta o el aprendizaje natural del grupo.

Algunos hallazgos a modo de conclusión

A raíz de la poca extensión del artículo, no podemos dar ejemplos de todos los hallazgos. Presentamos sólo algunos y apoyándonos en los anexos. La metodología de análisis y la elección de los estudiantes, ya nos describe algunos hallazgos. El no conocer el uso del Latex no frena necesariamente las interacciones de los usuarios en el foro, no necesariamente obliga a los estudiantes a usarlo y tampoco influencia el aprendizaje natural del grupo, a pesar de la complicada simbología algebraica formal.

Por otra parte el análisis de las interacciones muestra que usar lenguajes distintos, formales, naturales, representaciones, hace dudar al usuario si una demostración es cierta o no, aunque los argumentos sean los mismos. Un ejemplo es el caso de Héctor y María, que intentan demostrar "*Si $(a,b)=1$, $a|1$ y $b|c$ entonces $ab|c$*" (Anexo 1). A través del foro se confirman.

ISBN 978-84-945722-3-4

Una vez que se avanza en el tema comunicativo y el uso de los lenguajes, los estudiantes aprenden a corregirse entre ellos, a darse sugerencias; y a responder un mismo problema. Interesante, es el caso en que se quiere demostrar usando inducción que "*si* $a \equiv b \ (mod\ n)$ *y* $m>0$ *entonces* $a^m \equiv b^m \ (mod\ n)$", con Hector, María y Linfray (Anexo 2).

No todos los problemas planteados, se logran resolver en la misma discusión. Por ejemplo, la demostración de "*Demuestre que si A pertenece a* $\mathrm{M}_{nxn}(\mathbb{F})$ *satisface AB = BA para todo B*$\in \mathrm{M}_{nxn}(\mathbb{F})$*, entonces A es un múltiplo escalar de la identidad*" necesitó varias semanas de discusión en el foro y en clase (Anexo 3). Es un ejemplo de la importancia de la modalidad mixta (b-learning) y refuerza lo que afirma Llinares (2012) en cuanto a la importancia de los entornos en línea, en todo lo relacionado a las interacciones, estructuras argumentativas, pero en nuestro caso, de la construcción del conocimiento algebraico de alumnos de matemáticas y física.

Hasta ahora hemos observado indicios que van confirmando nuestra hipótesis. Para terminar la experiencia se solicitó a los estudiantes que dieran su opinión. Marco escribió:

> "El estudio del álgebra requiere cierto grado de madurez, es decir, la manera en que el estudiante escribe es fundamental. Antes de cursar álgebra no hay muchas oportunidades para desarrollar la formalidad de la escritura matemática. En álgebra aprendemos a escribir matemáticas, y con el "feedback" en los foros, los estudiantes podemos corregir nuestros errores. Las actividades en el foro me han ayudado a mejorar mi escritura, practicar con diversos ejercicios de todo tipo de complejidad y he empleado el lenguaje LaTeX que considero, es fundamental que todo matemático lo domine".

Queríamos ver si el uso de la herramienta del foro favorece el paso del PME al PMA. Hemos visto que hay indicios que hacen pensar que ciertamente el uso del foro "apremia" el uso y discusión de diferentes argumentaciones y representaciones para poder comunicarse, e impulsar el aprendizaje del uso formal riguroso en su justa medida para esta etapa de enseñanza y aprendizaje.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (eds.) (1995), *The emergence of Mathematical meaning: interaction in classroom cultures.* Hillsdale: NJ, Erlbaum.

Dumas, B. y Mc. Carthy. (2007). *Transition to higher mathematics.* New York, NY: McGraw-Hill.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8* (2), 137-153.

Garbin, S. (2015). Investigar en pensamiento matemático avanzado. En Ortiz J. y Iglesias, M. (Eds.), *Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación* (pp. 137-153). Maracay, Venezuela: Universidad de Carabobo.

Juárez, J., Chamoso, J.M. y González, M.T. (2015). La interacción en foros virtuales en el desarrollo del proceso de modelación matemática 2 con estudiantes de ingeniería. XIV CIAEM-IACME. Chiapas, México. Recuperado de http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/pdf/Vol4Tech.pdf.

Llinares, S., y Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science*, *37* (3), 247-271.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de investigación en Educación Matemática*, (2), 53-70.

Nason, R., & Woodruff, E. (2003). Fostering Authentic, Sustained, and Progressive Mathematical Knowledge-Building Activity in Computer Supported Collaborative Learning (CSCL) Communities. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *22* (4), 345-363.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Proyecto Tuning América Latina (2007). Recuperado de http://tuning.unideusto.org./tuningal/

Roig, A., Llinares, S. y Penalva, M.C. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea. *Educación Matemática*, *23* (3), 39-65.

Silva, J., y Gros, B. (2007). Una propuesta para el análisis de interacciones en un espacio virtual de aprendizaje para la formación continua de los docentes. *Revista Electrónica Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, *8* (1), 81-105.

ISBN 978-84-945722-3-4

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. *Plenary lecture, Proceedings of PME 19*. Recife, Brasil. I, 61– 75. Recuperado de http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1995b-pme-plenary.pdf

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically*. Cambridge: University Press.

Voigt, J.(1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures* (pp. 163-199). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

UNA EXPERIENCIA SOBRE EL USO DEL FORO ONLINE EN CURSOS DE ALGEBRA UNIVERSITARIA: UNA POSIBILIDAD PARA FAVORECER LAS COMPETENCIAS DE COMUNICACIÓN Y ARGUMENTACIÓN

Anexo 1

Problema 1: Si (a,b)=1, a|c y b|c entonces ab|c.

Héctor respondió: "No lo puedo colocar bien aquí.... vayan a demostracionesmath.blogspot.com". En el blog, se puede ver una imagen con la siguiente demostración: "(…) Tenemos una demostración tipo directa; desarrollamos la tesis tomando como cierta la hipótesis, así: ab|c sii ∃ k ∈ Z / c=abk, a,b ∈ Z. Por hipótesis, (a,b)=1 → 1|a y 1|b, 1|(sa+tb) con s,t ∈ Z luego 1=sa+tb. Por hipótesis, a|c y b|c → sii c=aq (1) y c=bi (2) con q,i ∈ Z.

(1) c=aq (por definición)

bc=baq (multiplicación en Z, por b)

bc=abq (conmutativa en Z)

(2) c=bi (por definición)

ac=abi (multiplicación en Z, por a)

Así, bc=abq → ab|bc (por definición, análogamente)

ac=abi → ab|ac (por definición)

Luego, ab|(sac+tbc) (por definición) con s,t ∈ Z

Finalmente, ab|(sac+tbc)=c(sa+tb)=c(a)=c → ab|c (…)".

ISBN 978-84-945722-3-4

María respondió: “Yo lo demostré de una manera distinta, me gustaría saber si está bien. Si a|c, b|c y (a,b)=1 entonces ab|c. Primero, por hipótesis tenemos que: c=ak, c=bq, as+bt=1; con k,q,s,t enteros. Ahora de la identidad de Bezout obtenemos: cas+cbt=c (multiplicamos por c), pero sabemos que c se puede escribir de dos maneras distintas que incluyen tanto a "a" como a "b" (por hipótesis de divisibilidad). Si sustituimos convenientemente los valores en la ecuación nos queda algo de la forma: c= (bq)(as)+(ak)(bt). Por propiedad conmutativa en los enteros tenemos que: c=(ab)(qs)+(ab)(kt). También sabemos que: ab|(ab)(qs) y que ab|(ab)(kt) y por propiedad (a|b y a|c entonces a|sb+tc ; s,t enteros) tenemos que: ab|(ab)(qs)+(ab)(kt)=c . Por tanto queda demostrado que ab|c.”

Problema 2: Sea (a,b)=d y d=as+bt. Entonces (s,t)=1.

María respondió: “Yo lo pensé así (…) Primero si dividimos la identidad de Bezout por "d" (se puede hacer porque tanto "a" como "b" son divisibles entre "d") nos queda: 1=(a/d)s+(b/d)t . Ya sabemos que (a/d, b/d)=1, pero si consideramos que tanto a/d como b/d son enteros cualquiera y los llamamos así: a/d=k y b/d=q, obtenemos lo siguiente 1=ks+qt y como lo demostramos en clase esto implicaría que "s" y "t" son coprimos. Yo lo veo como que el 1 no sólo es una combinación lineal de "k" y "q" sino que también es, al mismo tiempo, una combinación lineal de "s" y "t".”

Héctor respondió, en el mismo blog, así: “(…) Por hipótesis, (a,b)=d entonces d|a y d|b (por definición). Si d|a entonces a=dk (1) y si d|b entonces b=ds (2) con a,b,k,s ∈ Z (…)

sumamos (1) y (2) término a término: ax=dxk, by=dys. Así, ax+by=dxk+dys → ax+by=d(xk+ys) (factor común d). Luego, d|(ax+by) y por hipótesis d=d(xk+ys) como d no es nulo, se puede cancelar. xk+ys=1 → (x,y)=1(…)”

Anexo 2.

Problema: Demuestre usando inducción que si $a \equiv b(mod\ n)$ y m>0, entonces $a^m \equiv b^m(mod\ n)$.

Héctor respondió: “Hay una demostración para esta propiedad de congruencia en http://hectortorresguzman.wix.com/matematicas”. En esa dirección se podía obtener un documento con el siguiente contenido: “(…) Comprobemos

(m=1) $a \equiv b\ (mod\ n)$ (Cierto por hipótesis inicial)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

(m=k) $a^k \equiv b^k (mod\ n)$ (Hipótesis inductiva) (…)

(m=k+1) ¿ $a^{k+1} \equiv b^{k+1}(mod\ n)$? $\leftrightarrow n|a^{k+1} - b^{k+1}$

Es conocido que $a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b)\sum_{q=0}^{k} a^q\, b^{k-q}$ (1).

De (1) $a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b)\sum_{q=0}^{k} a^q\, b^{k-q}$=$(a-$

$b)\left[a\sum_{q=0}^{k-1} a^q b^{k-1-q} + \sum_{q=0}^{0} a^q b^{k-q}\right] =$

$= a(a^k - b^k) + b^k(a-b)$

(…) Como por hipótesis inductiva $a^k \equiv b^k(mod\ n)$ entonces $n|a^k - b^k$ y por hipótesis inicial $a \equiv b\ (mod\ n)$ entonces $n|a-b$. Así que *n* divide a cualquier combinación lineal de estas diferencias, en particular $n|a(a^k - b^k) + b^k(a-b)$ entonces $n|a^{k+1} - b^{k+1}$. Así $a^{k+1} \equiv b^{k+1}(mod\ n)$ (…)"

Linfray respondió utilizando notación de latex y ninguna ecuación que escribió se compiló. Esto es parte de su intervención: "Para el caso en que [tex] m = 1[/tex] es vidente pues es nuestra hipótesis (…) Supongamos que la afirmación es cierta para [tex] m=p [tex] es decir [tex] a^p\equiv b^p \mod{n} [tex] Demostremos que es cierto para [tex] m=p+1 [tex] Por hipótesis inductiva (…) a^p-b^p=m k_1 \k_1\in\mathbb{Z} [tex]." En este punto, Linfray confundió el "m" con el "n", que es el módulo correcto. Ella continua su argumento, para ello multiplica (a+b) a ambos lados: "(…) tenemos [tex](\a+b)(\a^{p}-b^{p})=(\a+b) m k_1 \Rightarrow\ a^{p+1}-b^{p+1}= (\a+b)m k_1\ Rightarrow\a^{p+1}-b^{p+1}=(\(\a+b)k_1)m\ (…) así queda demostrado para m=p+1 (…)". El profesor intervino: "Hola, Linfray. Debes tener cuidado porque $(a^{p-1} - b^{p-1})(a+b)$ no es igual a $a^p - b^p$." Linfray concluyó su argumento así: "Recordemos que (…) a=nu+b (…) Por hip. (…) a^{p}=ns+b^{p} (…) (a^{p}-b^{p})(a+b)= n.k (a+b) (…) Sustituyendo a=nu+b y [tex] a^{p}=ns+b^{p} (…) a^{p+1}-b^{p+1} = n((k(a+b))+b^{p}u-sb) (…) por lo tanto [text] \ a^{p+1} \equiv b^{p+1}\ mod{n} \ [/tex] y a si la afirmación es cierta".

María respondió: "No sé si pueda considerarse una forma completamente distinta a la de Linfray, pero yo lo hice así. Partí del caso k=1 que es evidente porque es la hipótesis de nuestro problema. Ahora se asegura que para un cierto n>1 también se cumple la congruencia. Es decir, n|a^n-b^n y lo que queremos probar es que n|a^{n+1}-b^{n+1} . Partimos entonces

ISBN 978-84-945722-3-4

de nuestras 2 hipótesis: $a-b= nk_1$ y $a^n-b^n=nk_2$, con k_1 y k_2 pertenecientes a los enteros. Ahora agarramos la primera ecuación y la multiplicamos por a^n.

$a^n(a-b)=a^nnk_1$ de manera que, $a^{n+1}-ba^n=a^nk_1n$ Ahora multiplicamos la segunda por b: $b(a^n-b^n)=bnk_2$ esto implica que: $ba^n-b^{n+1}=bnk_2$. Ahora sumamos ambas ecuaciones: $(a^{n+1}-ba^n)+(ba^n-b^{n+1})=n(a^nk_1+bk_2)$. De este modo: $a^{n+1}-b^{n+1}=nq$ donde q pertenece a los enteros. Es decir, $n|a^{n+1}-b^{n+1}$ y, por lo tanto, queda demostrado."

Anexo 3:

Problema: Demuestre que si A pertenece a $M_{nxn}(\mathbb{F})$ satisface AB = BA para todo B∈ $M_{nxn}(\mathbb{F})$, entonces A es un múltiplo escalar de la identidad.

Gerardo pidió alguna sugerencia: "Hola, no sé cómo abordar este problema. No sé si suponer que la matriz A es igual un escalar por la matriz identidad desde el inicio y desde ahí continuar con la demostración. Es decir A=a*In donde a es el escalar y después (a*In)B=B(a*In)." El profesor le recomendó que empezara con matrices 2x2, dándole valores a B, para conocer condiciones para A. Joseph interpretó la sugerencia, enviando una foto de un cuaderno donde planteó con incógnitas las entradas de la matriz A, con la pregunta: "¿Sería algo así?". El profesor lo animó a continuar con un mensaje que decía: "Exacto, Joseph. Pero ahora te recomiendo que pruebes con una matriz B con números, los que quieras (…)". Yaher respondió con un mensaje: "Hola, no tenía idea de cómo abordar este problema; por lo que comentó Joseph, pude hacer esto" a lo que le adjuntó un documento con la respuesta, donde había sacado su conclusión utilizando $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. El profesor, una vez que comprobó que la intervención de la estudiante era correcta, alentó al grupo a plantear el caso general con una sugerencia: "(…) Qué pasa si la matriz por la que multiplican es, una matriz de permutación.". Yaher en una segunda intervención mostró un avance: "(…) P_{ij} una matriz elemental en la que se realiza el intercambio de la fila i por la columna j que satisface: PijA = APij (…) con i, j $=1,2,\dots,n$ a la misma matriz A obtenemos que tiene la forma: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}$ (…)". Luego de algunas discusiones en clase, Yaher colocó otro documento: "Usando una de las matrices que recomendó un chico de la clase creo que ya

ISBN 978-84-945722-3-4

está listo.” En su respuesta expone: “Sea B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (…) Como AB = BA sigue que: $a_{12} = 0$ (…) Por lo tanto, A es un múltiplo escalar de la matriz identidad.”

ISBN 978-84-945722-3-4