CONFERENCIA INAUGURAL: MATEMATICA PARA NO MATEMATICOS

PROF. LUIS A. SANTALO,
DE LA UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES (ARGENTINA)

La misión de los educadores es preparar a las nuevas generaciones para el mundo en que tendrán que vivir. Es decir, impartirles las enseñanzas necesarias para que adquieran las destrezas y habilidades que van a necesitar para desempeñarse con comodidad y eficiencia en el seno de la sociedad con que se van a encontrar al terminar el periodo escolar.

Por esto, como el mundo actual es rápidamente cambiente, también la escuela debe estar en continuo estado de alerta para adaptar su enseñanza, tanto en contenidos como en metodología, a la evolución de estos cambios, que afectan tanto a las condiciones materiales de vida, como al espíritu con que los individuos se van adaptando a las mismas. En caso contrario, si la escuela se descuida y sigue estática o con movimiento lento en comparación a la velocidad exterior, se origina un desfase o divorcio entre la escuela y la realidad ambiental, que hace que los alumnos se sientan poco atraidos por las actividades del aula y busquen adquirir por otros medios los conocimientos que consideren necesarios para comprender, a su manera, el mundo de la calle que perciben directamente o a través de los medios masivos de comunicación.

Como la educación informal de esos medios extraescolares sigue su curso de manera cada vez más fuerte, si la escuela se desentiende de ellos y piensa únicamente en una educación para un mundo ideal que se va alejando de la realidad, el resultado es lo que se ha llamado la paradoja de Icaro, consistente en que los alumnos se irán apartando de las enseñanzas del maestro para creer más en el mundo simplificado de la ciencia ficción que encuentran en las historietas de las revistas o en las películas del cine o la televisión, con lo cual, al querer actuar en la sociedad se estrellarán lo mismo que Icaro al ser derretidas por el Sol sus alas de cera, por falta de la base firme de un conocimiento organizado que precisamente es lo que la escuela les debe proporcionar.

Es decir, lo primero que deben tener los educadores es un buen conocimiento del mundo exterior y de su posible evolución en los próximos años, para luego ver cómo sus enseñanzas pueden ayudar a una mejor manera de actuar en el mismo, lo que será provechoso no sólo para los alumnos, futuros interesados, sino para el conjunto de toda la sociedad. El ideal sería que la escuela pudiera influir sobre ese mundo exterior para modelarlo según criterios bien estudiados científica y moralmente, pero en cualquier caso su conocimiento previo es indispensable y lo peor que se puede hacer es ignorarlo y seguir educando para un mundo cruzado con el real. Conviene, por tanto, analizar brevemente cómo es y cómo marcha ese mundo exterior.

No hay duda de que debido a los progresos científicos del siglo actual, los conocimientos del hombre de hoy son muy superiores a los de hace tan sólo pocas décadas. A través de la televisión, la radio y los satélites artificiales, hoy podemos ver lo que ocurre en cualquier lugar de la Tierra a miles de kilómetros de distancia, y a través de fotografías y diagramas enviados por sondas que viajan en el espacio, podemos también ver objetos de otros planetas y analizar fenómenos procedentes de estrellas o nebulosas situadas a miles de millones de kilómetros de nosotros. Por el otro extremo del infinitamente pequeño, los físicos tienen elementos para medir y registrar magnitudes atómicas de millonésimos de milímetros y también tiempos de millonésimos de segundos. Entre los dos extremos, al nivel del hombre, se dispone de dispositivos que permiten ver sobre una pantalla cualquier detalle del corazón, del cerebro o de una parte cualquiera del cuerpo humano, órganos hasta hace poco tiempo inobservables. Por otra parte, los radiotelescopios permiten registrar sonidos procedentes de espacios remotos, como una ampliación inmensa de nuestras posibilidades auditivas. Parecería que la armonía de los mundos o la música de las estrellas de que hablaba Kepler (1571-1630) y que según él se podían captar por la razón, pero no por los oídos, actualmente se pueden captar a través de esos especiales audífonos de que dispone la moderna astronomía. Incluso el radio de acción, hasta donde es posible prender con las manos, ha aumentado fuera de todo el límite con los actuales robots capaces de llegar y traernos materiales de otros planetas.

Todas estas posibilidades hacen que para su actuación en el mundo y para aumentar su conocimiento, el hombre de hoy disponga de una plataforma básica y de unos depósitos culturales mucho más poderosos de los que tenía el hombre griego y aún el hombre de principios de siglo. En los mismos quehaceres diarios, comunicaciones de hoy sobrepasan en velocidad y distancia a lo imaginable unas décadas atrás y los ordenadores actuales permiten almacenar y suministrar información en cantidad y rapidez que han vuelto obsoletas las bibliotecas y demás fuentes de información tradicionales.

El problema está en decidir cómo educar para ese hombre informático, que tiene tan poderosas bases y tan grandes posibilidades y que se va adaptando a una tecnología que le permite potentes y variadas maneras de accionar, pero que le exigen también distinto comportamiento y distinta preparación en sus habilidades y destrezas. La vida se ha vuelto más difícil y la escuela debe evolucionar para preparar individuos con capacidad para actuar en este mundo complejo y diversificado.

No se trata de que al incorporar a su manera de vivir una técnica refinada de la que ya no podrá prescindir, el hombre se vaya robotizando, pasando a ser una máquina que actúa por reflejos programados. Es seguro que el hombre conservará siempre el aliento que le infundió su creador y seguirá teniendo un alma y un espíritu, con sus sentimientos, sus miedos, sus pasiones y sus creencias, tal vez distintas de las actuales pero igualmente rectoras de su conducta y que igualmente hay que considerar y tener presentes en todo sistema educativo.

De la misma o análoga manera a como Platón, cuatro siglos antes de nuestra era, trataba de diseñar cómo debía ser la enseñanza para los futuros dirigentes de su República, los educadores de hoy deben plantearse el problema de cómo educar al hombre de estos fines del segundo milenio, para que pueda entrar con buen pié y justificado optimismo en el tercero, lleno de incógnitas pero también de esperanzas.

En cuanto a la matemática se refiere, Platón expone buenas razones para prescribir como primeras las enseñanzas del cálculo y la geometría, observando que "ningún arte y ningún conocimiento pueden prescindir de la ciencia de los números y que hay una diferencia absoluta entre el que es versado en geometría y el que no lo es, y hasta los que no lo son, cuando se han educado y ejercitado en el cálculo aunque no deriven de él ninguna otra ventaja sí obtienen, al menos, volverse más sutiles de lo que eran antes". Platon señala motivos trascendentes para enseñar la matemática, como "atraer el alma hacia la verdad y elevar nuestras miradas a las cosas de lo alto, haciendo pasar de las tinieblas a la luz" motivos que convencieron a todas las generaciones sucesivas y han hecho que la matemática haya figurado siempre en todos lo sistemas educativos.

En la actualidad los motivos tal vez no sean los trascendentes que señalaba Platón, sino más bien las necesidades prácticas de poder entender y utilizar con provecho las modernas tecnologías. Debido a ello, parece unánimemente aceptado que la enseñanza de la matemática debe seguir prescrita para todos, tanto en los niveles superiores, para los creadores en el mundo de las ideas o en la esfera tecnológica, como en los niveles del llano, para el hombre común, que sin ser creador necesita los conocimientos matemáticos para su actuación en el campo laboral y para comprender, aunque sea superficialmente, las bases y las posibilidades de la moderna tecnología sin necesidad de recurrir a la creencia en mitos o milagros.

Platón distingue entre lo que hoy llamamos matemática pura que "facilita al alma los medios de elevarse desde la esfera de la generación hasta la verdad y la esencia" de la matemática aplicada, "la matemática de los comerciantes y traficantes, que se utiliza con vistas a las compras y a las ventas" y recomienda para su academia únicamente la primera. En cambio hoy, pensando tanto en educar el pensamiento como en impartir reglas para la acción, se opina que la matemática que necesitan todos los ciudadanos debe ser una mezcla coordinada y bien equilibrada de matemática pura y aplicada, o de matemática como filosofía y de matemática como instrumento de cálculo. Ninguno de los dos aspectos es prescindible, entre otras cosas porque la vida es pensamiento y es acción, exige razonar para dirigir las aplicaciones y exige actuar para no perderse en virtuosismos ideales, alejados de la realidad circundante. Hay que tener en cuenta que las aplicaciones de la matemática han invadido campos que antes eran considerados ajenos a ella, principalmente en la biología y en las ciencias del hombre, por lo cual la escuela no puede desentenderse de esas aplicaciones tanto por su valor informativo como motivador.

Cuando se habla de matemática y de la necesidad de su enseñanza hace falta puntualizar a qué matemática se hace referencia. En la época de los griegos se podía hablar del cálculo y de la geometría como partes únicas de un cuerpo de conocimientos bien delimitado y no muy extenso. Hoy día, en cambio, la cantidad de matemática que se conoce es inmensa y crece constantemente, por lo cual no es cosa fácil decidir cual debe ser la matemática que se recomienda enseñar y cómo debe ser presentada para su mejor comprensión y su mejor utilidad para el futuro de los alumnos.

La revista Mathematical Reviews que registra y comenta todos los trabajos de matemática que se publican en el mundo y que pretenden ser originales, se inició en 1939 y el año pasado llegó al millón de trabajos registrados. Es decir, que si se supone una extensión promedio de 5 páginas por trabajo, y se agruparan todos ellos en volúmenes de 1000 páginas cada uno, resultaría que en los últimos 50 años se han producido en el mundo 5000 de tales volúmenes. Es una producción gigantesca que presenta difíciles problemas de almacenamiento y de ordenación para poder encontrar lo que a cada uno pueda interesar dentro de tan ingente cantidad de nuevos conocimientos adquiridos por la humanidad.

A los profesores de matemática nos corresponde seleccionar entre toda la matemática existente, la clásica y la moderna, aquella que pueda ser útil a los educandos en cada uno de los distintos niveles de la educación. Para la selección hay que tener en cuenta que la matemática tiene un valor formativo, que ayuda a estructurar todo el pensamiento y a agilizar el razonamiento deductivo, pero que también es una herramienta que sirve para el accionar diario y para muchas tareas específicas de casi todas las actividades laborales. Es decir, como ya dijimos antes en otras palabras, la enseñanza de la matemática debe ser un constante equilibrio entre la matemática formativa y la matemática informativa, la primera más estable y la segunda muy variable con el tiempo y aun con el lugar y la finalidad perseguida por los alumnos. Hay que formar, pero al mismo tiempo informar de las cosas adecuadas a las necesidades de cada día y de cada profesión. Por otra parte, cada aspecto informativo tiene su substrato formativo de manera que la regla puede ser "formar informando" o "informar formando".

La elección de la matemática para quienes van a ser matemáticos profesionales, es relativamente fácil, pues basta mostrar las grandes líneas generales y enseñar a aprender, dejando que cada educando vaya seleccionando según sus gustos y su vocación la matemática que más le interese, pues tiene toda la vida por delante para ir completando la formación recibida en la escuela.

El problema radica en la selección de la matemática para la educación de quienes no tienen interés particular en ella y sólo la aceptan como una necesidad que les ayuda a desempeñar mejor sus ocupaciones y a entender mejor el sostén básico de las mismas. Para ellos es fundamental que los encargados de diseñar los planes de estudio tengan en cuenta el valor formativo de la matemática y también los temas de los que es necesario informar en cada ciclo de la enseñanza y en cada particular carrera profesional.

Pensemos primero en la matemática para todos, es decir, en la matemática de la escuela obligatoria que deben seguir todos los ciudadanos. Hasta hace pocos años esta enseñanza comprendía en la mayoría de los países a los alumnos comprendidos entre 5 y 10 o 12 años de edad y la matemática consistía esencialmente y de manera universal, en las operaciones con los números enteros y racionales, con mucha práctica de los decimales, y después iniciar e insistir en la proporcionalidad en sus diversos aspectos de la regla de tres, porcentajes, semejanza de figuras planas, escalas e interpretación de mapas y gráficos, sistema métrico decimal, junto con las definiciones y propiedades simples de las figuras geométricas más usuales. Actualmente, vista la complejidad creciente de la sociedad, se considera que estos conocimientos resultan insuficientes y, en la mayoría de los países la enseñanza obligatoria se ha extendido entre los 5 y los 15 años de edad, es decir, incluyendo en ella el primer ciclo de tres años que figuraban en la enseñanza media. Con ello han aumentado los conocimientos matemáticos que se pueden incluir en la enseñanza para todos.

Es muy importante reflexionar y experimentar sobre estos conocimientos que supuestamente van a adquirir todos los ciudadanos y que, para muchos de ellos, van a ser los únicos que la enseñanza formal les va a suministrar, con el supuesto de que ello les debe bastar para actuar en el mundo con que se van a encontrar al salir de la escuela. Hay que decidir sobre los contenidos y también sobre la metodología más conveniente. Además de los contenidos tradicionales ya mencionados es mucho lo que se puede y debe añadir, suprimiendo en compensación muchas cosas que por costumbre han seguido formando parte de los programas pero que han devenido inútiles en el día de hoy. Hay que crear organismos que se ocupen de analizar constantemente los contenidos y la metodología adecuada a ellos, introduciendo las novedades necesarias y suprimiendo los tópicos que vayan resultando obsoletos. En otras épocas, los programas y los libros de texto duraban siglos, mientras que en la actualidad rápidamente quedan fuera de uso y necesitan ser reemplazados por otros más acordes con las necesidades del medio.

Como reglas generales, se puede recomendar que siempre es preferible saber poco y bien que mucho y mal. Es más recomendable hacer cabezas bien hechas que cabezas bien llenas, aunque en la actualidad, con los modernos mecanismos computacionales, y su memoria, se pueden lograr cabezas bien llenas que al mismo tiempo sean bien hechas. Los conceptos fundamentales deben repetirse desde distintos enfoques, indicando el camino para sus posibles extensiones y aplicaciones que el alumno tendrá que buscar en el futuro por su propia cuenta, cuando las necesite. Puesto que el aprendizaje va a ser permanente, ya que el campo del conocimiento no se detiene, es importante enseñar a aprender, cosa que el alumno tendrá que hacer por sí solo cuando sea dejado de la mano del maestro. Hay cosas que actualmente figuran en los programas y que en sus ideas generales deben seguir dándose, pero en forma muy simplificada. Por ejemplo, es importante instruir cuanto antes en las manipulaciones simples del cálculo literal y en la interpretación y manipuleo de fórmulas, pero basta limitarse a expresiones simples de uso común, sin necesidad de aburrir con fatigosos cálculos con monomios, polinomios y expresiones algebráicas complicadas. La función exponencial y los logaritmos son importantes, pero estos últimos con pocos decimales y a través de calculadoras de bolsillo, más que con las clásicas tablas, que han pasado a ser referencias históricas. Los sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas deben darse a través de su representación gráfica y sus soluciones, en general, mediante métodos aproximados con el uso de calculadoras simples.

Aunque en muchos paises ya se han introducido, vamos a mencionar algunos temas que forzosamente deben figurar entre aquellos que todo ciudadano debe haber sido informado durante el periodo de la escuela obligatoria, y que sin embargo hasta fechas muy recientes se consideraban pertenecientes a niveles superiores de la enseñanza. Tal vez alguno de los contenidos que vamos a mencionar no sea fácil de exponer al nivel de la escuela elemental, pero precisamente éste es el desafío actual para los educadores, y constituyen el principal problema que hay que estudiar en los centros de investigación pedagógica, para luego experimentar en escuelas piloto convenientemente preparadas para ello.

En primer lugar hay que introducir las ideas básicas de la probabilidad y la estadística. La matemática en la escuela se ha pensado siempre como determinista, en la cual los problemas se pueden resolver exactamente, hasta cualquier cifra decimal. Hay que cambiar este pensar determinista por el pensar probabilista o estadístico, basado en valores medios, grandes números, extrapolaciones e inferencias, pues los fenómenos y las situaciones aleatorias son los que más aparecen en la naturaleza y en la vida de relación. Sobre esta cuestión son muy interesantes las sugerencias y experiencias que figuran en la revista inglesa Teaching Statistics (Universidad de Scheffield) y en las actas de las Conferencias Internacionales sobre la Enseñanza de la Estadística (ICOTS) que se celebran cada 4 años a partir de 1982, la última en Nueva Zelanda en agosto del año actual (1990). El problema de la enseñanza de las probabilidades y de la estadística en niveles cada vez más bajos de la educación preocupa en todos los países y se va avanzando mucho al respecto.

Para no citar más que un ejemplo, mencionaremos la importancia didáctica y práctica de las tablas de números al azar. Ellas ayudan a la simulación de problemas y a comprender el papel del azar y a la importancia de saber elegir un modelo adecuado para el tratamiento de cada problema. Es la base del método de Monte Carlo de mucho interés conceptual y práctico. También hay que pensar en la manera más conveniente de presentar problemas de investigación operativa y programación lineal. Una idea sobre la manera de tratar problemas de colas o filas de espera basada en la simulación y confección de estadísticas es muy importante y de aplicación muy generalizada, por lo que debe incluirse en la enseñanza obligatoria.

Otro tema esencial es la introducción lo antes posible de la computación, no solamente en cuanto a la calculatoria, sino también en el uso de las calculadoras como ordenadores y fuentes de información. Es decir, hay que educar también en el pensar informático pues no es lo mismo actuar en un mundo sin computadoras que en el mundo actual, plagado de botones y teclados para apretar y pantallas para ver, más que de libros y catálogos o formularios para leer.

Es muy posible que el hombre informático pierda en precisión razonadora y capacidad de reflexión para el análisis detallado de los problemas, por estar obligado a actuar con mucha velocidad en su decisiones y actos. Por tanto, la educación actual debe ingeniarse para ayudar a la simbiosis hombre-máquina del futuro, despertando y educando los reflejos necesarios para una acción casi automática en muchas situaciones de la profesión y de la vida diaria. Hay que educar en el planteo de los problemas en programas calculables, sin demasiada preocupación para economizar el número de operaciones o la cantidad de parámetros, pues la velocidad de las máquinas modernas hace inútiles tales preocupaciones. Esta misma velocidad hace praticable mucho más que antes el método de "ensayo y error", probando soluciones tentativas hasta ir encontrando y ajustando la verdadera con suficiente aproximación, sin pretensiones de exactitud inútil.

Desde los primeros grados hay que ir educando no sólo en la matemática propiamente dicha, sino también en el razonamiento lógico y deductivo, que es la base de la matemática, pero que es también imprescindible para ordenar y asimilar toda clase de conocimiento. Hay que ir educando al alumno en el lenguaje apropiado para comprender la nomenclatura y funcionamiento de la actual tecnología, así como la base científica que la sustenta.

Por tanto, hay ciertos conocimientos de lógica que deben usarse con frecuencia en la clase, para que vayan siendo asimilados como parte natural del lenguaje y del pensar cotidiano, más que como conceptos adquiridos a través de un aprendizaje especial. No hace falta incluir en los programas una parte de lógica, con silogismos, cuantificadores y tablas de verdad como conocimientos básicos a los que se hará referencia cuando llegue el momento. Es mejor ir aprendiendo las leyes del razonamiento de manera natural, como algo inherente al lenguaje, de la misma manera como se aprende a hablar sin conocer la etimología de las palabras. Por ejemplo, las ideas de inducción, demostración por reducción al absurdo, condición necesaria y suficiente o "si y sólo si", hay que aprenderlas como ejemplos referentes a casos concretos a medida que van apareciendo, sin pretender filosofar sobre su significado abstracto.

Lo mismo puede decirse de la teoría de conjuntos, que a este nivel de la enseñanza para todos debe ser tan solo un lenguaje, de aplicación contínua sobre la marcha del curso y muy útil para mejor comprender y expresar razonamientos y resultados, pero por tratarse de un medio y no de un fin, la parte de teoría de conjuntos que no se vaya a utilizar puede y debe suprimirse. Otra cosa es, naturalmente, para los estudios de nivel terciario y para alumnos de carreras matemáticas, para los cuales la teoría de conjuntos es esencial en sí misma.

Otros puntos que deben irse incluyendo en el ciclo de la enseñanza para todos, son los siguientes:

a) Elementos de la teoría de muestreo para poder entender las bases de las encuestas de opinión o de los grados de audiencia de ciertos programas de televisión (rating) y poder apreciar su grado de confiabilidad.

b) Puesto que la vida es un contínuo de decisiones que cada uno debe tomar con frecuencia y que influyen o pueden influir mucho en su futuro, la escuela debe informar sobre la existencia de una teoría de la decisión, construyendo algunas matrices simples referentes a problemas elementales que llamen la atención del alumno.

c) También va siendo uso generalizado la medida de la cantidad de información de los mensajes (entropía, códigos, ruido) y por tanto, sin pretender formar técnicos especializados, la idea de la unidad de información (bit) y su aplicación a ejemplos simples debe incluirse entre los contenidos de la enseñanza obligatoria para todos.

Habría que buscar otros temas posibles de tratar matemáticamente que sean de actualidad y uso en el mundo de hoy, para estudiar su posible exposición elemental y luego introducirlos en el ciclo de la enseñanza para todos. Es una tarea para educadores y matemáticos que debe ser alentada y estimulada.

En cuanto a la didáctica, en cualquier nivel, la enseñanza de la matemática debe incitar a la creatividad, mostrando cómo la matemática es un edificio en construcción que necesita de contínuos aportes y remodelados. Actualmente se insiste mucho en la metodología basada en la resolución de problemas. En realidad no es ninguna novedad, pues la verdadera matemática ha consistido siempre en la resolución de problemas: nunca puede ser una sistemática de definiciones y descripción de propiedades. De todas maneras no está de más repetirlo muchas veces para que el énfasis en ella no disminuya. Pero, además, pensando en la creatividad que conviene desarrollar, no solamente hay que <u>resolver</u> problemas, sino que es muy importante <u>proponer</u> problemas. Hay que interesar a los alumnos para que aprendan a extraer el planteo en forma matemática de situaciones reales o imaginadas y luego llevar el resultado, como problema propuesto, a la consideración del aula. El hecho de proponer problemas que tengan sentido es tan importante en matemáticas como el de resolver problemas planteados por otros. Es a través de esta acción alternada entre proponer y resolver que la matemática avanza y crece.

Nos hemos referido al problema de decidir acerca de la matemática necesaria para todos, como parte integrante de una cultura general para todos los miembros de la sociedad actual. Se trata posiblemente del problema más importante que tiene planteado la educación matemática en el día de hoy y en el que están involucrados matemáticos, educadores, psicólogos y sociólogos.

Pero queda otro problema, también importante, que consiste en elegir la matemática necesaria para aquellas profesiones en que la matemática no es un fin, sino un medio para su mejor ejercicio. Es decir, averiguar la matemática que puede ser útil a los profesionales no matemáticos de nivel terciario. Se puede suponer que ellos tienen ya los conocimientos básicos del ciclo obligatorio e incluso es posible que hayan realizado estudios matemáticos preparatorios para su ingreso en el tercer nivel. Todos estos conocimientos adquiridos debe suponerse que están en su memoria (en el sentido de las computadoras) para el momento que los necesiten. Pero a partir de esta plataforma de conocimientos, hay que analizar cuáles pueden ser los nuevos conocimientos que los matemáticos pueden ofrecerles para su mejor formación superior.

Desde luego hay la parte de la matemática clásica (esencialmente las nociones de cálculo infinitesimal) que ya es tradicional y sobre la cual solamente hay que decidir sobre el más o el menos que les pueda interesar, y sobre la influencia en su presentación de los actuales medios computacionales. Pero actualmente, entre la gran producción matemática de los últimos años a la que ya hicimos referencia, es seguro que habrán surgido nuevos resultados y nuevas ideas que podrían ser de utilidad en ciertas ramas del saber, como la física, ingeniería, biología, economía, ciencias sociales y muchas otras, pero cuyos usuarios no tienen tiempo de enterarse de su existencia. Sería urgente que las universidades y los centros de investigación involucrados se dispusieran a organizar cursos o seminarios para la divulgación de las nuevas adquisiciones y consideraran la posibilidad de incluirlas en los programas de las asignaturas de matemáticas de la carrera correspondiente, en sustitución de muchas cosas obsoletas que sin ningún perjuicio para los estudiantes pueden suprimirse. Se trata de un esfuerzo difícil pero valioso y necesario. Hay que simplificar los detalles técnicos, que deben dejarse para los matemáticos profesionales, y procurar que los resultados, asegurada su validez por estos últimos, lleguen a hacerse intuitivos y comprensibles para quienes los necesiten.

Las palabras siguientes de Ortega y Gasset en su Misión de la Universidad (1930) cobran para la matemática de hoy plena actualidad: "Todo aprieta para que se intente una nueva integración de saber que hoy anda hecho pedazos por el mundo... Ha llegado a ser un asunto urgentísimo e inexcusable que la humanidad invente una técnica para habérselas adecuadamente con la acumulación del saber que hoy posee. Si no encuentra maneras fáciles para dominar esa vegetación exuberante quedará el hombre ahogado por ella... El movimiento que lleva la investigación a disociarse indefinidamente en problemas particulares, a pulverizarse, exige una regulación compensatoria -como sobreviene en todo organismo saludable- mediante un movimiento en dirección inversa que contraiga y retenga en un riguroso sistema la ciencia centrífuga".

Podemos citar algunos ejemplos relativamente recientes de conocimientos matemáticos que han resultado útiles a otras ciencias y que, por tanto, valdría la pena elementalizar para poner al alcance de los cursos de ciertas carreras no matemáticas, aunque fuera como materias optativas para determinados grupos o especialidades.

En varias ramas de las ciencias sociales y de la biología, medicina (diagnóstico por computadoras), ingeniería (seguridad de las estructuras) y otros lugares, han resultado de interés los llamados conjuntos borrosos, o conjuntos para los cuales la pertenencia o no de un elemento está definida con cierta probabilidad. Se trata en general de llegar a resultados con cierto grado de confiabilidad a partir de resultados imprecisos. Su importancia ha sido discutida muchas veces, pero su conocimiento parecería ser útil.

La biología es la parte de la ciencia que más ha asimilado parte de la matemática contemporánea, dando lugar a la biología matemática, cuyos cultivadores no son en general ni biólogos ni matemáticos y de aquí las dificultades que suelen encontrar para que sus trabajos sean valorizados. Habría que conseguir que la matemática utilizada fuera conocida por los biólogos clásicos, de manera análoga a como los físicos experimentales acuden a la física teórica para justificar y mejor comprender sus resultados. Una obra importante es la de René Thom <u>Estabilidad estructural y Morfogénesis</u> (1972), seguida de la teoría muy discutida del mismo autor sobre <u>Catástrofe</u> a la que se buscaron aplicaciones a la economía y otras ciencias, así como la teoría de la <u>Bifurcación</u>, con análogos fines. Son teorías cuyo futuro es todavía incierto, pero de las que sería interesante buscar exposiciones elementales que las hicieran comprensibles a los posibles usuarios sin los conocimientos matemáticos utilizados en su tratamiento original. Los matemáticos profesionales deben cuidar el rigor ciento por ciento de las teorías, pero quienes las necesiten únicamente por sus aplicaciones, basta que tengan de ellas una comprensión intuitiva que les permita ver claro en qué casos y de qué manera pueden aplicarse.

Otros ejemplos pueden ser la teoría de <u>grafos</u>, muy útil en muchas ramas de la ciencia y la teoría de la <u>forma</u> (shap) con aplicaciones a la arquitectura, a la ingeniería y al arte, en el Apéndice mencionamos alguna bibliografía al respecto, a partir de la cual se puede tener mucha más información.

Únicamente queremos referirnos, para terminar, a los llamados <u>fractales</u> introducidos por Mandelbrot, como ejemplo de objetos geométricos relativamente recientes cuyo estudio ha despertado mucho interés por su amplio espectro de aplicaciones, desde las artes plásticas a la física, la biología y la astronomía, y que tiene muchas vinculaciones con la computación y, además, con las teorías "caóticas" que se están desarrollando a caballo entre la física y la filosofía.

Desde siempre, la geometría ha estudiado curvas regulares, constituidas por arcos que son imágenes de un segmento de recta o de una circunferencia, por funciones que admiten muchas derivadas, de manera que responden a la idea intuitiva de la trayectoria de un punto en movimiento. Asi fueron la recta, la circunferencia, las cónicas y todas las curvas espaciales estudiadas en la antigüedad y en los siglos sucesivos (cicloide, astroide, lemniscatas, catenoide, ...). Recién en el siglo pasado, con el progreso de la teoría de funciones reales, se consideraron curvas sin tangente en ningún punto (Weierstrass) y curvas que llenan áreas (Peano). Estas curvas, que eran imágenes contínuas de un segmento y podían tener puntos dobles, fueron consideradas como ejemplos patológicos, interesantes para los matemáticos, pero lejos de cualquier posible aplicación. Un obstáculo para ello era la dificultad de su construcción aproximada para poder visualizar su forma o la forma de sus sucesivas aproximaciones. Después, ya en las décadas de los años 50 y 60 del presente siglo, se vió que objetos geométricos de ese estilo aparecían al estudiar las iteraciones sucesivas de transformaciones no lineales del plano sobre sí mismo, como fronteras entre las zonas cuyos puntos dan lugar a sucesiones periódicas o convergentes y las zonas cuyos puntos, por iteraciones sucesivas, no convergen. Resultaron unos objetos formados por conjuntos de puntos para los cuales cabe definir una medida, al estilo clásico, pero también una <u>dimensión</u>, que vale 2 cuando llenan un área y vale 1 para curvas propiamente dichas, pudiendo tomar cualquier valor entre 1 y 2 para otros conjuntos del tipo considerado. Como muchas veces la dimensión resulta un número fraccionario, Mandelbrot llamó fractales a esos objetos. Con las computadoras se han podido representar estos fractales y han resultado sorprendentes sus formas y posibilidades topológicas, de manera que han surgido problemas interesantes desde el punto de vista matemático y también de las aplicaciones de la física y la biología entre otras ramas de la ciencia, y también mediante coloraciones especiales se han obtenido cuadros competitivos con pinturas de artistas plásticos actuales.

Es un campo interesante que con el auge de las computadoras resulta de mucho interés por ayudar al desarrollo de la creatividad y la fantasía, con sólo tomar al azar transformaciones cuadráticas del plano en sí mismo y estudiar su comportamiento por repetición de las mismas, cosa que conduce a cálculos imposibles de realizar a mano, pero que con computadora se hacen rápidamente. Como ha descrito Mandelbrot, los fractales aparecen en la Naturaleza con mucha más frecuencia que las curvas regulares, las cuales resultan solamente al tomar la realidad en primera aproximación. En el movimiento browniano de partículas, la distribución de las galaxias, las formas del relieve terrestre, los fenómenos de turbulencia... aparecen los fractales de manera natural. Según Mandelbrot "la geometría de la Naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del cálculo infinitesimal".

Se trata de un ejemplo típico en la evolución de las realizaciones matemáticas: primero aparecen casos aislados como gérmenes de ideas nuevas cuyo alcance no se conoce; surgen luego nuevos conocimientos o nuevas técnicas que permiten el desarrollo del germen y una mayor comprensión del mismo; finalmente aparecen las aplicaciones que ayudan a una mejor comprensión de los fenómenos naturales. La misión de los matemáticos es ayudar a los especialistas de otras ramas a quienes las nuevas concepciones puedan ser útiles simplificando las dificultades para su comprensión y para que puedan ser intuidas y utilizadas sin mayores dificultades.

Como los fractales, seguramente existen en la matemática actual muchos conocimientos listos para las aplicaciones más diversas, que sólo esperan ser identificados y ser puestos a disposición de los científicos no matemáticos que puedan aplicarlos con éxito.

APENDICE

Vamos a mencionar en este Apéndice alguna bibliografía referente a temas diversos de la matemática actual que han resultado de interés en otros capítulos de las ciencias naturales o humanas. En las obras mencionadas se encuentra otra abundante bibliografía.

CONJUNTOS BORROSOS

AZORIN, F. Algunas aplicaciones de los conjuntos borrosos a la Estadística, Instituto Nacional de Estadística. Madrid, 1979.

KAUFMANN, A. Introduction a la theorie des sous ensembles flous, Tomos I y II, Masson, Paris 1975.

ZIMMERMANN, H.J. Fuzzy set theory and its applications, Kluwe Nijhoff Publishing, Boston, 1985.

APLICACIONES A LA BIOLOGIA Y AFINES

ROBERTS, F. (Editor), Applications of Combinatorics and Graph theory to the biological and social sciences, The IMA volumes

in Mathematics and its Applications, Springer, Berlin, 1989.
Mathematics in Biology and Medicine, Lecture Notes in Biomathematics, n 57, Springer, Berlin, 1985.

TEORIA DE LAS CATASTROFES Y BIFURCACION

Structural stability, the theory of catastrophes and application in the sciences, Lecture Notes in Mathematics, 525, Springer, 1976.
LU, YUNG CHEN, Singularity theory and introduction to Catastrophes, Springer, Berlin, 1976.
WIGGINS, STEPHEN, Global bifurcation and chaos analytical method, Springer, Berlin, 1988.
CHOW, S.N.-HALE, J.K. Methods of bifurcation theory, Springer, Berlin, 1982.
POSTON, T.-STEWART, J. Catastrophe theory and its applications, Pitman, Londres, 1978.

TEORIA DE GRAFOS

BERGE, C. Graphs, North Holland, Amsterdam, 1985.
CHEN, WAI KAI, Applied Graph theory, North Holland, Amsterdam, 1971.
HARARY, FRANK, Graph theory, Addison Wesley, Reading, Mass.
Random graphs'85, North Holland, Amsterdam, 1987.

FRACTALES. CAOS

MANDELBROT, B. Los objetos fractales, Tusquets, Barcelona.
Chaos and fractals, Proceedings Symposia in Applied Mathematics, vol. 39, American Mathematical Society, 1988.
Proceedings International Conference honouring B.Mandelbrot on his 65th birthday, North Holland, Amsterdam, 1989.
Chaotic dynamics and fractals, Edited by M.F.Barnsley and S.G.Demko, Academic Press, Orlando, 1986.
DEVANEY, R.L. An introduction to chaotic dynamical systems, Benjamin, Menlo Park, 1986.

ESTEREOLOGIA. TOMOGRAFIA COMPUTARIZADA

El objetivo es averiguar el interior de un cuerpo a partir de sus secciones por planos o por rectas. La estereología es de un carácter más elemental, en cuanto a la matemática se refiere y tiene aplicaciones a la metalurgia, petrografía, fisiología, botánica, ...; como técnica usa la microscopía. La Tomografía se usa principalmente en Medicina y su base es una matemática más superior y delicada.

UNDERWOOD, E.E. Quantitative stereology, Addison Wesley, Reading, 1970.
Acta estereológica, vol 6, Proceedings of the 7th International Congress for Stereology, editor J.L.Chermant, Caen.
STOYAN, D., KENDALL, W.S., MECKE, J. Stochastic Geometry and its Applications, Akademie Verlag, Berlin, 1987.
Computed Tomography, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, American Mathematical Society, editor L.A.Shepp, 1983.

TEORIA DE LA DECISION

LINDLEY, D.V. Making decisions, John Wiley, London, 1985.
RIOS, SIXTO. Analisis de decisiones, Ediciones ICE, Madrid.
RIOS, SIXTO y otros. Procesos de Decisión Multicriterio, EUDEMA, Madrid, 1989.

TEORIA DE LA INFORMACION

GIL ALVAREZ, PEDRO. Teoria matemática de la información Ediciones ICE, Madrid, 1981.

RAISBECK, GORDON Theorie de l'information, Masson, Paris.

TEORIA DE LA FORMA

Shaping Spaces, Proceedings of the conference held in Northampt Mass. Birkhauser, Boston, 1988.

KENDALL, D.G. Shape manifolds, Procrustean metrics and complex projective space, Bulletin London Mathematical Society, 16, 1984, 81-121.

DISCIPLINAS VARIAS

Advances in Cryptology, Lecture Notes in Computer Science, Berlin, Springer, 1988.

Applied Cryptology, Cryptographic Protocols and Computer Security Moldels, American Mathematical Society, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics.

Current trends in geomathematics, Plenum Press, New York, 1988.

MAZUMDAR, J. An introduction to mathematical physiology and biology, Cambridge University Press, 1989.

GLASS, L.-MACKEY, M.C. From Clocks to Chaos, Princeton University Press, 1988.