CB-609

RESOLUÇÃO DE PROBLEMA - UMA METODOLOGIA PARA APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS COM ANÁLISE DE MODELOS DE FENÔMENOS

João Bosco Laudares
jblaudares@terra.com.br
PUC Minas - Brasil

Núcleo temático: A resolução de problemas em matemática.
Modalidade: CB
Nível educativo: Formação e atualização de ensino
Palavras chave: Resolução de problemas, Fenômenos; Modelos; Equação diferencial

Resumo

O estudo de equações diferenciais ordinárias na graduação tem sido feito com prioridade com a resolução das equações, privilegiando processos de cálculo com procedimentos e uso de algoritmos. A resolução de problemas com a análise de fenômenos pela interpretação dos modelos das equações diferenciais e de sua solução, matematizando a lei física, com a representação algébrica e gráfica, proporciona a compreensão conceitual do estudante dos modelos presentes na situação-problema. Assim, procedimentos operacionais e trabalho com os conceitos nos problemas enriquecem o estudo das equações diferenciais, diversificando a didática. Polya (1994) sinaliza a resolução de problemas com quatro fases: interpretação do enunciado, estabelecimento de um plano, execução do mesmo e retrospecto da resolução para verificar a compatibilidade da solução com os dados. Stewart (2013) define quatro abordagens privilegiando a diversidade de representação: algébrica/equação, gráfica, numérica e verbal. Foi baseado nestes referenciais que construímos (LAUDARES E OUTROS, 2017) um design para resolução de problemas com a seguinte estrutura: (1) tomar o enunciado do problema e identificar os dados (lei física, as condições iniciais e/ou de contorno) e as questões a serem resolvidas; (2) determinar os modelos de equações e de gráfico com sua interpretação e fazer uma descrição verbal do procedimento do fenômeno.

INTRODUÇÃO

Neste artigo**,** é apresentada uma metodologia para resolução de problemas com equações diferenciais ordinárias com análise de modelos representados por equações ou por gráficos. Em LAUDARES e OUTROS (2017) foi construído um design para resolução de problemas com a seguinte estrutura: (1) tomar o enunciado do problema e identificar os dados (lei física, as condições iniciais e/ou de contorno) e as questões a serem resolvidas; (2)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

determinar os modelos de equações e de gráfico com sua interpretação e fazer uma descrição verbal do procedimento do fenômeno.

O embasamento teórico se fez com a resolução de problemas e diversidade de representações. O estudo de equações diferenciais ordinárias na graduação tem sido feito com prioridade com a resolução das equações, privilegiando processos de cálculo com procedimentos e uso de algoritmos. A proposta apresentada, procedimentos operacionais e trabalho com os conceitos nos problemas enriquecem o estudo das equações diferenciais, diversificando a didática.

Inicialmente é realizada uma apresentação teórica para dar embasamento à proposta metodológica e, em seguida, um problema resolvido de acordo com parâmetros desta metodologia.

Matematizarão de fenômenos com Equações Diferenciais

O conceito de fenômeno, como um acontecimento, um processo em ação, em transformação, com mudanças perceptíveis por observação, pode ser entendido como uma experimentação pelo “movimento” e pela “variação”.

Ao observar um fenômeno, em seu processo de variação procedemos uma medição que requer uma analítica com instrumentação para aferir e tratar as informações com variáveis, com parâmetros, com sistema de unidades e escalas.

Traduzir este processo inerente ao fenômeno em uma linguagem simbólica específica, numa tentativa de sintetizar características de sua dimensão, constitui o ato de matematizar o fenômeno, ou seja, a ação de matematização.

Matematizar é, então, a ação que resulta numa manifestação sintética dos elementos observados, de suas relações e leis inerentes a um fenômeno processado, expressos em linguagem simbólica de uma das áreas específicas da Matemática. Essa manifestação se apresenta como um modelo matemático do fenômeno, segundo Bassanezi (2006).

A Matemática tem instrumental simbólico adequado para modelar um fenômeno, além da sua descrição, ou expressá-lo em linguagem natural, que pode ser oral ou escrita.

Como linguagem simbólica escrita, apresenta-se, como possibilidade analítica e instrumental, o Cálculo Infinitesimal da Matemática. Em sua base estrutural estão as grandezas ou variáveis simbolizadas por x e y, tal que y depende de x, isto é, y=f(x), e suas

ISBN 978-84-945722-3-4

respectivas variações infinitesimais diferenciais dxedy. A relação, dy/dx, entre esses infinitésimos diferenciais, permite conhecer propriedades locais (pontuais) de y=f(x), como variação ou mudança de crescimento/decrescimento, dy/dx, pontos de máximo/mínimo e concavidade, objeto de estudo do Cálculo Diferencial. Por outro lado, o acúmulo ou soma do produto de partes infinitesimais, f(x)dx, permite conhecer propriedades *globais* de y=f(x), em dado intervalo da variável x, como área e volume ou pressão e trabalho, objeto de estudo do Cálculo Integral.

Entretanto, no estudo de fenômenos usaremos varáveis que expressam as grandezas dependentes e independentes inerentes ao fenômeno:

- Variável independente t (tempo) na maioria dos fenômenos.
- Variáveis dependentes podendo ser: T (temperatura), m (massa), i (intensidade de corrente no circuito), P(população).

Deste modo y e x são mais usados em Matemática. Assim, o Cálculo Infinitesimal engloba o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Atualmente, a denominação de Cálculo Diferencial e Integral é a mais usada.

Assim o fenômeno, um acontecimento com plena ativação e em contínuo processo de variação com movimento, se manifesta por uma configuração dimensional (que pode ser medida, modelada por uma observação caracterizada pelo uso de unidades de medida).

Desta forma, todo fenômeno se oferece para ser medido, dimensionado a partir de uma observação, expressa por processos quantitativos ou qualitativos, por modelos definidos por parâmetros medidores, tal como a variação do tempo.

Na matematização no ensino superior, a instrumentação criada para medir pode se configurar pelos conceitos de limite, derivada, diferencial, integral, a partir do cálculo infinitesimal.

Para modelagem matemática, as Equações Diferenciais se apresentam como instrumento adequado para a representação e configuração de muitos fenômenos.

Apresentação metodológica na resolução de um problema com Equação Diferencial

Vários são os passos a serem percorridos até a solução completa de um problema (suas equações) que envolve uma Equação Diferencial. Ressaltamos dois deles:

ISBN 978-84-945722-3-4

(a) Lei física – É expressa, matematicamente, pela análise da correlação das variáveis envolvidas e dos parâmetros. São estudados problemas que envolvem as Equações Diferenciais. O que queremos considerar são as etapas típicas da modelagem, isto é, os passos que vão da situação física à sua formulação matemática.

(b) Condições iniciais ou de contorno - com as quais poderemos partir de uma solução genérica e chegar a uma solução particular.

Condições iniciais: entendemos uma situação em determinado instante. Esta conotação de “inicial” é sugerida visto que a variável independente, geralmente é o tempo. A solução do problema mostra o ocorrido após aquela situação dada ($t = 0$);

Condições de contorno: entendemos as situações em mais de um valor da variável independente. Normalmente após um instante inicial ($t > 0$).

Temos assim um Problema de Valores Iniciais - PVI ou um Problema de Valores de Contorno - PVC.

Duas importantes propriedades devem ser levadas em consideração:

1) O número de condições iniciais ou de contorno é equivalente a soma dos parâmetros a serem determinados mais as constantes de integração.

2) O número de constantes de integração na solução geral da Equação Diferencial ordinária é o mesmo da ordem da Equação Diferencial.

A metodologia de resolução de problemas é acompanhada de determinação de passos com esquema próprio e num quadro que traz a análise do problema, como a seguir.

Enunciado
Dados
Questões

Interpretação do enunciado

‘1º Passo: Matematização da lei física
2º Passo: Constantes dadas – Substituição na equação do fenômeno
3º Passo: Condições iniciais ou de contorno
4º Passo: Resolução da equação diferencial do modelo
5º Passo: Cálculos solicitados nos problemas: explicitar o que se pede

ISBN 978-84-945722-3-4

6º Passo: Modelo das equações do fenômeno
7º Passo: Modelo dos gráficos do fenômeno
8º Passo: Descrição sintética do fenômeno num pequeno texto

Esta estrutura pode ser considerada um padrão a ser seguido, ocorrendo alterações de acordo com a natureza do fenômeno estudado.

Nesta abordagem, o enunciado é apresentado analiticamente sendo separados os dados e questões em itens, que são convertidos em PASSOS para resolução: cada item corresponde num PASSO.

O problema, a seguir, é analisado por três representações de modelos: das equações, dos gráficos e de descrição na verbal do procedimento do fenômeno.

Problema de variação populacional – Lei de Malthus

Problema de Valor de Contorno – PVC e Problema de Valor Inicial - PVI

ENUNCIADO

DADOS

(I) Uma população se desenvolve proporcionalmente a população atual, segundo a Lei de Malthus.

(II) Sabe-se que a população inicial é de 5000 habitantes e 10 anos depois é 8000

QUESTÕES

(III) Determine a população em qualquer tempo

(IV) Determine os modelos de equações da população

(V) Analise a variação da população

(VI) Esboce os gráficos do modelo

(VII) Descreva num pequeno texto o fenômeno comparando os gráficos e as equações

INTERPRETAÇÃO DO ENUNCIADO E RESOLUÇÃO DO PROLBLEMA

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

1º Passo: MATEMATIZAÇÃO DA LEI DE MALTHUS

Identificação das variáveis

P - Variação da população - Variável dependente

t - Variação do tempo - Variável independente

k - Constante de proporcionalidade

A variação da população, segundo a Lei de Malthus pode ser expressa matematicamente

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{dt}} - kP = 0}$$

2º Passo: Condição inicial e de contorno

t = 0 anos → P = 5000 habitantes

t = 10 anos → P = 8000 habitantes

3º Passo: Determinação da população em qualquer tempo

s.v. → $\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{k\,P} \rightarrow \frac{dP}{P} = \mathrm{k\,dt} \rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{\mathrm{k\,t}}$

Aplicando as condições inicial e de contorno:

t = 0 ano → P = 5000 virá P = 5000 $\mathrm{e}^{\mathrm{k\,t}}$

t= 5 anos → P = 8000 virá P = 5000 $\mathrm{e}^{0{,}094\,\mathrm{t}}$

4º Passo: Modelos de equações da população

(1) Velocidade da variação da população em função do tempo

Levando o valor de "k" na equação de crescimento, teremos

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = 0{,}094\ \mathrm{P}} \qquad (1)$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

(2) Velocidade de crescimento da população em função do tempo.

Derivar a equação de "P" em função de "t":

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = 470\ e^{0,094\ t}} \qquad (2)$$

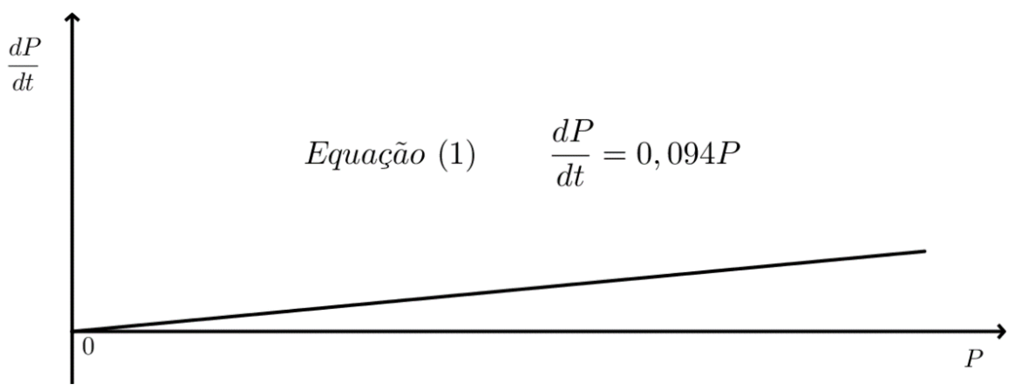
(3) Variação da população em função do tempo.

$$\boxed{P = 5000\ e^{0,094\ t}} \qquad (3)$$

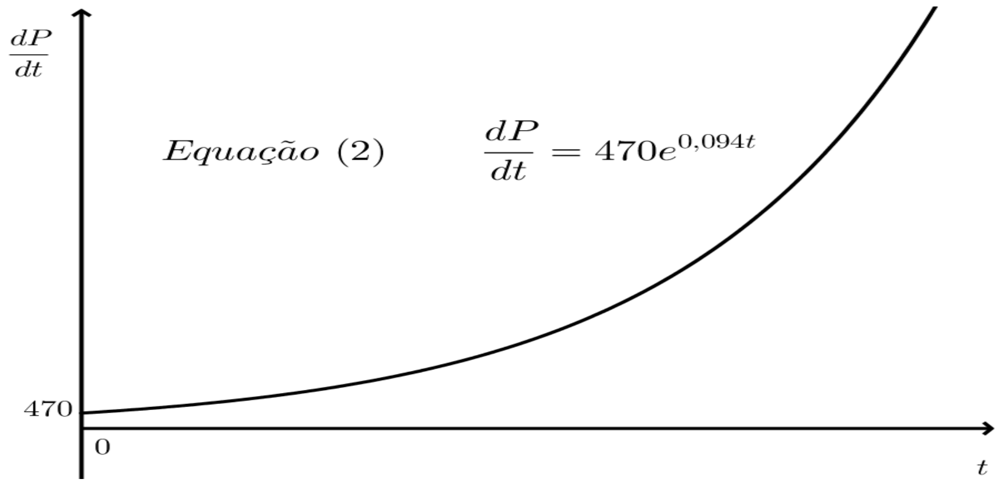
5º Passo: Análise do desenvolvimento da população

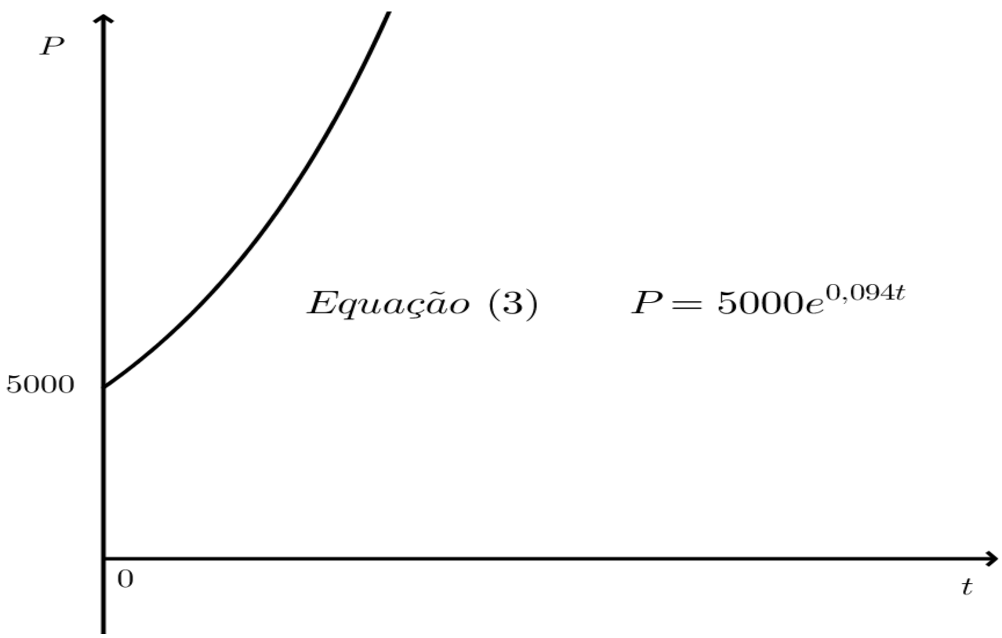
Verifique no graficamente (6º passo) que a população (P) se desenvolve exponencialmente crescente de acordo com a Lei de Malthus. Isto significa que num desenvolvimento do tempo a população irá crescer indefinidamente, tratando-se de um Modelo Ideal. Entretanto, na realidade a população tende a se estabilizar o que será analisado por um outro modelo, o de Verhulst.

6º Passo: Esboço dos gráficos do desenvolvimento da população



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4





7º Passo: (a)

As respostas das seguintes questões dão suporte à compreensão do comportamento do fenômeno estudado.

1) Por que o gráfico $\frac{dP}{dt}$ (Eq 1) é uma reta?

2) Por que o gráfico (Eq.1) é crescente?

3) Por que o gráfico (Eq. 1) é positivo?

4) Analise o gráfico (Eq. 2) quanto a natureza da derivada.

5) Verifique que a equação do gráfico (Eq. 2) é crescente exponencialmente.

ISBN 978-84-945722-3-4

6) Verifique que para um tempo crescente a população será sempre crescente. Não há limite.

(b) A partir do seu entendimento do comportamento do fenômeno, escreva um texto no quadro seguinte comparando os gráficos e as equações.

Considerações Finais

Trata-se de uma proposta inovativa que resulta de pesquisas da matemática superior, especificamente do cálculo diferencial e integral, com resolução de problemas pela aplicação de equações diferenciais. Parte-se da premissa não só da operacionalização da resolução das equações diferenciais com seus processos de cálculo e uso de algoritmos, na construção da habilidade de procedimentos pelo estudante, mas na busca de desenvolvimento de outras habilidades de análise dos conceitos e propriedades de um fenômeno.

Os resultados das investigações realizadas com o ensino de equações diferenciais e a metodologia usada nas obras editoriais, para uso como livro-texto na disciplina de EDO ou de Cálculo com EDO, deram suporte à edificação da sequência didática proposta. Sua efetividade pode resultar num desempenho eficaz para o processo ensino-aprendizagem constituído da tríade: aluno - mídias - professor.

Referências bibliográficas

BASSANEZI, Rodney Carlos.(1988). *Equações diferenciais com aplicações*. São Paulo: Harbra,

LAUDARES e outros(2017). *Equações diferenciais ordinárias e transformadas de Laplace.* Belo Horizonte: Artesã, 2017

POLYA, George.(1994). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciências

STEWART, James.(2013). *Cálculo*. São Paulo: Cengage Learning: 2013

ISBN 978-84-945722-3-4