

## LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE PARÁBOLA: UN ESTUDIO DE CASO

Jorge Hernán López Mesa y Eliécer Aldana Bermúdez.  
jhlopez@uniquindio.edu.co- eliecerab@uniquindio.edu.co.  
Universidad del Quindío. Armenia Colombia

Tema: I.3 - Pensamiento Geométrico.

Modalidad: Comunicación

Nivel: Terciario - Universitario

Palabras claves: parábola, sistemas de representación, situaciones didácticas, Ingeniería Didáctica.

### Resumen

*Esta propuesta hace parte de un estudio más amplio que se desarrolló con estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Universidad del Quindío, con el objetivo de analizar cómo llegan a la comprensión/construcción del concepto de parábola como una cónica, desde las dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva que implica la construcción del concepto. La investigación se apoya en el marco teórico de las situaciones didácticas, y la metodología de la Ingeniería didáctica, se utilizó para ello como instrumentos: unos cuestionarios, una entrevista y videograbaciones, y la asistencia de entornos informáticos con el software Geogebra.*

### 1. Presentación del problema

En la enseñanza de la parábola como una cónica son muchos los investigadores que coinciden con las dificultades que presentan los estudiantes en su estudio, al respecto Just y Carpenter (1985), menciona que los sujetos identifican las figuras cónicas en un contexto general, enunciándolas o visualizando un esquema a nivel gráfico; pero al hacer un trabajo que involucre sus representaciones, características, propiedades y aplicaciones, hay diferencias en su interpretación y el reconocimiento de sus elementos y generalmente se responde de forma incorrecta. En el mismo sentido, Casanova (2009), determina en su trabajo de estudio con las cónicas: dificultad en la relación entre elementos gráficos y fórmulas o ecuaciones, escritura incorrecta en ecuaciones, representación gráfica incorrecta a partir de una ecuación, no identifican el eje de simetría de una parábola y otras cónicas. Asimismo, Gómez y Carulla (2000), asevera que los estudiantes aprende de memoria las ecuaciones, no se hacen procesos de análisis y tienen dificultad en relacionar las diversas escrituras algebraicas, no relacionan de forma lógica una representación algebraico y una geométrica.

Considerando las evidencias registradas en prácticas pedagógicas en grupos universitarios en el espacio académico de geometría analítica, nos interesa conocer la manera como los estudiantes de ingeniería de sistemas llegan a la

construcción/comprensión del concepto de la parábola como una cónica, y determinar cuáles son las dificultades, las concepciones que se presentan, al igual el camino que recorren a nivel didáctico, y los elementos matemáticos que se aplican en su construcción, desde los diferentes sistemas de representación.

## 2. Marco de referencia conceptual

La investigación está inscrita en el modelo de las situaciones didácticas de Brousseau (1997), con el propósito de diseñar y aplicar un proyecto de aprendizaje sobre la comprensión y construcción del concepto de parábola; la metodología que se involucra en el estudio es la Ingeniería didáctica Chevallard (1998) y permite realizar un análisis a-priori y a posteriori de unas situaciones a-didácticas y didácticas, de unas secuencias de trabajo en el aula y unas estrategias de trabajo organizadas en el tiempo, que integran unos elementos matemáticos denominados variables didácticas que configuran este objeto matemático de investigación

Esta metodología sugiere la utilización de unos componentes didácticos: el saber, el docente y el estudiante, que deben aportar información sobre elementos necesarios a nivel cognitivo, epistemológico y didáctico que permitan realizar la transposición del conocimiento y además conocer la forma como un estudiante desarrolla y construye el concepto de la parábola, el cual es el producto de una serie de secuencias de trabajo de aula, la implementación de una situaciones didácticas como lo plantea Artigue (1995), que corresponden a un compromiso entre las partes por medio de contrato didáctico.

En este caso la situación problema tiene que ver con el aprendizaje, por tanto se plantean unas tareas al estudiante, con el fin de conocer las nociones previas, la interpretación de la realidad mediante la utilización de estrategias y conocimientos para resolver las tareas, y de esta forma el profesor realiza las intervenciones durante el proceso didáctico, para facilitar el trabajo y generar cambios favorables en el aprendizaje, con el propósito de orientar el estudiante al aprendizaje del concepto matemático.

### 3. Metodología

En este sentido se consideran los aspectos involucrados en el contexto de la investigación indicando las características, la población y la metodología aplicadas en este estudio; la cual es cualitativa interpretativa, según lo refiere Dreyfus y Eisenberg (1990), citado por Aldana (2011, p: 19), y permitirá entender y comprender en las diferentes fases del trabajo la forma como operan, establecen relaciones, comparaciones y logran llegar a procesos de pensamiento avanzado los estudiantes; y de esta forma explicar la manera cómo los sujetos llegan a la comprensión/construcción del concepto, apoyada en la Ingeniería Didáctica de Chevallard (1998).

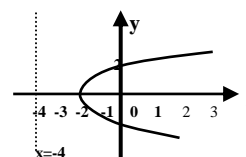
La investigación se desarrolla en varias fases: (a) elaboración de situaciones a-didácticas, (b) validación de las tareas por juicio de expertos, (c) aplicación de las situaciones a-didácticas, (d) confrontación de la validación por juicio de expertos y los resultados alcanzados por los sujetos, (e) análisis a priori de la situación a-didáctica, modificación y elaboración de las situaciones didácticas, (f) aplicación de algunas situaciones didácticas, (g) análisis a posteriori, (h) realización de entrevistas, (i) triangulación de la información. Para el estudio se tomó un grupo de 25 estudiantes de Ingeniería de Sistemas de primer semestre, algunos son repitentes, cuyas edades oscilan entre 17 y 30 años. Se utilizó el programa Geogebra, se aplicaron cuestionarios, entrevistas, observación en el aula y video grabaciones. A partir de estos instrumentos se realizó el análisis mediante triangulación de la información.

### 4. Análisis de datos

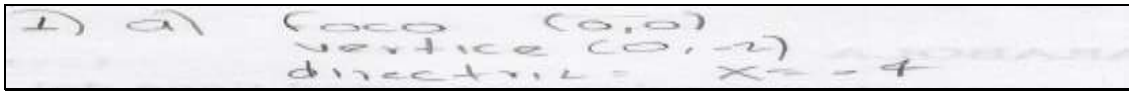
En el análisis de la información se consideran la solución de tareas (cuestionarios), entrevistas y videograciones, al igual que notas de desempeño del mismo estudiante durante las actividades, iniciaremos con fase a-didáctica y una tarea que nos permite identificar las nociones básicas que reconoce el estudiante de la parábola. Seguidamente aparece el enunciado de la tarea 1 del cuestionario 1, situaciones a-didácticas.

*Observe la gráfica correspondiente a una parábola y determine los aspectos que se relacionan.*

- a. ¿Cuáles son las coordenadas del foco y el vértice de la parábola?*
- b. ¿Cuál es la ecuación de la directriz?*
- c. Según la posición de la directriz y el foco ¿cuál es el eje principal de la parábola?*
- d. ¿Cuál es la ecuación correspondiente a la cónica?*
- e. Determine la longitud del lado recto.*



En el recuadro 1, se muestra la manera como el estudiante realiza la tarea:



#### Resolución de la tarea 1 del cuestionario

Se observa como el estudiante indica las coordenadas del foco (0,0), que corresponden a una parábola con vértice fuera del origen, al igual da como coordenadas de vértice (0,-2) que identifican una parábola con orientación hacia arriba, lo cual no es correcto, ya que la curva de la gráfica está orientada hacia la derecha, sin embargo, de forma visual se aprecia en la representación que la directriz está definida por la ecuación  $x = -4$ . Esto indica que el sujeto reconoce de forma visual algunos elementos de la parábola, aunque no es claro en la relación que establece entre ellos, por la forma como determina las coordenadas del vértice, y porque no logra definir el eje de simetría, el lado recto, y la orientación de la curva.

Durante la entrevista esto es lo que argumenta el estudiante sobre su desempeño en el desarrollo de la tarea correspondiente a la fase a-didáctica.

*P: ¿Qué elementos aparecen visibles en la representación gráfica de la tarea propuesta en el cuestionario?*

*E: En la gráfica se pueden determinar el vértice, el foco, la línea que muestra  $x = -4$ , la posición de la gráfica.*

*P: ¿Cómo puede establecer usted que la gráfica que se referencia corresponde una parábola?*

*E: Es una parábola, la forma de la curva es de una parábola. Corresponde a una ecuación de segundo grado.*

*P: ¿Qué importancia tiene la línea recta que se muestra en la gráfica?*

*E: La línea recta es una ecuación  $x = -4$ , como se ve en la gráfica, esta acompaña la parábola.*

*P: ¿Indique cuales son los valores de los elementos que usted referencio anteriormente?*

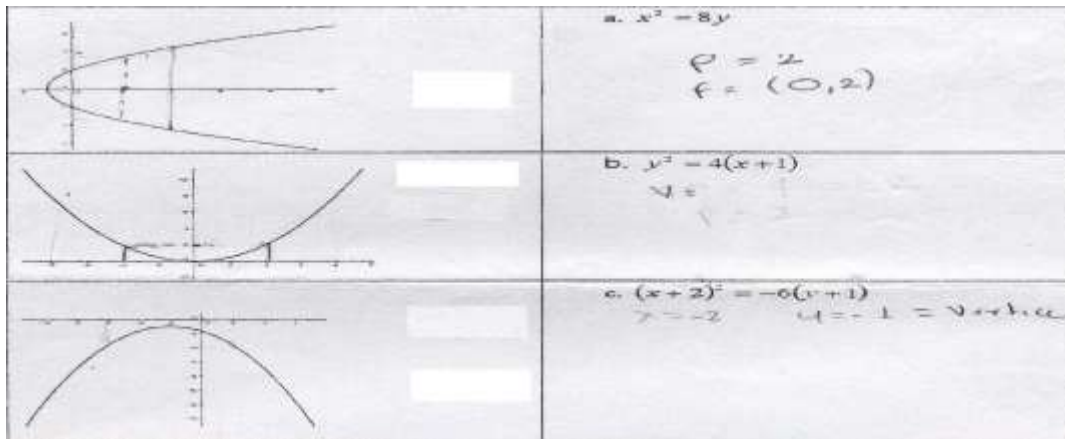
*E: El vértice (0,-2), el foco (0,0), y la directriz  $x = -4$ .*

*P: Si observa la gráfica es válido decir que el foco corresponde al punto (0,-2)*

*E: Si, es correcto [¿Cuándo hablamos de coordenadas primero se referencia el valor en la coordenada de x y luego el valor en la coordenada de y]. Ah sí, hay un error es (-2,0).*

Continuando el estudio de caso, se presenta la siguiente tarea a-didáctica al estudiante

De acuerdo con lo que usted conoce a cerca de la parábola, relaciones la expresión algebraica con la gráfica correspondiente de la cónica que aparece al lado izquierdo de la tabla. Justifique su respuesta.



**Figura 2. Resolución de la tarea**

El estudiante debajo de la ecuación que se presenta en la columna derecha trata de determinar algunos elementos de la parábola, sin orden, además no propone o indica relación alguna entre la ecuación y las gráficas que se muestran en la columna izquierda, lo evidencia que el estudiante no tiene una comprensión, ni logra abstraer las características presentes en la ecuación, además no hay una coordinación entre los elementos que se visualizan representación gráfica con la representación algebraica.

Frente a estas realidades y considerando las nociones que tienen los alumnos sobre el sujeto matemático en estudio, se proponen unas secuencias de enseñanza e intervención en el aula, para tratar de definir en forma lógica el lugar geométrico de la parábola.

**OBJETIVO:** Identificar los elementos que configuran la parábola con vértice en el origen.

**VARIABLES DIDÁCTICAS:** *Elementos de la Parábola* (foco, directriz, vértice, eje focal, lado recto y orientación).

- El maestro pide a los estudiantes que sobre una hoja tracen un plano cartesiano y sobre los ejes  $x$  y  $y$ , midan distancias iguales que permitan ubicar puntos en el plano.
- Se pide a los estudiantes que tracen una línea  $l$  perpendicular al eje  $x$ , y que pase por el punto  $(0, -3)$  y se solicita, que ubiquen el punto de intersección  $L$  entre las dos rectas, (se dan instrucciones).
- Hace que determinen la distancia del origen  $(0,0)$  al punto de intersección  $L$  de la recta trazada.
- A continuación se les indica que tracen un punto  $F$ , que sea simétrico al origen del plano, en el punto de intersección  $L$  "un punto cuya distancia del origen en sentido contrario u opuesto a la directriz".
- Ahora, tracen puntos utilizando escuadras donde se cumpla la condición que la distancia de la línea recta  $l$ , sea igual a la distancia del punto  $F$ . Esto se hace mediante la medición del profesor,

¿Cuántos puntos se pueden construir utilizando la condición  $|LR|=|RF|$ ?

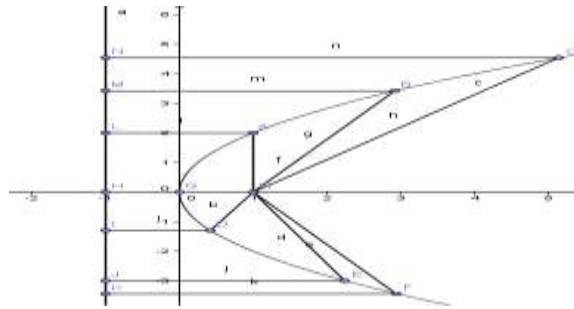
#### ANÁLISIS DE LA SECUENCIA

El maestro indica los materiales y los objetos a emplear, y da instrucciones precisas del proceso para construir líneas, puntos, y toma de medidas.

Los estudiantes ponen en práctica la toma de medidas iguales para trazar puntos, que cumplan la condición  $|LR|=|RF|$ .

Conocimientos esperados: Trazar y ubicar puntos, líneas rectas, toma de medidas, identificar características, propiedades, relaciones y conceptos.

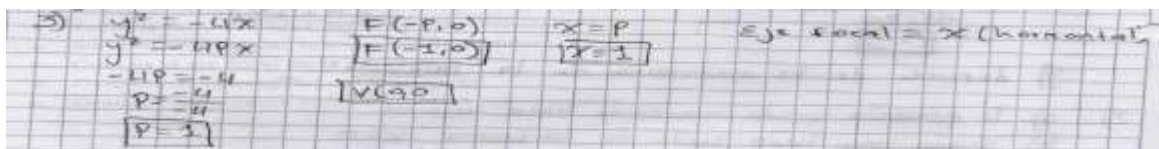
El estudiante logra construir la siguiente gráfica mediante el trazo de puntos y con ayuda del software Goegebra.



Como se observa el estudiante logra establecer la relación entre un punto fijo llamado foco y la distancia que se da entre este punto y otro conjunto de puntos que forma el lugar geométrico de la parábola y cuya distancia es igual a la longitud de este punto a la línea que representa la directriz. En la actividad el recurso informático facilitó el trabajo por la forma dinámica como se posicionan los puntos y se toman medidas.

Continuando con la comprensión del concepto de parábola, mostramos la forma como el estudiante aborda la siguiente tarea didáctica.

- Dada la ecuación cuadrática  $y^2 + 4x = 0$ , responda los interrogantes relacionados con la parábola:*
- Hallar las coordenadas del foco y del vértice.*
  - Establecer o indicar la ecuación de la directriz*
  - ¿Cuál es el eje focal de la parábola?*
  - Graficar la parábola correspondiente a la ecuación*



**Figura 4. Resolución de la tarea**

El estudiante organiza algebraicamente la ecuación indicándola como una ecuación canónica de la parábola, luego hace una relación de su estructura con la expresión  $y^2 = -4px$ , y de esta forma establece el valor del parámetro  $p=1$ , y define el vértice como  $V(0,0)$  es decir, una ecuación de una parábola con vértice en el origen, con eje de simetría en  $x$ , también el foco como  $(-1,0)$ , y la ecuación de la directriz como  $x=1$ . Lo cual es correcto. Lo que se aprecia es que aplica el concepto de lugar geométrico, haciendo un reconocimiento de la ecuación canónica con vértice en el origen y eje focal en  $x$ .

En el mismo sentido en la aplicación de las situaciones didácticas, se presenta la tarea:

Los siguientes datos de la tabla muestran el comportamiento al lado derecho de una función, cuando  $x$  es mayor que cero

$x$	0	1	2	3	4	5
$y$	1	$3/2$	3	$11/2$	9	

- Representar gráficamente estos valores
- Utilizando simetrías con el eje  $y$ , construir la parte izquierda de la gráfica, es decir, cuando  $x$  es menor que cero.
- Determinar si esta construcción geométrica corresponde a una ecuación de segundo grado (considerar los conceptos estudiados como lugar geométrico).
- Verificar si la gráfica se trata de una parábola y en caso positivo determinar su foco, vértice, directriz, lado recto y ecuación que la representa. ¿Explique?

$\Rightarrow$  c) las curvas A, B, C, D, E corresponden a una parábola.  
 d) ecuación:  $-32x^2 - 36y = -20$ ; la ecuación es de la forma  $(y-k)^2 = 4p(x-h)$   
 $32x^2 - 36y + 20 = 0$

$A = V = (0, 5)$      $B = (1, 3/2)$      $(1-0)^2 = 4p(3/2-5)$   
 $(h, k)$      $(x, y)$

$1 = 4p(-7/2)$   
 $1 = -2p$   
 $\boxed{2/2 = -p}$

$4p = 4p$   
 $\frac{4p}{4} = \frac{4p}{4}$   
 $\boxed{p = -2}$

$F(4, 2+p)$     Directriz:  $y = k - p$   
 $F(0, 2 + 2/2)$      $y = 5 - 2/2$   
 $F(0, 3/2)$      $y = 3/2$

La ecuación sería  $(y-5)^2 = 4(-2)(x-0)$   
 $y^2 = 2(x-5)$

#### Resolución algebraica de la tarea del cuestionario

El estudiante reconoce las características que definen la parábola, identifica las ecuaciones de segundo grado y hace transformaciones algebraicas; las bondades que permite el recurso informático en este tipo de trabajo se evidencian y facilitan la construcción de elementos geométricos, además permiten validar principios y propiedades geométricas que sobre el papel sería muy complicado por la falta de precisión en los resultados.

#### 5. Conclusiones

La aplicación de una ingeniería didáctica en el marco de las situaciones didácticas, permite a los investigadores hacer un análisis conjunto de los instrumentos utilizados desde las dimensiones epistemológicas y cognitiva del objeto matemático en estudio. La utilización de secuencias de enseñanza mediadas por algunos entornos informáticos le permite al investigador hacer una planeación de la clase y validar cada una de las secuencias, con el propósito de crear los ambientes de aprendizaje necesarios para que los sujetos se apropien de forma consciente, real y progresiva del concepto de parábola en el pensamiento matemático avanzado característicos de la enseñanza universitaria.

En relación a la comprensión/construcción del concepto de parábola, según estudios realizados y lo cual se evidencia en la fase a-didáctica de esta investigación, el estudiante muestra concepciones equivocadas y errores que son frecuentes en la solución de tareas, sobre todo la falta de conocimiento en la construcción del lugar geométrico y el desconocimiento de algunas características y propiedades de la cónica. En la fase didáctica, las secuencias didácticas permiten el reconocimiento y estudio de nociones básicas que implican ecuaciones de segundo grado, el concepto de función, de distancia y simetrías, y de esta forma establecer patrones en los elementos de la parábola, en la construcción de las ecuaciones canónicas de la parábola, realizar transformaciones de ecuaciones en el mismo sistema de representación y lograr la coordinación entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico, donde intervienen procesos de inferencia, generalización, síntesis, definición, que son la base de la construcción del concepto matemático.

### Referencias

- Aldana, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la Teoría "APOE"*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca, España.
- Artigue, M., y Douaby, R. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamericano. Bogotá.
- Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal.*, Montréal.
- Casanova, G. (2009). *!Cónicas,. Por siempre cónicas!* Dirección general de cultura y Educación. San Miguel Buenos Aires. Pag 5-63.
- Chevallard (1998). *La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique Group Editor.
- Gómez, P. y Carulla, C. (2000). *Enseñanza sobre la Función Cuadrática*. Universidad de los Andes. Colombia.
- Just, A., y Carpenter, P. (1985). *Cognitive coordinate systems: Accounts of mental rotation and individual differences in spatial ability*. Psychological Review. Vol. 92. 137-172.