

SIGNIFICADO DADO A LOS FENÓMENOS ALEATORIOS EN EL CONTEXTO DE LA ENSEÑANZA MEDIA URUGUAYA

Luciana Olesker

luciano05@gmail.com

Liceo 58 – UTU La Blanqueada, Uruguay

Tema: I.5 - Pensamiento relacionado con la Probabilidad.

Modalidad: Conferencia regular

Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)

Palabras clave: Aleatoriedad, Probabilidad, Enseñanza

Resumen

Se presenta un avance de investigación acerca del significado que los estudiantes de Enseñanza Secundaria asignan a los fenómenos aleatorios, y cómo manejan éstos las ideas vinculadas a la probabilidad frecuencial. Existen ciertos conceptos vinculados al azar y a la probabilidad que son bastante contraintuitivos, por lo que muchas veces los significados que los estudiantes atribuyen a ellos no son matemáticamente correctos. Ello pudiera ser un obstáculo a la hora del aprendizaje de la probabilidad. Se elaboró un cuestionario y se aplicó en grupos de tercer y sexto año de Enseñanza Media en Montevideo. De esta manera determinaremos el Significado Personal que los estudiantes dan al azar y a sus características. Es también intención de este trabajo acercarse al significado de probabilidad vigente en la institución escolar del Uruguay y cuál es el tratamiento didáctico dado al tema. Esto se realizará a través del análisis de los currículos vigentes, libros de texto y trabajos elaborados por docentes de la enseñanza media del Uruguay.

1. Contextualización del Problema de estudio

1.1. La enseñanza de la probabilidad

La teoría de la Probabilidad es, en la actualidad, una de las ramas más fecundas de las Matemáticas. Actualmente, existe una gran cantidad de información estadística y una gran difusión de la misma a través de los medios de información y telecomunicaciones. Este hecho y la importancia de estas informaciones para la toma de decisiones en nuestra comunidad, hace que como docentes nos planteemos el desafío de dar a nuestros estudiantes una formación sobre los fenómenos estocásticos. Creemos que un razonamiento aleatorio correcto y una comprensión adecuada de la probabilidad son tan necesarios para la formación integral del individuo, como lo son la capacidad aritmética y algebraica. Desde muchos ámbitos se recomienda la iniciación temprana al estudio de la probabilidad en su acepción frecuencial. De acuerdo a los estándares del NCTM, los estudiantes deben explorar mediante situaciones y de forma activa los modelos de probabilidad, pudiendo así desarrollar una correcta intuición estocástica. Esta recomendación está presente en la mayoría de los nuevos currículos del Uruguay, tanto

para la enseñanza primaria, secundaria y técnica. La enseñanza de la probabilidad tradicionalmente ha estado ligada al aprendizaje de algoritmos matemáticos. Los nuevos currículos sugieren que los estudiantes se acerquen a la probabilidad desde edades muy tempranas, a través de la experimentación de experiencias estocásticas sencillas vinculadas a contextos familiares, como por ejemplo el juego de monedas, dados, etc. Esta tendencia de renovar la enseñanza de la probabilidad, volviéndola más experimental, nos lleva entonces a interesarnos en reflexionar sobre su naturaleza y los componentes de su comprensión. Este enfoque de la enseñanza pudiera no ser tan simple como parece. Existen diversas investigaciones que muestran que se pueden presentar diversos obstáculos que pueden llevar a una interpretación incorrecta de enunciados de probabilidad en su acepción frecuencial. Por ello, son fundamentales las investigaciones didácticas para analizar cuáles pueden ser los obstáculos a los que nos podremos enfrentar.

1.2. Estado actual de conocimiento sobre el tema y problemática a abordar

Realizaremos en este apartado una síntesis de las investigaciones sobre el tema que nos permitan enmarcar nuestra problemática de estudio. La ocurrencia de errores en el pensamiento y las conductas que desestiman la lógica de la probabilidad han sido estudiadas por diversos autores. Por ejemplo, Kahneman, Slovic y Tversky (1982) han llamado la atención sobre el débil razonamiento estocástico en sujetos adultos y han señalado la utilización de heurísticas¹. Entre las heurísticas definidas por dichos autores, presentan la llamada *heurística de la representatividad*, la cual se produce cuando se evalúa la probabilidad de un suceso en base a la representatividad del mismo respecto a la población de la cual proviene. Este tipo de razonamiento prescinde del tamaño de la muestra, otorga a un número limitado de ensayos la capacidad de reproducir todas las características de la población, esto puede llevar a razonamientos probabilísticos limitados. En los trabajos de Lecoutre (1985, 1992) se describe la *creencia de la equiprobabilidad* de todos los sucesos asociados a una experiencia aleatoria, incluso en aquellos en que no es aplicable el principio de inferencia. Konold (1987, 1991) se interesó en cómo los sujetos realizan juicios de probabilidad, cómo interpretan las preguntas de probabilidad. Llegó a la conclusión que, en general, los sujetos interpretan

¹ Basándonos en lo trabajado por Kahneman y Tversky (1982) denominamos heurísticas a ciertas estrategias inconscientes que suprimen parte de la información del problema, reduciendo así la complejidad del problema y haciéndolo accesible al resolutor.

las preguntas sobre probabilidad de forma no probabilística. Para muchos sujetos el objetivo de una pregunta de probabilidad es predecir si un determinado evento sucederá o no en el siguiente experimento. Godino et. al. (1987), se ha preguntado desde el ámbito educativo cómo minimizar y controlar la presencia de estos sesgos en los razonamientos probabilísticos. Serrano, et. al. (1996) ha detectado la presencia de las heurísticas mencionadas anteriormente en los estudiantes de educación secundaria en España. Muchas veces el lenguaje utilizado, el contexto en el que se enmarcan los problemas y el tratamiento del tema en los libros de texto, afirma las estrategias erróneas y no eliminan los sesgos en los razonamientos anteriormente mencionados (Serradó, Cardeñoso y Azcárate, 2005).

2. Marco teórico didáctico adoptado

El concepto de *significado* es de enorme importancia para la didáctica de la matemática. Muchas investigaciones didácticas centran sus objetivos en cuál es el significado que le atribuyen los estudiantes a determinados símbolos o conceptos matemáticos. Sin embargo, el tema de qué es el significado es controversial desde el punto de vista filosófico, existen diversas teorías del significado. Es por ello que debemos enmarcar qué entenderemos por significado a lo largo de este trabajo desde un marco teórico. En este aspecto, el principal marco teórico de nuestro estudio será *la teoría de los significados sistémicos* desarrollada por Godino y Batanero (1994, 2003). Con respecto al *significado* adoptan una posición pragmática, o sea que el significado de un objeto matemático es mucho más que su mera definición matemática, está relacionado al contexto donde se utiliza, su significado está estrechamente relacionado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución. Siguiendo a los autores, ningún problema matemático está aislado, para poder resolverlos es necesario buscar dentro de un *campo de problemas*. A partir de las ideas de problema y campo de problema, los autores definen los conceptos teóricos de *práctica*, *objeto* y *significado*. Una *práctica* es *significativa* si para la persona constituye una herramienta para poder resolver un problema, o bien para comunicar, validar o generalizar una solución. Dentro de las prácticas involucradas en un campo de problemas los autores citados distinguen entre *prácticas personales* y *prácticas institucionales*. Este enfoque nos resulta muy interesante para nuestra investigación, porque nos permitirá analizar bajo un mismo marco teórico, la presencia en los estudiantes de ciertas prácticas que la institución matemática considera como correctas, así como las que considera incorrectas. A partir

de los conceptos expuestos anteriormente, se distinguen dos tipos de significados: el *significado institucional de los objetos matemáticos* y el *significado personal de estos objetos*. Distinguiremos para los objetos y prácticas matemáticas estudiadas, diferentes elementos de significado presentes en ellos. Los *extensivos*, éstos son los diferentes problemas presentes, siempre enmarcados dentro de un campo de problemas que definiremos previamente. Los *actuativos*, que corresponden a las formas de actuar ante las situaciones problemas: operaciones, algoritmos, procedimientos, técnicas, etc. Los *ostensivos*, que corresponden a las diferentes representaciones utilizadas en la actividad: notaciones, símbolos, gráficos, etc. Los *intensivos* que son las definiciones y conceptos presentes (intensivos nominales) y las proposiciones, propiedades, generalizaciones (intensivos proposicionales). Finalmente, los *validativos*, argumentaciones o justificaciones usadas para validar las respuestas y formas de actuar en cada problema.

3. Fases de la investigación

Sintetizamos a continuación las fases de nuestra investigación. En la primera fase de la investigación se realiza una revisión del currículo vigente en el Uruguay y los libros de texto más utilizados en nuestro país. Nos centramos en el análisis del abordaje que hacen sobre las nociones de azar, fenómenos aleatorios y conceptos básicos de probabilidad. También analizaremos en qué contextos aparecen las actividades vinculadas con probabilidad. Analizaremos qué elementos de significado están presentes y qué preponderancia tienen. Realizaremos este análisis en concordancia con el marco teórico didáctico que hemos adoptado, éste es Godino y Batanero (1994, 1998, 2003). Por lo tanto, distinguiremos dentro del significado presente los elementos extensivos, actuativos, ostensivos, intensivos y validativos. De esta forma, pretendemos establecer cuál es el *significado institucional* vigente en la Escuela Media y Bachillerato de Uruguay. En segundo lugar, analizaremos a priori el cuestionario que aplicaremos a dos grupos de estudiantes. Así caracterizaremos los elementos del *Significado Institucional de Referencia* que se prevén estén presentes en las consignas presentadas en un cuestionario construido para evaluar los *Significados Personales* de los estudiantes participantes del estudio. En tercer lugar aplicaremos un cuestionario con preguntas abiertas o semiabiertas, a estudiantes. Hemos elegido dos grupos de estudiantes, el primero conformado por estudiantes que están culminando el primer ciclo de enseñanza media, el segundo grupo será conformado por estudiantes que estén culminando el bachillerato. El objetivo es explorar los *significados personales* que

atribuyen a los fenómenos aleatorios y a los problemas de probabilidad frecuencial. Luego realizaremos un análisis de las respuestas al cuestionario y estudio de las relaciones observadas entre el significado institucional y personal. Finalmente, como cierre de nuestra tesis pretendemos elaborar algunas actividades tendientes a romper con los obstáculos encontrados que propicien la comprensión de los conceptos de aleatoriedad y de probabilidad frecuencial.

4. Determinación del Significado Institucional de Referencia.

Nos proponemos, a través del análisis de libros de texto elaborados para la enseñanza media, analizar el significado institucional de la aleatoriedad y el concepto de probabilidad, en el contexto del sistema educativo uruguayo. Buscaremos identificar los elementos de significado más característicos, tanto extensivos como intensivos, actuativos, validativos y ostensivos. Hemos determinado un significado institucional de referencia para Ciclo Básico y otro para Bachillerato. Por razones de extensión hemos optado, por incluir el análisis realizado con textos de Ciclo Básico.

Para realizar el análisis hemos seleccionado tres libros de texto destinado a estudiantes que tienen características similares a los que conforman nuestro primer grupo de estudio: alumnos de tercer año de enseñanza secundaria. Este fue el primer criterio para seleccionar estos textos. El segundo criterio adoptado se basa en el hecho de que los autores de los libros sean uruguayos. Los libros y páginas analizados son los siguientes:

- 1) Belcredi, L. y Zambra, M. (2000) *Matemática 3 Gauss*. Montevideo: La Flor del Itapebí. (pp. 85 – 99).
- 2) Borbonet, M., Burgos, Martinez, A. y Ravaioli, N. (2000) *Matemática 3*. Montevideo: Fin de Siglo (pp. 161 – 170).
- 3) Ochoviet, C. y Olave, M. (2009) *Matemática 3*. Montevideo: Santillana (pp.137 – 159).

El primer texto seleccionado, cuenta con la característica que es el que se encuentra en gran número en los liceos, ya que fue elaborado para distribuir gratuitamente a los estudiantes. Ello le dio una masividad que otros libros no tienen, pero sin embargo, fue muy resistido por el colectivo docente, los cuales en su mayoría continuaron utilizando otros libros para planificar sus clases. El segundo libro seleccionado, tiene la característica de ser muy usado por los docentes para planificar sus clases. Las autoras cuentan con prestigio como docentes, y por otro lado, el enfoque de este libro recoge las tendencias de enseñanza que han tenido más aceptación en nuestro sistema educativo.

Finalmente, hemos seleccionado el tercer libro, por el prestigio y experiencia docente de las autoras, y por incluir un enfoque más actual sobre el tema.

Hemos determinado en nuestro análisis de los libros seis tipos distintos de campos de problemas. Los problemas que aparecen en los libros se enmarcan en alguno de estos tipos. Estos son:

- *Tipo 1: se presenta la probabilidad como grado de creencia*
- *Tipo 2: se reflexiona sobre el azar y las características de los fenómenos aleatorios.*
- *Tipo 3: se busca problematizar la equiprobabilidad o no de ciertos sucesos*
- *Tipo 4: se aplica la regla de Laplace para calcular la probabilidad*
- *Tipo 5: se asignan probabilidades en un contexto geométrico*
- *Tipo 6: vinculados a la Probabilidad Frecuencial*

A continuación realizaremos una tabla que indica la frecuencia de uso de cada uno de los campos de problemas que hemos detectado en cada uno de los textos analizados.

CAMPO de PROBLEMAS N°	Frecuencia de aparición en <i>Belcredi y Zambra 2000</i>	Frecuencia de aparición en <i>Borbonet y otros, 2000</i>	Frecuencia de aparición en <i>Ochoviet. y Olave, 2009</i>
1	2	0	4
2	1	1	3
3	2	0	4
4	6	11	10
5	0	0	2
6	2	1	6

En todos los casos, la mayoría de los planteos pertenecen al campo de problemas en los que se aplica la regla de Laplace para calcular la probabilidad. Incluso en los dos primeros libros analizados, los demás campos de problemas o bien no están presentes o lo están con una frecuencia muy pequeña. Se presentan estos otros campos de problemas con el objetivo de ejemplificar y no para que los estudiantes trabajen en profundidad sobre ellos. En el tercer libro de texto analizado esta cuestión cambia un poco, ya que si bien, al igual que los anteriores, la mayor preponderancia se le da a los problemas vinculados a la definición de Laplace, aparecen también actividades vinculadas a los demás campos de problemas y en algunos casos hasta en una buena cantidad. El campo de problemas menos explorado es el de los problemas de probabilidad en contextos geométricos. En los dos primeros libros de texto no aparece ningún problema en este campo y en el tercero únicamente dos actividades. Con respecto a los problemas del tipo 6, vinculados a la probabilidad frecuencial, si bien

están presente en los tres textos, es únicamente en Ochoviet y Olave, (2009), que tiene una frecuencia que hace pensar que son más que un mero ejemplo.

Con el objetivo de resolver los problemas planteados se presentan en los textos una serie de prácticas. Éstas, además de ser un medio para resolver los problemas, pasan a ser objeto de enseñanza. Vinculado a los demás elementos de significado, un *elemento actuativo* fundamental es realizar la razón entre los casos favorables y posibles. Surge de nuestro análisis, como otro elemento actuativo de importancia destacada la utilización de técnicas de conteo. Finalmente, en algunos casos, para la resolución de diversos problemas se realiza (o simula) una experiencia aleatoria. Este es el elemento actuativo que menor preponderancia tiene en los textos analizados. Tendremos en cuenta esto en nuestro análisis posterior. En el presente análisis hemos detectado diversos tipos de *representaciones* utilizadas en los libros de texto. Estas representaciones han sido de distintos tipos: representaciones simbólicas, representaciones numéricas, representación gráfica, asociados al concepto de probabilidad aparecen representaciones gráficas. Nuestro estudio ha mostrado una variedad de definiciones y formas de presentar la probabilidad. Las definiciones de probabilidad que se presentan en estos libros de texto son la clásica, la frecuencial y la geométrica. Estas definiciones se presentan de forma explícita o implícita según los casos. La definición clásica de probabilidad aparece en todos los casos dada explícitamente, mientras que la definición frecuencial sólo aparece explícitamente en uno de los textos. Finalmente la definición geométrica únicamente aparece de forma implícita. No aparecen en los libros, demostraciones deductivas formales. En todos los casos se utilizan demostraciones informales, que se apoyan en la experimentación, representación gráfica y comprobación de casos, para pasar luego a generalizar.

5. Estado actual de la investigación

Hemos determinado un significado dado en la enseñanza media uruguaya a los fenómenos aleatorios, la probabilidad y otros conceptos asociados (*significado institucional de referencia*), a partir del análisis de los libros de texto. En base a este significado realizamos un análisis a priori del cuestionario que aplicaríamos a los estudiantes con el fin de crear categorías para analizar las respuestas. Este análisis acorde con el marco teórico adoptado en nuestro trabajo (Godino, 2003), por lo cual buscaremos identificar los elementos de significado más característicos, tanto extensivos como intensivos, actuativos, validativos y ostensivos. De esta manera, se

podrán establecer concordancias y diferencias entre el significado institucional previsto y el significado personal declarado. Podremos así describir las relaciones que se establecen entre los distintos elementos de significado puestos en juego por los estudiantes. Es en esta fase de la investigación que nos encontramos. Además podremos describir los obstáculos detectados en el proceso de enseñanza y aprendizaje sobre los conceptos de aleatoriedad y probabilidad frecuencial. Esta última descripción permitirá tomar decisiones para la elaboración de herramientas didácticas para la enseñanza de estos conceptos, siendo este el último objetivo de nuestra investigación.

Referencias bibliográficas

- Batanero C. (2005). Significados de la probabilidad en educación secundaria. *Relime*, 8(3), 247-263.
- Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Uno*, 5, 15-28.
- Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz de Haro, J. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de Bachillerato. *Suma*, 22, 43 – 50
- Garfield, J., delMas R. (1990) Student`Conceptions of probability. Disponible en: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/18/BOOK1/A9-8.pdf>
- Godino, J. D.; Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1998). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid, Síntesis.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches Didactique des Mathématiques*, 14(3): 325 – 355.
- Gutiérrez Cabria, S. (1992) *Filosofía de la Probabilidad*. Valencia: Tirant lo Blanch.
- Hacking, I. (1975/2005). *El surgimiento de la probabilidad* (1ª reimpresión). Barcelona: Gedisa.
- Kahneman, D.; Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*, Nueva York, Cambridge University Press.
- Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.
- Serrano, L. (1996). Significados personales e institucionales de los objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Tesis de doctorado. Universidad de Granada.