

## Pensamiento matemático avanzado

---

### *ECUACIONES EN DIFERENCIAS: PROPUESTA PARA EL MEJORAMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS*

*Gustavo Adolfo Juárez<sup>1</sup>, Silvia Inés Navarro<sup>1</sup>, Silvia Vanessa Romero<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca. <sup>2</sup>Escuela Provincial Secundaria N° 76. Argentina  
juarez.catamarca@gmail.com, silvinafacen@gmail.com

#### Resumen

A partir de la implementación de la asignatura Matemática Aplicada en las Carreras Profesorado y Licenciatura en Matemática, en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Universidad Nacional de Catamarca, y posteriormente de la asignatura Modelos Matemáticos en el Profesorado en Matemática, con los contenidos mínimos Ecuaciones en Diferencias y Estabilidad Discreta, se realizó el presente análisis de los años de dictado de las mismas, en donde se observa la vinculación del contenido variacional discreto y continuo dado entre las ecuaciones en diferencias y diferenciales, sus aportes y ventajas.

#### Introducción

El plan de estudios de las carreras Profesorado y Licenciatura en Matemática del año 1997, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Catamarca, siguiendo recomendaciones realizadas para esa época a nivel nacional, incorpora contenidos mínimos, que en algunos casos no estaban presentes en planes anteriores, y que pasarían a formar la asignatura Matemática Aplicada. Posteriormente esta asignatura quedó exclusivamente en la Licenciatura, creándose en el profesorado la Asignatura Modelos Matemáticos. En este trabajo nos referiremos a las ecuaciones en diferencias y estabilidad discreta, como contenidos mínimos, los cuales nos llevarán a la propuesta final luego del análisis efectuado con el dictado de la citada asignatura, y sus modificaciones desde entonces a la fecha.

#### Marco referencial

##### Matemática aplicada y modelos matemáticos

La carrera Profesorado en Matemática del plan 1997 tenía el alcance de formación para docentes del tercer ciclo del EGB y Polimodal, tal la denominación completa y con ello una leve diferencia con la asignatura de igual nombre, así para la Licenciatura en Matemática, estaba el contenido *estabilidad discreta y continua*.

El Profesorado en Matemática para el tercer ciclo de EGB y polimodal duró dos años y se amplió el alcance a un profesorado de nivel superior, y con lo cual se igualó los contenidos de estas asignaturas que resultaban iguales en un cien por ciento. En el año 2005, una nueva modificación de planes de estudio deja la asignatura Matemática Aplicada solo para

## ***Pensamiento matemático avanzado***

---

Licenciatura y se crea para el Profesorado en Matemática la asignatura Modelos Matemáticos, con una carga horaria menor y con contenidos mínimos reducida en comparación a Matemática Aplicada, teniéndose en cuenta que los Modelos Matemáticos como temática es otro de los contenidos de la asignatura Matemática Aplicada desde 1997.

En el afán de presentar clasificaciones de modelos matemáticos, se hace necesario distinguir entre otros a los *modelos determinísticos*, *dinámicos* y entre ellos además a los *continuos* y *discretos*, con lo cual queda abierta la posibilidad de continuar con la enseñanza de las *ecuaciones en diferencias*.

Correlativa a estas asignaturas, se halla el contenido Ecuaciones Diferenciales, que se impartía en Análisis Matemático II hasta 1999, y luego se implementa en el Profesorado la asignatura Ecuaciones Diferenciales, siendo estas las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), que como asignatura ya existía en Licenciatura (ED I), donde además están también las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) como otra asignatura (ED II).

La asignatura Matemática Aplicada fue impartida como una asignatura integradora de conocimientos, en el cuarto curso, segundo cuatrimestre. Por lo que, en el Profesorado se convirtió en la mayoría de las veces en la asignatura última en rendirse, llevando esto a un análisis erróneo si se efectúa una lectura incompleta de los datos de la evolución en los resultados de los alumnos. En efecto, pues los alumnos que regularizaban la asignatura Matemática Aplicada demoraban entre dieciocho a veinticuatro meses para aprobarla. Parece dramático, pero demos más información.

Para cursar Matemática Aplicada el alumno debe contar con la regularidad de Análisis Matemático II hasta 1997 y de Ecuaciones Diferenciales desde 1999. Inmediatamente cursan Matemática Aplicada, la cual suele tener una regularidad dada entre el 90% y 100%, quedando libre solo aquel alumno que por razones naturales abandona su concurrencia y se convierte al año siguiente en recursante, siendo estos motivos de salud, trabajo, o traslado. De los alumnos que regularizan, la mayoría no cuenta con las asignaturas Análisis Matemático II y Ecuaciones Diferenciales, aprobadas. Lograr su aprobación produce una demora, de manera que en el alumno luego de un año de regularizar Matemática Aplicada se aboca a preparar su examen final, implicando una nueva demora al reencontrarse con la asignatura luego de ese año como mínimo.

Un record poco conocido es que ningún alumno desaprobó un examen final de Matemática Aplicada, más aun, las notas fueron en su mayoría entre muy bueno y sobresaliente, es decir, 8,9 o 10. Esto por el simple hecho que significaba en la mayoría de los casos el examen último con el cual se recibían de profesor y el entusiasmo entremezclado con la responsabilidad redundaba en un excelente examen, tanto por el dominio de los contenidos como por la exposición.

Considerando que la asignatura actual del profesorado en Matemática que contiene Ecuaciones en Diferencias es Modelos Matemáticos, realizamos un análisis desde 2008 hasta 2014, destacando la cantidad de alumnos que se inscriben, la cantidad de aprobados al

iniciar el dictado y la cantidad de los que aprueba durante su dictado la asignatura ecuaciones diferenciales.

Esto nos muestra que no aprobaron por lo general la asignatura ecuaciones diferenciales antes de llegar a iniciar el cursado ni durante el mismo. El primer dato se debe a alguien que debió cambiar el plan por lo que no se observa esa dificultad. Rendir durante el cuatrimestre es posible pues hay mesas de examen todos los meses, pero solo lo hacen aquellos que estudiaron para julio/agosto y no culminaron el estudio.

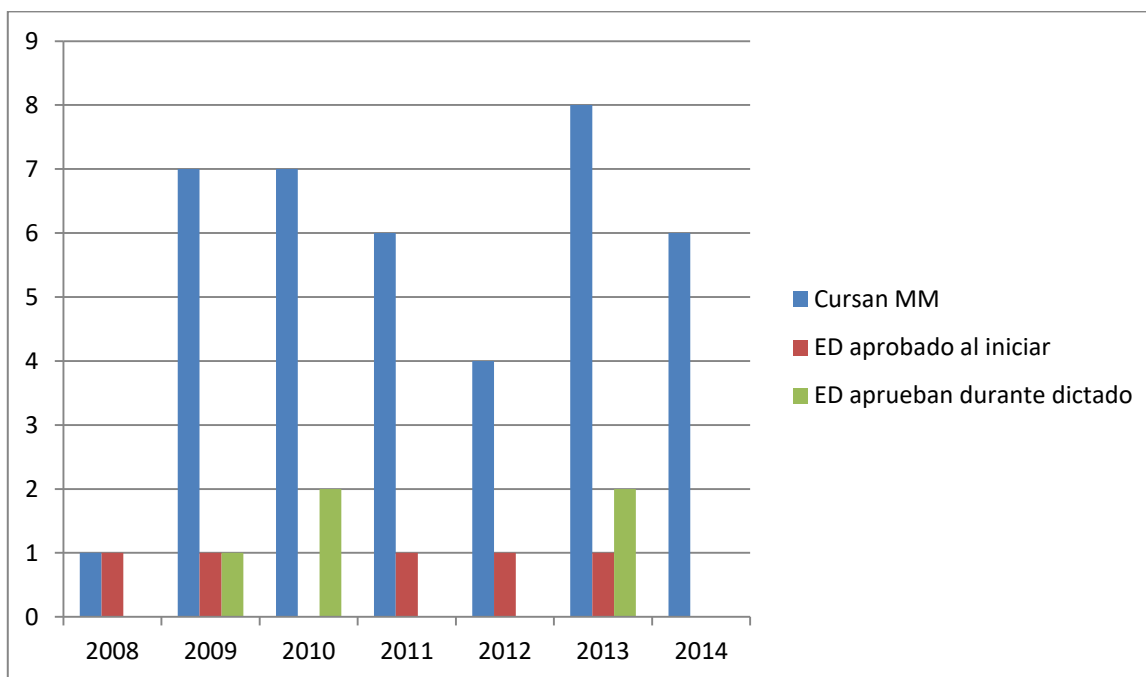


Tabla 1. Situación de la Asignatura Modelos Matemáticos desde su implementación respecto a la aprobación de la Asignatura correlativa Ecuaciones Diferenciales

Durante la presentación de las EED se usa los mismos conceptos de la clasificación de las ecuaciones diferenciales, lineales, no lineales, homogéneas, con coeficientes constantes, y ya al hablar de soluciones se tiene la solución general, particular, y valores iniciales. Es frecuente que estas primeras horas de clases, talvez ocho horas, durante tres días, poca relación despierta en el alumnado en cuanto a una comparación entre estas EED y las EDO, correspondiente a una asignatura, recientemente regularizada.

Por otro lado, se analizó la diferencia de tiempo entre aprobar las asignaturas Ecuaciones Diferenciales y Modelos Matemáticos, para ello se observó que ha disminuido de ocho meses en el año 2009 a menos de un mes en los años 2013 y 2014.

### **Ecuaciones diferenciales (edo) y ecuaciones en diferencias (eed)**

El recurso didáctico e histórico de la enseñanza de los sistemas de numeración desde los naturales, enteros, racionales, reales hasta los complejos, implica ir de lo discreto a lo

continuo, la idea aquí es trasladar como propuesta enseñar las ecuaciones variacionales desde las ecuaciones en diferencias y luego las ecuaciones diferenciales.

Ahora bien, ¿qué son las ecuaciones en diferencias?, pues debemos considerar que las ecuaciones diferenciales están presentes en todo plan de estudio de un Profesorado en Matemática.

Para responder a esto podemos usar una simple definición: *Sea una sucesión de números reales en donde existen términos consecutivos que puedan relacionarse en una igualdad, diremos que tenemos una ecuación en diferencias.* Esto es por ejemplo:  $x_{n+1} = 2x_n$

Aquí la ecuación en diferencias es de primer orden, lineal, de coeficiente constante, homogéneo. En tal clasificación se incluyen términos que pertenecen a las ecuaciones diferenciales. Para resolver la ecuación en diferencias requerimos reconocer la incógnita, la cual es la sucesión de la que conocemos el comportamiento de algunos términos de la misma según la ecuación. Al resolver se va a aplicar el método de coeficientes indeterminados, por lo tanto el desarrollo de las ecuaciones en diferencias recorre un camino paralelo a las ecuaciones diferenciales. La importancia más grande está en que mientras las ecuaciones diferenciales requieren de un curso de análisis matemático en una variable, o sea de cálculo diferencial, en las ecuaciones en diferencias solo teniendo las operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y potenciación podemos resolver las mismas.

Por lo tanto la ventaja está en que si presentamos un problema de aplicación de las ecuaciones en diferencias, ingresamos al cálculo variacional. Con tal teoría discreta de las variaciones, las ecuaciones en diferencias nos lleva a la implementación de un lenguaje, cálculo y problemática, que puede permite interpretar el cambio o tamaño de paso de un término de la sucesión al siguiente, pudiendo ser tan próximo como se desee. Con un tamaño de paso suficientemente pequeño la idea de continuidad nos lleva a las ecuaciones diferenciales.

Una observación inmediata nos permite reconocer que las progresiones aritméticas y geométricas son ecuaciones en diferencias y forman parte de los contenidos de la escuela media desde hace varias décadas. Es por ello, que solo pretendemos ampliar este conocimiento, aplicarlo a problemas de diversas áreas disciplinares, desde la matemática financiera, economía, ecología, dinámica poblacional, física, entre otras.

Trataremos de dar un ejemplo de uso de las ecuaciones diferenciales y en diferencias, como quien las presentamos a las mismas.

Ejemplo Ilustrativo: Supongamos una población que crece de una manera constante en 50 personas anualmente durante diez años. ¿Cuál será su tamaño final si inicialmente tiene 2500 habitantes? Modele el problema en forma continua y discreta. Finalmente resuelva.

Solución: Sea la población  $P$  que tiene un tamaño  $P_t$  en el tiempo  $t$ . Crece a una tasa anual constante  $r$ .

El modelo continuo supone a  $P_t$  continua en el tiempo de manera que siendo diferenciable, se verifica que  $\frac{dP_t}{dt} = r$ .

Por otro lado, el modelo discreto plantea que siendo  $P_t$  una sucesión para  $t$  entero debemos hallar una expresión que represente el cambio en dos momentos consecutivos. Así, para los momentos consecutivos  $t$  y  $t+1$ , se verifica que la diferencia es la constante  $r$ , es decir:  $P_{t+1} - P_t = r$ .

Pudimos determinar el modelo continuo mediante una ecuación diferencial, que para resolver debemos partir de los conocimientos del cálculo diferencial. Esto nos lleva a decir que

$$\frac{dP_t}{dt} = 50$$

Resolviendo por partes la ecuación diferencial nos da  $P_t = P_0 + 50(t - t_0)$ , y en el caso de ser  $t_0$  nulo, resulta  $P_t = P_0 + 50t$

Para el caso discreto el modelo está dado por la ecuación en diferencias

$$P_{t+1} - P_t = 50$$

Para resolver podemos usar la expresión

$$P_t = P_0 + 50t$$

Que surge de reconstruir la sucesión a partir de  $P_0$ , y sabiendo que  $P_{t+1} = P_t + r$ .

Esto es:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + 0.05 \\ P_2 &= P_1 + 50 = P_0 + 50 \times 2 \end{aligned}$$

Y así se llega a

$$P_t = P_0 + 50 t$$

En ambos casos se tiene que  $P_{10} = 3000$ , es la población a los diez años.

### **Sugerencias de implementación**

Una primera posibilidad es la de incorporar las ecuaciones en diferencias en el Álgebra Lineal. Para ello a partir de las matrices, se considera las matrices cuadradas, con ellas las potencias de matrices, los polinomios de matrices, la ecuación matricial, sucesión de

matrices, ecuación en diferencias matriciales. Siendo estos últimos en matrices de orden 2,3 o 4, se puede inducir las de orden uno, el homomorfismo a los escalares y con ello las ecuaciones en diferencias. Como aplicación podemos presentar problemas de poblaciones, y volver a matrices con poblaciones compuestas por clases. Por ejemplo de una población que varía a lo largo de un cierto tiempo, por una EED, o poblaciones distribuidas en grandes grupos de edades, rural o urbana, entre otras, y considerar SEED.

Una segunda propuesta está en configurar una asignatura de poca carga horaria que contenga teoría de ecuaciones algebraicas, donde pueda desarrollarse ecuaciones bicuadradas, cúbicas y cuárticas con métodos de Cardano y Ferrari; Ecuaciones Diofanticas; Desigualdades e inecuaciones; Inducción Completa; Ecuaciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas; Análisis Combinatorio. En ella también se ubicaría a las Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones en Diferencias.

### **Discusion y analisis**

Debe mencionarse como un resultado importante, el hecho de que los alumnos que cursaban la asignatura Matemática Aplicada, lograban luego de conocer las ecuaciones en diferencias, interpretar las ecuaciones diferenciales, las cuales correspondían a una asignatura anterior, regularizada, pero no aprobada, viéndose esto reflejado cuando se trabajaba con modelos con ecuaciones diferenciales (EDO) y sistemas de ecuaciones diferenciales (SEDO). La cantidad de alumnos que no tenían aprobado la asignatura ecuaciones diferenciales al momento de ingresar el cursado de la asignatura Modelos Matemáticos del Profesorado en Matemática, ha ido incrementándose al punto que en los últimos años fue del cien por ciento. Y además una vez que termina el dictado de la asignatura Modelos Matemáticos perteneciente a la carrera del Profesorado en Matemática, resulta cada vez más inmediata la aprobación mediante examen final de la asignatura ecuaciones diferenciales, siendo de casi ocho meses en 2009 y actualmente casi en forma inmediata.

Con este trabajo se pretende fortalecer los objetivos planteados en el mejoramiento de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a partir de la implementación de las ecuaciones en diferencias.

### **Referencias bibliográficas**

Fernández Pérez, Carlos; Vázquez Hernandez, Francisco José; Vegas Montaner, José Manuel (2003) *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*. España: International Thompson Ed.

Hall M.A, Knight B.A. (1982) *Algebra Superior*. Madrid: Ed Uthea.

Hernández, E. (1994) *Las Matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid: Addison Wesley.

Johnson D., Mowry, T. (2000) *Matemáticas Finitas. Aplicaciones prácticas*. México: International Thompson Editores.

Juarez, G., Navarro, S. (2005) *Ecuaciones en Diferencias con aplicaciones a modelos en sistemas dinámicos*. Catamarca: Ed Sarquis.

Juarez, G., Navarro, S. (2011) *Las Ecuaciones en Diferencias en los Modelos Matemáticos Discretos*. *Revista Aportes científicos en Phymath*. Vol 1.

Leithold, L. (1989) *Matemáticas Previas al Calculo*. Madrid: Ed Harla.

Spiegel, M. (1991) *Algebra Superior*. Madrid: Mc Graw Hill.