NOCIONES BÁSICAS SOBRE FRACCIÓN QUE MANIFIESTAN FUTUROS PROFESORES DE ENSEÑANZA BÁSICA

***Macarena Valenzuela-Molina*[1], *Elisabeth Ramos-Rodríguez*[2], *Pamela Reyes-Santander*[3], *Palmenia Rodríguez-Rojas*[4]**

[2,3]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [1]Universidad Alberto Hurtado,[4]Universidad de la Serena. Chile

elisabeth.ramos@pucv.cl

Resumen

Nuestro objetivo es mostrar las nociones básicas del concepto fracción que manifiestan futuros profesores de enseñanza básica de una universidad chilena. Sustentados teóricamente en las nociones básicas, empleamos el análisis de contenido para analizar cualitativamente las producciones, evidenciando que los futuros profesores consideran el significado de la fracción como parte todo, empleando representaciones simbólicas, pictóricas y concretas, reflejando un todo continuo y utilizando sólo círculos y rectángulos. Presentan tareas solo en contexto matemáticos y personales. Pretendemos avanzar hacia una formación docente donde tenga sentido los significados, exista una gama de representaciones y se desarrolle la capacidad de modelar.

Agradecimientos: este trabajo ha sido financiado por el proyecto VRIEA-PUCV 37.0/2016 "Nociones Básicas del concepto número en estudiantes chilenos en Formación Inicial Docente de Educación Básica y Media"

Planteamiento del problema

Chile participó en el estudio comparativo denominado "Teacher Education and Development Study: Learning to Teach Mathematics (TEDS-M)", el cual fue implementado en estudiantes de formación inicial docente (FID) para la educación básica el año 2008 (Tatto, 2013). Uno de los objetivos fue determinar la influencia de las instituciones y de las condiciones individuales de la formación de profesor sobre las competencias profesionales sobre los fututos profesores en el área de la matemática. Los resultados de Chile estuvieron 87 puntos bajo la media en el área del conocimiento disciplinar y 75 puntos bajo la media en conocimiento pedagógico En esta oportunidad Chile obtuvo 413 puntos en el área del conocimiento y 425 puntos en el área del conocimiento pedagógico de los futuros profesores. Esto podría indicar que hay una baja influencia de las instituciones chilenas sobre las conocimientos disciplinares y pedagógicos de los estudiantes en FID.

Tatto (2013) muestra que los docentes tienen dificultades en el razonamiento con múltiples pasos y dificultades para relacionar varios conceptos matemáticos, como la comprensión de que existe un número infinito de números racionales entre dos números dados. Por otra parte, los futuros profesores con mejores resultados muestran capacidad para reconocer ejemplos de números racionales e irracionales. En cuanto al conocimiento pedagógico, los que están bajo el promedio no son conscientes de concebir representaciones útiles y concretas para los conceptos numéricos. En relación a lo anterior, nos podemos cuestionar si los docentes en FID poseen las ideas básicas (Vom Hofe, 2014) del concepto de número y qué sucede con su formación inicial, lo que nos lleva a la necesidad de profundizar en las nociones básicas que manifiestan los docentes en formación inicial.

Otro estudio de medición y evaluación del futuro docente, que nos indica la necesidad de profundizar en las nociones básicas es el estudio nacional INICIA, ya que es un indicador de conocimiento disciplinar y pedagógico, enfrentando a los profesores en FID al conocimiento que va a enseñar desde la didáctica y desde la disciplina. Los resultados de la prueba nacional INICIA (MINEDUC, 2015), que se realiza a estudiantes egresados de la formación docente de básica, muestran resultados bajos, con una puntuación mejor en lo pedagógico en comparación al conocimiento disciplinario, no siendo los deseados por la comunidad educativa. Precisando en el área de la matemática en Educación Básica en Chile, se puede decir que ésta presenta escasos niveles de desarrollo de la actividad matemática (Espinoza, Barbé y Gálvez, 2011), más aún, y según los mismos autores, los profesores no hacen mención a los procedimientos no convencionales para el trabajo de la operatoria básica, ellos trabajan directamente con el algoritmo convencional. Esto muestra la necesidad de fortalecer la formación de los futuros docentes de educación básica, ya que su dominio disciplinario es requisito para enseñar a niños y niñas. En particular, parece ser que los profesores en formación carecen de una visión amplia sobre las nociones básicas de los conceptos que deben enseñar de las matemáticas para los niños y jóvenes que tienen a su cargo.

Según lo anterior e interesados en la preparación de los profesores de educación básica, se quiere profundizar desde la formación docente en las nociones básicas sobre un concepto particular y trascendente en la enseñanza de la matemática, como lo es el concepto número.

Según Schipper y Merschmeyer (2014), la enseñanza de la matemática y de la aritmética en educación básica, tiene una estructura en base a la elección y el orden del contenido matemático a tratar, comenzando con la comprensión del número y continuando con la operatoria básica. Esto nos lleva a generar la pregunta (1) ¿los profesores en formación inicial de enseñanza básica carecen de una visión amplia del concepto número? En la misma línea, la FID debe proveer de herramientas pedagógicas y disciplinares a los futuros docentes de manera que muestren solvencia en las nociones básicas de los conceptos matemáticos que van a enseñar. Esto nos lleva a formular las siguientes preguntas: (2) ¿la formación del profesorado, de enseñanza básica, no provoca cambios sustanciales en las nociones básicas del concepto número? y (3) ¿hay diferencias en la FID de las Universidades de tres regiones diferentes del país con respecto a las nociones básicas para el concepto número?

Las preguntas anteriores toman sentido, ya que se insiste en el abordaje de los contenidos en la FID (Thompson, 1992; Törner, Rolka, Rösken y Sriraman, 2010), por considerarlas importantes en los procesos de aprendizaje y enseñanza, como también, para entender el concepto número que presentan estudiantes en FID.

Según lo visto anteriormente existe la necesidad de fortalecer la formación de los futuros docentes de Educación Básica, para esto se hace necesario caracterizar las nociones básicas de los estudiantes sobre algunos conceptos basales de la matemática, luego diagnosticar si el programa de formación docente, cambia estas nociones y en base a lo anterior proponer un metodología que integre las nociones y cambios en ellas.

Las preguntas (1), (2) y (3) señaladas en el apartado anterior, dan origen a esta investigación, de nivel nacional, con estudiantes de universidades chilenas de una universidad chilena, la cual tiene por objetivo estudiar las nociones básicas de los profesores en Formación Inicial Docente en Educación Básica, sobre el concepto número, de forma transversal en la FID. Así, la solución propuesta contempla diagnosticar las nociones básicas arraigadas en FID de Educación Básica, por medio de un cuestionario, esperando responder a las preguntas (1), (2) y (3).

Marco teórico

Para abordar este estudio, nos centraremos en el constructo de nociones básicas que desarrollaremos a continuación.

En la didáctica de la matemática de habla germana, las nociones básicas denotan interpretaciones sustantivas de los objetos matemáticos (definiciones, operaciones, relaciones, otros) y son inseparables, cuando se trata de traducir del mundo real al mundo matemático y viceversa (Bender, 1998; Blum, vom Hofe, Jordan y Kleine, 2004; vom Hofe, 1995; 1998; 2014). Las nociones básicas son un constructo para localizar las habilidades de traducción desde el mundo real al mundo matemático (Prediger, 2009), el tratamiento de este constructo en la enseñanza de la matemática es determinante para producir aprendizaje significativo (vom Hofe, 1995; 1998; Wittmann, 1998), para esta idea se sugiere además revisar en detalle el trabajo realizado por Blum, vom Hofe, Jordan y Kleine (2004), sobre el análisis de las pruebas PISA y el levantamiento posterior de la evaluación de habilidades (competencias) a desarrollar en esta área disciplinar.

Las nociones básicas (vom Hofe, 1998) se sustentan en dos principios: (1) son obligatorias como directrices normativas que provienen de la educación matemática tradicional y (2) el aprendizaje se desarrolla en micro mundos y en experiencias subjetivas combinadas, que provienen del área de la Psicología. Lo primero, tiene relación con la enseñanza de estas como parte de la formación del profesor y lo segundo tiene relación con la forma en que estas deben ser enseñadas.

El concepto de nociones básicas, describe la relación entre el contenido y el fenómeno de formación individual del concepto, se construye en base de ideas o representaciones internas, que permiten una acción operativa de la misma idea o representación mental, a nivel de representaciones matemáticas (vom Hofe, 1995). Vom Hofe, recoge las nociones básicas a través del tiempo y describe tres características principales de estas:

- La constitución de un significado de un concepto matemático mediante la vinculación a experiencias, conocimiento familiar o por recurrir (mentalmente) a representaciones de las acciones realizadas.
- La generación de una representación del concepto, la cual es mental y corresponde matemáticamente al concepto, esto se entiende como una internalización del concepto (siguiendo lo propuesto por Piaget), la cual permite la acción operativa a nivel del pensamiento.
- Capacidad de aplicación de la noción básica de un concepto al mundo real, en el sentido de modelar una situación real por medio de la noción básica, donde es posible reconocer la estructura real correspondiente con la estructura matemática.

Con estas tres características, se puede decir que las nociones básicas describen la relación entre la matemática, el individuo y la realidad (vom Hofe, 1995; 1998). Se pueden distinguir dos tipos de nociones básicas (op. cit., 1998), las primarias y las secundarias, las nociones básicas primarias son figurativamente representables también ejecutables (realizables), entre ellas se encuentran nociones básicas para la suma, la substracción, la multiplicación y la división. Las nociones básicas secundarias no son ejecutables, tienen un carácter simbólico y se basan en operaciones matemáticas con objetos simbólicos tales como términos y gráfico de una función.

Según Schipper y Merschmeyer (2014), hay dos grandes desafíos en el comienzo de la aritmética a nivel escolar, el primero consiste en generar una transición adecuada entre el mundo de la matemática de la calle a la matemática escolar, para esto proponen en la enseñanza, que la clase comience con determinar soluciones a problemas contextuales y se resuelva con procedimientos propios de los niños, es necesario utilizar material concreto para construir las nociones básicas para la suma y la sustracción, continuar con problemas que están libres de contexto y con procedimientos elaborados, por ejemplo utilizando las estrategias de cálculo que se generan a partir de las reglas de monotonía y de invarianza. Estos procedimientos, deben ser desarrollados como conocimiento general dentro de la clase, para luego ser aplicados en nuevos problemas contextualizados. De esta forma, aseguran los investigadores, es posible que las niñas y niños puedan identificar y percibir problemas con la misma estructura y resolver problemas (ejercicios) correctamente y con la misma frecuencia. El segundo desafío, es lograr desarrollar en clases una flexibilidad en el cálculo, dejando en un segundo plano los procedimientos formales, son los niños los que deben decidir cuáles son las estrategias de cálculo, que ellos utilizarán para un determinado problema o ejercicio, para esto es necesario desarrollar en clases diferentes estrategias y esto se logra considerando las nociones básicas dentro del tratamiento de la aritmética escolar.

Dimensión 1: “Constitución del significado”. Considerando la primera característica de las IF, al enseñar el concepto número se tiene una constitución de un significado de número proveniente de la vinculación a experiencias, por ejemplo: cantidad, magnitud.

Dimensión 2: "Generación de Representaciones", a partir de la segunda característica de las IF, al enseñar el concepto números se genera una representación de números, que es mental y que corresponde matemáticamente al concepto, permite levantar desde esta representación las ideas de magnitud, orden, por ejemplo.

Dimensión 3: "Capacidad de modelación", Considerando la tercera característica de las IF, al enseñar el concepto números se considera la aplicación de los números al mundo real, en el sentido de modelar una situación, donde es posible reconocer la estructura de la situación con los números.

Para profundizar en esto, requerimos de las nociones básicas del concepto de número. En Hefendehl-Hebeker y Prediger (2006) se detallan las nociones básicas sobre el concepto número, presentamos (tabla 1), un resumen aportados por los autores.

Tabla 1: Nociones básicas del concepto números

	Números Naturales	**Números Negativos**	**Números racionales**	**Números reales**
	(Cantidad	**Ordinalidad**	**Medida**	**Codificador)**
Noción Básica del número	Cantidad, ordinalidad, de medida y de codificador. Describen en primera línea cantidades concretas y posiciones de lugar y son utilizados frecuentemente para cálculos.	Cantidad, ordinalidad y codificador. Describen en primera línea un orden relativo a un punto central (antes y después de este punto).	Cantidad, medida y codificador. La cantidad es siempre relativa a un todo, partes de un todo. La medida siempre en relación a una comparación, en proporciones relativas.	Cantidad, medida y codificador. Nociones básicas derivadas de construcción de una aproximación arbitrariamente precisa. Es una visión global, de completitud: cierran las brechas en la recta numérica.
Representación	Tienen una representación numérica unívoca en el sistema decimal que está basada en la idea de "paquetes de 10"	Tienen una representación numérica unívoca en el sistema decimal que está basada en la idea de reflejo del punto central.	Tienen una representación que no es unívoca, una fracción puede ser representada por infinitas otras fracciones	Representación de los números irracionales como ininterrumpidos, decimales no periódicos En sistema decimal no tiene una representación

	equivalentes o por un número decimal, o un porcentaje. También se incluye el signo menos.	exacta con finitos símbolos, solo tienen una descripción indirecta.

Marco metodológico

Para lograr el objetivo general propuesto, la aproximación al objeto de estudio se lleva a cabo desde el paradigma cualitativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). El objeto de estudio está conformado por las nociones básicas sobre el aprender y enseñar el concepto número de los estudiantes en FID de enseñanza básica.

Para este estudio de tipo descriptivo interpretativo (Hernández; Fernández y Baptista, 2010), realizamos un análisis de contenido, fijando como unidades referenciales, los conjunto de párrafos que tienen conexión o idea en común (Flick, 2004).

Este estudio considera como sujetos de estudio a 16 estudiantes de último año de la carrera de Educación Básica de la Universidad Alberto Hurtado.

Para recoger la información consideramos las producciones de los estudiantes en el curso, informes en los que debían presentar el desarrollo de las ideas del curso, en concreto son secuencias de clases de una unidad didáctica.

Para la codificación y análisis de datos contamos con el análisis de contenido (Flick, 2004). Las categorías de análisis empleadas para el análisis de contenido de las producciones de los estudiantes, surgen de las nociones básicas. En concreto, analizaremos las categorías:

- Constitución del significado. Considerando la primera característica de las nociones básicas, al enseñar el concepto número se tiene una constitución de un significado de número proveniente de la vinculación a experiencias, por ejemplo: cantidad, magnitud.
- Generación de representaciones. A partir de la segunda característica de las nociones básicas, al enseñar el concepto números se genera una representación de números, que es mental y que corresponde matemáticamente al concepto, permite levantar desde esta representación las ideas de magnitud, orden, por ejemplo.
- Capacidad de modelación. Considerando la tercera característica de las nociones básicas, al enseñar el concepto números se considera la aplicación de los números al mundo real, en el sentido de modelar una situación, donde es posible reconocer la estructura de la situación con los números.

Tendremos en cuenta que con el análisis de datos pueden surgir categorías emergentes. El análisis de datos fue robustecido a partir de la triangulación de expertos, a saber, las cuatro investigadoras a cargo del proyecto.

Discusión de los resultados

Para el análisis, en esta comunicación, nos centraremos en las producciones de uno de los grupos de estudiantes, quienes se enfocaron El análisis evidencia elementos de las tres características de las nociones básicas: significado del concepto, uso de representaciones y aplicaciones.

1. Constitución del significado

Los futuros profesores se ciñen al significado de la fracción como parte todo, en donde aluden a la acción de división de un entero, sin embargo, no consideran cómo serán esas partes, si serán todas iguales o todas distintas. También indica que hay que considerar una de esas partes (tabla 2).

Tabla 2: Sobre el significado de fracción

Unidad de análisis
En el caso de 1/3 dividimos el entero en tres partes y consideramos una de sus partes El entero lo dividimos con rayitas verdes, en 3 partes y consideramos la parte que está marcada con rojo, es decir una de sus partes

En la siguiente expresión, sigue estando presente este significado de la fracción como parte de un todo, pero con un significado de la fracción más elaborada, respecto a las anteriores. En este caso la fracción contempla la acción de "dividir" en partes iguales. Sin embargo, no hay presencia de una significación más elaborada, entendiendo la fracción como el resultado de dos acciones "dividir" y "tomar", donde se dice cómo son esas partes y qué se hace con ellas.

En general ninguno de los estudiantes fue capaz de decir ¿qué se hace con las partes? (tabla 3)

Tabla 3: Ejemplificación del significado de la fracción

Unidad de análisis
Las fracciones corresponden a la división de una totalidad en partes iguales, como cuando dividimos un pastel en dos partes iguales o cuando hablamos de un cuarto de una hora

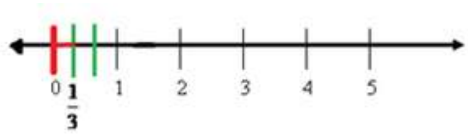
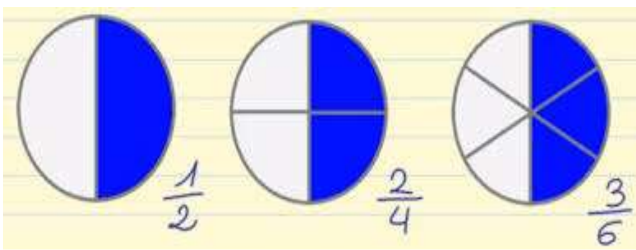
Esta definición es explícita en un solo estudiante del curso.

2. Generación de representaciones

Los futuros profesores emplean tres tipos de representaciones verbal, concreta, simbólica y pictórica.

La tabla 4 muestra algunos ejemplos de las producciones de los futuros profesores sobre la generación de representaciones.

Tabla 4: Generación de representaciones

Contenido del texto	Tipo de representación
(alumno con hoja) Toma la hoja carta, dóblala por la mitad, ¿cuánto hay ahora?	Representación concreta con modelo continuo de área.
	Relación entre representación simbólica y pictórica, utilizando un modelo continuo lineal.
	Relación entre representación simbólica y pictórica, utilizando un modelo continuo de área.

Se observa que los futuros profesores consideran distintas representaciones, en las pictóricas reflejan un todo continuo, en un modelo de área, utilizando sólo círculos y rectángulos, todos relacionados con el significado de fracción como parte de un todo. Sin embargo, no se observan modelos discretos.

3. Capacidad de modelación

Los estudiantes de profesorado también debían proponer tareas para el tratamiento de fracción, donde de evidencia la tercera característica de las nociones básicas: la capacidad de aplicar el concepto de fracción. Los futuros profesores presentan tareas en contextos matemáticos y en contexto personales (tabla 5), pero no hay presencia de contextos laboral o educativo, social o público y científicos (OCDE, 2003).

Tabla 5: Ejemplo de tareas presentadas por los estudiantes

Unidad de análisis
La mamá de pedro lo envía a la feria y le pide que compre 2/4kg de pera, 5/4kg de manzana y ¼ kg de plátano ¿Cuántos kilos de fruta compra Pedro?
Javiera repartió una torta en 10 pedazos, le regalo a María 3/10, a Juan 2/10 y a María José 4/10, pero María no se comió toda su parte y le devolvió 1/10 ¿Cuánta torta regalo? ¿Cuánta torta le quedo a Javiera?

Conclusiones

A la luz de los resultados, observamos cómo los futuros profesores tienden a aludir a la acción de dividir el entero, sólo en uno de los casos, explicitan que esa división es en partes iguales que tiene que ver con una significación de acción, que da cuenta de la fracción como la acción de "dividir en partes iguales". Llama la atención la carencia de otros significados, ya que ningún estudiante logra una definición precisa, como indicar que la fracción es el resultado de dos acciones "dividir" y "tomar", no mostrando cómo son las partes y qué se hará con ellas.

La consideración de modelos continuos en desmedro de lo discreto, nos advierte una necesidad que replantearnos la formación de profesores de enseñanza básica, de manera de abarcar un abanico de herramientas en favor de los alumnos. De la misma manera nos cuestionamos el hecho de que los futuros docentes no hacen uso de contextos laboral o educativo, social o público y científico.

Este estudio contribuye a la formación de profesores, a través del diagnóstico sobre las nociones básicas de fracción que poseen los profesores en formación, de forma de construir una formación basada en las nociones básicas, donde tenga sentido los conceptos, exista una variada gama de representaciones y se desarrolle la capacidad de modelar (Vom Hofe, 1998).

Referencias bibliográficas

Bender, P. (1998). Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concepts. In Claudi Alsina (Ed.), *8th International Congress on Mathematics Education. Sevilla 14–21 July 1996. Selected Lectures* (pp. 57–74). Sevilla: S.A.E.M. 'Thales'.

Blum, W., vom Hofe, R., Jordan, A. & Kleine, M. (2004). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand, (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000* (pp. 145-157). Wiesbaden: VS-Verlag.

Espinoza, L., Barbé, J. y Gálvez, G. (2011). Limitaciones en el desarrollo de la actividad matemática en la escuela básica: el caso de la aritmética escolar. *Estudios Pedagógicos XXXVII (1)*, 105-125.

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2006). Unzälig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern - Zahlvorstellungen wandeln. *Praxis der Mathematik in der Schule, 11* (48), 1-7.

Hernández, R., Fernández C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw- Hill.

MINEDUC (2015). *Evaluación Inicia presentación de resultados 2014*. Consultado el 25 de enero 2016 en: http://www.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/19/2015/11/Presentaci%C3%B3n-Resultados-INICIA-2014.pdf

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.).

Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden (pp. 213-234). Weinheim: Beltz,.

Schipper, W. y Merschmeyer-Brüwer, C. (2014). Mathematikunterricht in der Grundschule /Zahlen und operationen. En W. Einsiedler, M. Götz, A. Hartinger, F. Heinzel, J. Kahlert y U. Sandfuchs (Eds.), *Handbuch Grundschulpädagogik und Grundschuldidaktik*, 4ta edición (pp. 480-492). Regensburg: Klinhardt.

Tatto, M.T. (Ed.). (2013). *The Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries. Technical report*. Amsterdam: IEA.

Thompson, A. G. (1992). Teachers´s beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching* (pp. 127-146). New York: MacMillan Publishing.

Törner, G., Rolka, K., Rösken, B. & Sriraman, B. (2010). Understanding a Teacher´s Actions in the Classroom by Applying Schoenfeld¨s Theory Teaching-in Context: Reflecting on Goals and Beliefs. En B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education, Seeking New Frontiers* (pp. 401-420). Berlin: Springer-Verlag.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

vom Hofe, R. (1998). On the generation of basic ideas and individual images: normative, descriptive and constructive aspects. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick, *Mathematics Education as a Research Domain: A search for identity*. Great Britain: Kluwer Academic Publishers.

Vom Hofe, R. (2014). Primäre und sekundäre Grundvorstellungen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*.

Wittmann, E. Ch. (1998). Standard Number Representations in Teaching Arithmetic. *Journal für Mathematikdidaktik, 18,* 149-178.