Historia de la Matemática – Parte I
Ecuaciones Algebraicas

Moreno Julia, Weingast Lilian(*)

Parte I

Parte II

Introducción

Los principios de la matemática

Una de las nociones más primitivas en Matemática, es la ley de composición: parece inseparable de los primeros rudimentos de cálculo con números naturales y magnitudes mensurables. Los documentos más antiguos de los egipcios y los babilonios, nos muestran que ya estaban en posesión de un sistema completo de reglas de cálculo para números naturales, para racionales positivos, las longitudes y las áreas, y aunque los textos babilonios se refieran únicamente a problemas en los que los datos tienen valores numéricos concretos, no dan lugar a dudas en cuanto a la generalidad de las reglas empleadas, e indican una habilidad técnica considerable en el manejo de las ecuaciones de primero y segundo grado.

Los griegos de la época clásica, se preocuparon por justificar las reglas empleadas y de dar una definición precisa de las operaciones, puesto que éstas habían permanecido en el dominio de lo empírico. Es cierto que el tratamiento axiomático de los números naturales no aparecerá hasta finales del siglo XIX, pero hay numerosos pasajes en los Elementos de Euclides en los que se dan demostraciones formales de reglas de cálculo tan <<evidentes>> intuitivamente como las de cálculo con enteros (como la conmutatividad del producto en los números racionales). Las demostraciones de esta clase más importantes son las que se refieren a la teoría de las magnitudes, la creación más original de la Matemática griega (equivalente a nuestra teoría de los números reales positivos), en ella Euclides considera el producto de dos razones de magnitudes, demuestra que es independiente de la forma en que aparezcan estas razones (primer ejemplo de cociente de una ley de composición de una relación de equivalencia) y que es conmutativo.

Sin embargo, este progreso hacia el rigor va acompañado en Euclides de un estancamiento, e incluso en algunos puntos de un retroceso, en lo referente a la técnica del cálculo algebraico. El predominio avasallador de la Geometría (para la que está evidentemente concebida la teoría de las magnitudes) paraliza todo desarrollo autónomo de la notación algebraica, los elementos que aparecen en los cálculos deben siempre ser <<representados>> geométricamente; y, por otra parte, las dos leyes de composición que intervienen no están definidas sobre el mismo conjunto (la suma de dos razones no siempre está definida, y el producto de dos longitudes no es otra longitud sino un área), todo esto origina una complicación que hace casi imposible el manejo de relaciones algebraicas de grado superior al segundo.

Al declinar la Matemática griega veremos a Diofanto volver a la tradición de los "logísticos" o calculadores profesionales, que habían continuado aplicando las reglas heredadas de los egipcios y babilonios. Diofanto utiliza por primera vez un símbolo literal para representar una incógnita en una ecuación. Pero, no parece preocuparse mucho de poner en relación los métodos que utiliza con ideas generales, y cuanto a la concepción axiomática de las leyes de composición, tal como empezaba a asomar en Euclides, parece tan alejada del pensamiento de Diofanto como del de sus continuadores inmediatos: no volverá a aparecer en el Algebra hasta principios del siglo XIX.

Era por ello necesario que, durante los siglos intermedios, se desarrollase por una parte un sistema de notaciones algebraicas adecuado para expresar leyes abstractas, y que por otra, la noción de "número" se ampliase lo suficiente como para permitir, mediante la observación de casos particulares bastantes diferenciados, elevarse a concepciones generales.

El único progreso notable del Algebra al final de la Edad Media, fue la mejora progresiva de la notación algebraica.

A principio del Siglo XVI el Algebra conoció un nuevo impulso, gracias al descubrimiento, por los matemáticos de la escuela italiana, de la resolución "por radicales" de la ecuación de tercer grado y después de la de cuarto; fue ahí donde se vieron obligados a introducir en sus cálculos los imaginarios.

La notación algebraica, fue perfeccionada decisivamente por Viète y Descartes; a partir de este último la notación algebraica es ya poco más o menos la que empleamos hoy.

Parece que desde mediados del siglo XVII hasta finales del XVIII los vastos horizontes abiertos por la creación del Cálculo infinitesimal hicieran que se despreciase un poco el Algebra, y sobre todo la reflexión matemática sobre las leyes de composición o sobre la naturaleza de los números reales o complejos.

Historia y educación

Un cierto conocimiento de la historia de la matemática, debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de cualquier nivel. En el caso de profesores de nivel terciario y universitario, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino primariamente porque la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática.

La visión histórica, transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. Cuántos de estos teoremas, que en nuestros días de estudiantes nos han aparecido como verdades que salen de la oscuridad y se dirigen hacia la nada, han cambiado de aspecto para nosotros al adquirir un perfecto sentido dentro de la teoría, después de haberla estudiado más a fondo, incluido su contexto histórico y biográfico.

La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante, pero capaz también de corregir sus errores. Nos aproxima a las interesantes personalidades de los hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos, por motivaciones distintas.

Desde el punto de vista del conocimiento más profundo de la propia matemática, la historia nos proporciona un cuadro en el que los elementos aparecen en su verdadera perspectiva, lo que redunda en un gran enriquecimiento tanto para el matemático técnico, como para el que enseña. El orden lógico no es necesariamente el orden histórico, ni tampoco el orden didáctico coincide con ninguno de los dos. Pero el profesor debería saber cómo han ocurrido las cosas, para:

- comprender mejor las dificultades del hombre genérico, de la humanidad, en la elaboración de las ideas matemáticas, y a través de ello las de sus propios alumnos.
- entender mejor la ilación de las ideas, de los motivos y variaciones de la sinfonía matemática,
- utilizar este saber como una sana guía para su propia pedagogía.

El conocimiento de la historia proporciona una visión dinámica de la evolución de la matemática. Se puede barruntar la motivación de las ideas y desarrollos en el inicio. Ahí es donde se pueden buscar las ideas originales en toda su sencillez y originalidad, todavía con su sentido de aventura, que muchas veces se puede hacer desaparecer de los textos. Como dice muy acertadamente O. Toeplitz: "Con respecto a todos los temas básicos del cálculo infinitesimal... teorema del valor medio, serie de Taylor..., nunca se suscita la cuestión: ¿por qué así precisamente? o ¿cómo se llegó a ello? Y sin embargo, todas estas cuestiones han tenido que ser en algún tiempo objetivos de una intensa búsqueda, respuestas a preguntas candentes... Si volviéramos a los orígenes de estas ideas volverían a tomar una vida fresca y pujante".

Tal visión dinámica, nos capacitaría para muchas tareas interesantes en nuestro trabajo educativo:

- posibilidad de extrapolación hacia el futuro
- inmersión creativa en las dificultades del pasado
- comprobación de los tortuosos caminos de la invención, con la percepción de la ambigüedad, oscuridad, confusión inicial...

Por otra parte, el conocimiento de la historia de la matemática y de la biografía de sus creadores más importantes nos hace plenamente conscientes del carácter profundamente histórico, es decir, dependiente del momento y de las circunstancias sociales, ambientales, prejuicios del momento..., así como de los mutuos y fuertes impactos que la cultura en general, la filosofía, la matemática, la tecnología, las diversas ciencias han ejercido unas sobre otras. Aspecto este último del que los mismos matemáticos enfrascados en su quehacer técnico no suelen ser muy conscientes, por la forma misma en que la matemática se presenta a menudo, como si fuera inmune a los avatares de la historia.

Amplitud de nuestro trabajo:

Para la realización de este trabajo, el cual abarca la evolución del álgebra hasta fines del siglo XVIII, nos basamos en el libro "A History of Algebra" de van der Waerden, seleccionando algunos capítulos de la primera parte que trata ***ecuaciones algebraicas***.
Tomamos los tres autores árabes más destacados: Al – Kharizmi, Tabit Ben Qurra y Omar Khayyam; en segundo lugar, consideramos el Algebra en Italia y por último, los aportes de Viète, Stevin y Fermat al tema que nos ocupó.

1.- Los árabes y la matemática

1.1.-Los comienzos de la matemática en el Imperio Musulmán

Durante el primer siglo de las conquistas árabes se produjo un ambiente de considerable confusión política e intelectual, y probablemente esto fue la causa de las dificultades con que nos encontramos para localizar los orígenes del sistema de numeración decimal moderno. Al parecer los árabes no manifestaron en un principio ningún interés intelectual, y contaban con un escaso bagaje cultural, poco más que un lenguaje, que imponer a los pueblos conquistados. Hacia el año 750 los árabes , conquistadores, empezaron a mostrarse deseosos de asimilar la cultura de las civilizaciones que habían invadido. Se sabe que hacia el año 766 o antes llegó a Bagdad procedente de la India una obra astronómico – matemática que los árabes conocieron con el nombre de *Sindhind*. Unos años más tarde, quizás hacia el 780, se tradujo del griego al árabe el *Tetrabiblos*, el tratado astrológico de Ptolomeo. La alquimia y la astrología estuvieron entre los primeros temas que despertaron el interés intelectual de los conquistadores árabes. Lo que se ha llamado el <<milagro árabe>> podría decirse que no consiste tanto en la sorprendente rapidez con que se levantó un imperio político como en la celeridad con la que asimilaron los árabes la cultura de sus vecinos, una vez que comenzaron a saborearla.

Durante la segunda mitad del siglo VIII fueron llamados a Bagdad sabios procedentes de Siria, Irán y Mesopotamia, incluidos entre ellos judíos y cristianos nestorianos, y Bagdad se fue convirtiendo en una nueva Alejandría. Durante el califato de Al – Mamun (809 – 833) los árabes dieron rienda suelta a su pasión por las traducciones. Se dice que el califa tuvo un sueño en el que se le apareció Aristóteles, y en consecuencia decidió hacer traducir al árabe todas las obras griegas que se tuvieran a la mano, incluido el *Almagesto* de Ptolomeo y una versión completa de los *Elementos* de Euclides.

Al – Manun fue quién fundó en Bagdad la "Casa de la Sabiduría" (Bait Al – Hikma), comparable al antiguo Museo de Alejandría. Entre los miembros de esta especie de universidad estaba un matemático y astrónomo. Mohammed ibn – Musa Al – Khwarizmi, cuyo nombre, lo mismo que el de Euclides, iba a hacerse más tarde tan popular durante la baja Edad Media.

1.2.-Mohammed ibn – Musa Al – Khwarizmi

1.2.1.- Origen de los vocablos "*algoritmo*" y "*álgebra*"

Además de tablas astronómicas y tratados sobre el astrolabio y el reloj de sol, escribió Al – Khwarizmi dos libros sobre aritmética y álgebra que jugaron un papel muy importante en la historia de la matemática. El primero de ellos, del cual solo existe la traducción latina pues el original se ha perdido, es "De numero indorum" (Sobre el arte de calcular hindú). En esta obra, que estaba basada presumiblemente de una traducción al árabe de Brahmagupta, explicaba por completo el sistema de numeración hindú. Cuando las primeras traducciones latinas de esta obra aparecieron en Europa, los lectores, que no conocían el origen del sistema de numeración del cual trataba, comenzaron a atribuir al autor no solo la obra sino también el sistema de numeración expuesto en ella, siendo el nuevo sistema de notación conocido como "el de Al – Khwarizmi" y, a través de las deformaciones del nombre en la traducción y en la transmisión, simplemente como "algorismi". Por último este sistema de numeración que hace uso de los numerales hindúes vino a ser denominado sin más como "algorismo" o " algoritmo", palabra derivada del nombre de Al – Khwarizmi.

En su segundo libro referido a la matemática, Al- Khwarizmi trataba de "la solución de problemas por *al-jabr* y *al-muqabala*" (Al–jabr wa'l muqabalah), convirtiéndose en el primer autor islámico que escribiera sobre este tema. Del título de este libro se ha derivado la palabra álgebra, cosa natural si se tiene en cuenta que fue de este libro del que aprendió más tarde Europa la rama de la matemática que lleva ese nombre.

El significado usual de *jabr* en los tratados matemáticos es: añadir términos iguales a ambos lados de una ecuación (en orden) para eliminar términos negativos, es decir a la transposición de términos que están restados al otro miembro de la ecuación, sumándolos. Otra interpretación, menos frecuente, es: multiplicando ambos lados de una ecuación por uno y el mismo número en orden para eliminar fracciones.

El significado usual de *muqabala* es: reducción de los términos positivos por substracción de iguales cantidades de ambos lados de una ecuación, es decir la cancelación de términos iguales en los dos miembros de la ecuación. Pero al-Karaji también utilizaba esta palabra en el sentido de "igualar". El significado literal de la palabra es: comparando, posiciones opuestas.

1.2.2.-Las ecuaciones cuadráticas de Al Khwarizmi

En uno de los capítulos de su tratado al-Khwarizmi, presenta la solución de ecuaciones cuadráticas.

Consideremos por ejemplo, en su propia terminología, un caso de los que se pueden presentar: *Raíces y cuadrados iguales a números:*

Por ejemplo: un cuadrado y diez raíces de la misma cantidad a treinta y nueve (dirhems?); esto es decir, ¿Cuál debe ser el cuadrado que, cuando incrementado por diez de sus propias raíces, aumenta a treinta y nueve?

La solución es: tu divides a la mitad el número de raíces, lo que en la presente instancia da cinco. Esto lo multiplicas por sí mismo, el producto es veinticinco. Suma esto a treinta y nueve, la suma es sesenta y cuatro.

Ahora extrae la raíz de esto, que es ocho, y substrae de él la mitad de números de raíces, la cual es cinco. El resto es tres. Esta es la raíz del cuadrado que buscabas; el cuadrado en sí mismo es nueve.

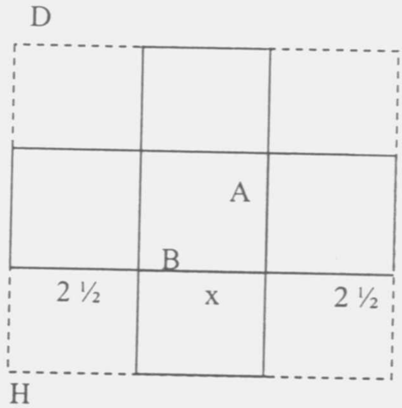
En notación actual la ecuación es:

$$x^2 + 10x = 39$$

que puede ser transformada en:

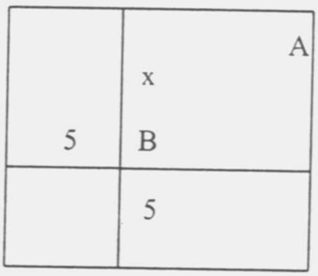
$$(x + 5)^2 = 39 + 25 = 64$$
$$x + 5 = \sqrt{64} \quad = 8$$
$$x = 8 - 5 \quad = 3$$

Luego, Al-Khwarizmi presenta la siguiente demostración: Dibuja un cuadrado AB, el lado del cual es x (la raíz buscada). En los cuatro lados construye rectángulos que tienen ¼ de 10 , o sea 2 ½ , como su ancho, ¿por qué?; pues bien, observemos el término 10x, este no es otra cosa que 4 veces ¼ de 10 (2 ½) por x, es decir, que agrega cuatro rectángulos de lados x y 2 ½ . El área de cada uno de estos rectángulos es 2 ½ · x, al ser cuatro rectángulos nos queda 4 · 2 ½ x = 10x.



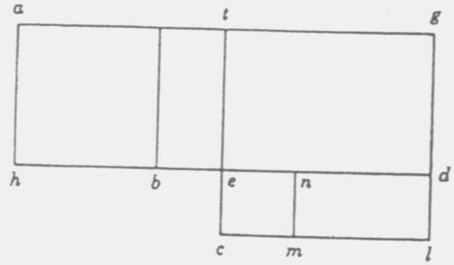
Ahora el área del cuadrado junto con la de los cuatros rectángulos es igual a 39. Para completar el cuadrado DH, debemos añadir 4 cuatro cuadrados cuyos lados serán 2 ½, el área agregada es entonces 25. Por lo tanto el área del cuadrado grande es 64, por lo cual su lado mide 8. Pero el lado del cuadrado grande es 2 ½ + x +2 ½, es decir que, 5 + x = 8. Esto implica que el lado del cuadrado original es 8–5 =3.

Luego presenta otra demostración más simple, donde rectángulos de lado 5 son construídos sólo en dos de los lados del cuadrado AB. El resultado es, por supuesto, el mismo:



El área del cuadrado grande es x^2, mientras que el área de cada uno de los rectángulos agregados es $5 \cdot x$, esto implica que se ha agregado $2 \cdot 5 \cdot x$ unidades al área del cuadrado grande. Pero esto es 39 (por dato). Si consideramos el área total nos queda $(x + 5)^2 = 39 + 25$, donde x + 5 es el lado del cuadrado y 25 es el área que se agrega al completar el cuadrado. De aquí, claramente se puede observar que x + 5 = 8, y entonces x = 3.

Para la ecuación $x^2 + 21 = 10x$, Al Khwarizmi dibuja un cuadrado *ab* que representa a x^2 y un rectángulo *bg* que representa 21 unidades. Entonces el rectángulo total que comprende el cuadrado *ab* y el rectángulo *bg* debe tener como área 10x, luego el lado *ag* o *hd* debe medir 10 unidades.



Si trazamos entonces las mediatrices *et* de *ag* y de *hd*, la extendemos hasta c de manera que *tc* = *tg* y completamos los cuadrados *tclg* y *cmne* (ver figura), entonces el área *tb* es igual al área *md*; pero el cuadrado *tl* mide 25 y el gnomon *tenmlg* 21 (ya que es igual al rectángulo *bg*). Por lo tanto, el cuadrado *nc* mide 4 y su lado *ec* 2; como *ec* = *be* y *he* = 5, tenemos que $x = hb = 5 - 2 = 3$.

1.3.-Tabit ben Qurra al Harrani (836 – 901)

1.3.1.-La vida de Tabit ben Qurra

El gran científico Tabit ben Qurra al Harrani era un "Sabio" de Harran. ¿Qué significa esto? Para explicarlo seguiremos los 2 volúmenes del trabajo de D. Chwolson: " Die Ssabier und der Ssabismus" (St. Petesburgo 1856, reimpreso por Oriental Press, Amsterdam 1965).

De acuerdo con Chwolson, debemos distinguir entre 2 clases de Sabios: los genuinos o Chaldaran Sabians (Sabios de Chaldaean) y los pseudo- Sabios de Haran, a los cuales pertenecen Tabit ben Qurra y al-Battani.

Los Sabios Chaldaean son mencionados en el Koran (II 59 y XXII 17) entre los creyentes de Dios, quienes tenían libros sagrados y no eran perseguidos.
¿ Quiénes eran estos Sabios? De acuerdo con Chwolson ellos eran idénticos a los "Mandaeans", una secta gnóstica viviendo en el Sur de la Mesopotamia cerca de los pantanos y lagos de Bosra.

Los Sabios de Harran eran totalmente diferentes de los Sabios genuinos mencionados en el Koran. Los historiadores Mas'udi dicen que los Sabios "que tienen sus hogares en Wâsith y en Basrah en Iraq difieren de los Sabios de Harran por su apariencia exterior". Además, su religión era diferente. Para los Mandauns en el Sur de la Mesopotamia los siete planetas y los 12 signos zodiacales poderes malvados, pero los Harranitas construían templos para los dioses planetarios.

Nosotros nos concentraremos en los Sabios Harranitas cuyo modo de vida era, en muchos aspectos similar a la "vida de los Pitagóricos".

No se sabe con exactitud en que año nació Tabit Ben Qurra, se cree que entre 824 y 836, murió en 901.En su ciudad natal, Harran, vivía como cambiador de dinero, pero sus ideas sobre la religión lo llevaron a un conflicto. Fue llevado ante el mayor sacerdote, quién declaró sus doctrinas herejes y le prohibió la entrada al templo. Él primero revocó sus opiniones pero después volvió sobre ellas. Fue excomulgado, y dejó la ciudad. De casualidad conoció a Mohammed ben Musa ben Sakir, uno de los famosos "hijos de Musa": Mohammed, Ahmed, y Hasan, quién era un gran colector de libros y gran benefactor de la ciencia. Este Mohammed ben Musa llevó a Tabit a Bagdag, a vivir a su casa y lo presentó al califa. Todo esto debió de suceder antes del 873 DC pues en Enero del 873 Mohammed ben Musa muere. Tabit tuvo éxito en establecer en Bagdag un primado Sabio para todo Iraq. Por esta movida, la situación de los sabios fue estabilizada, y fueron respetados en todo el país.

Tabit fue altamente estimado por sus escritos sobre medicina, filosofía, matemática, astronomía y astrología. También fue un competente traductor del Griego y el Sirio al Árabe. Tradujo trabajos de Euclides, Arquimedes, Apollonios, Autolykos, Ptolemaios, Nikomachos, Proklos, entre otros.

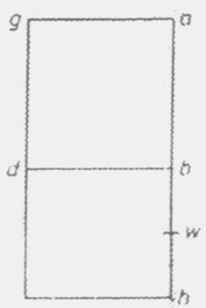
1.3.2.-Verificación geométrica de las soluciones de ecuaciones cuadráticas:

El corto tratado de Tabit sobre este tema titulado "la verificación de problemas de Algebra por pruebas geométricas" está conservado en un manuscrito. Fue publicado con una traducción y comentarios alemanes por P. Luckey en 1941. Los diagramas no son tomados del manuscrito sino de las publicaciones de Lucky.

"Hay tres formas fundamentales a las que pueden ser reducidas las mayoría de los problemas de algebra:

La primera forma básica es: el término cuadrático y las raíces son iguales a los números." En notación moderna sería $x^2 + mx = n$, donde n y m son números dados.

Para entender más fácilmente el procedimiento lo iremos comparando con un ejemplo concreto: $x^2 + 10x = 39$.



Dibujamos un cuadrado abgd, cuya área es el término cuadrado (x^2). Claramente se ve que cada lado es igual a la raíz (x). Trazamos la línea bh igual al número de unidades de las raíces dadas (en nuestro ejemplo es el número 10) y completamos el área dh .

El producto de ab y bh es igual al número de raíces dadas (10x en el ejemplo), pero también es el área del rectángulo dh, pues ab es igual a db.

El área gh es igual al área de gb y la de dh juntas, por lo tanto es igual a $x^2 + mx$ en este ejemplo ($x^2 + 10x$) y este número es conocido, pues es el número n (en nuestro caso es 39).

Entonces el producto de ha y ab es conocido – pues ab es igual a ag- y la línea bh es conocida pues es el número m (10 en el ejemplo).

Si la línea bh es partida a la mitad en el punto W (esto es, en nuestro caso concreto, bh/2 = 10/2 =5) entonces el producto de ha – x + m (x + 10)- y ab (x) juntos con el cuadrado de bw (el cuadrado de 5 en nuestro caso) es igual al cuadrado de aw; en simbología moderna esto sería:

Caso general

$$\underbrace{(x + m)\cdot x}_{} + (m/2)^2 = (x + m/2)^2$$

$$x^2 + mx + (m/2)^2 = (x + m/2)^2$$

Ejemplo

$$(x + 10)\cdot x + (5)^2 = (x + 5)^2$$

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

Pero el producto de ha y ab es conocido, pues no es otra cosa que n y el cuadrado de bw es conocido – bw = m/2 (en el ejemplo es 5)- entonces:

Caso general

$$N + (m/2)^2 = (x + m/2)^2$$

Ejemplo

$$39 + 25 = (x + 5)^2$$

$$64 = (x + 5)^2$$

Por lo tanto el cuadrado de aw es conocido y también aw (en nuestro ejemplo aw = 8). Si bw – m/2 (5)- es restado a ambos miembros, ab (x) resulta conocido:

Caso general

$$\sqrt{\left[n + (m/2)^2\right]} = x + m/2$$

$$\sqrt{\left[n + (m/2)^2\right]} - m/2 = x + m/2 - m/2$$

$$\sqrt{\left[n + (m/2)^2\right]} - m/2 = x$$

Ejemplo

$$8 = x + 5$$

$$8 - 5 = x + 5 - 5$$

$$3 = x$$

Del mismo modo Tabit trata el segundo tipo de ecuaciones:

$$x^2 + n = mx$$

O *" el término cuadrático y un número es igual a raíces"*

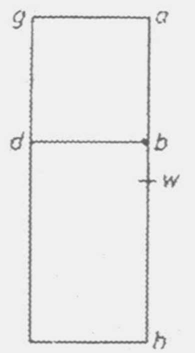
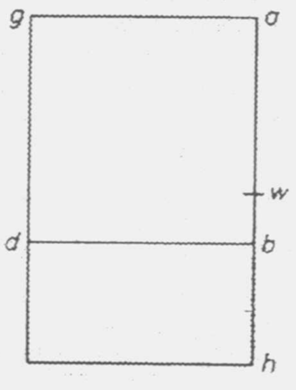


Fig. 1

Hacemos el término cuadrático (x^2) dentro de un cuadrado abgd y hacemos ah igual a tal múltiplo de unidades en el cual las líneas son medidas como en el número de raíces dadas. Obviamente, ah es más larga que *ab*, porque las raíces son más largas que el término cuadrático, esto se ve claramente en la ecuación. Completamos el área *gh,* que es igual a *ah* por *ag* (esto es, igual al término mx). Y si el área *bg*, la cual es el término cuadrático (x^2) es restado de él, el resto *dh* es igual al número dado n. Entonces dh es conocido, y es igual al producto de *ab* (línea igual a *ag*) y *bh*, y la línea *ah* es conocida. Entonces ahora el problema se remonta a dividir una línea *ah* en *n* de tal manera que el producto de *ab* (x) y *bh* (ah – x) es conocido.

Ahora en la proposición 5 del segundo libro de Euclides está probado que, si *ah* se divide a la mitad en *w*, el producto de *ab* (x) y *bh* (ah – x) junto con el cuadrado de *bw* es igual al cuadrado de *aw*. Esto es (en notación moderna):

$$x \cdot (ah - x) + (ah/2 - x)^2 = xah - x^2 + (ah/2)^2 - ahx + x^2$$
$$= (ah/2)^2$$
$$x \cdot (ah - x) + (ah/2 - x)^2 = aw^2$$



Pero *aw* es conocido, y su cuadrado es conocido, y el producto de *ab* y *bh* es conocido pues: $ab \cdot bh = x \cdot (ah - x)$, pero $ah = m$, entonces $ab \cdot bh = x \cdot (m - x) = xm - x^2$, y esto no es otra cosa que *n*.

Entonces el cuadrado de *bw* ($ah/2 - x$, o $m/2 - x$) es conocido como el residuo, por lo tanto *bw* es conocido, si es restado de *aw* (fig. 1) o sumado a él (fig. 2) *ab* (x) resulta conocido, y es la raíz, y si lo multiplicamos por sí mismo, *abgd* es conocido, y esto es lo que queríamos probar.

Creemos que no es necesario traducir la 3° parte del texto, en la cual la ecuación: *"Números y raíces son iguales al término cuadrático"* es resuelta utilizando la proposición II 6 de Euclides, y de acuerdo con la solución algebraica es probada en la misma manera como en los otros dos casos.

1.4.-Omar Khayyam

1.4.1.-La vida de Omar Khayyam

El poeta, filósofo, matemático y astrónomo persa Omar ben Ibrahim al–Hayyam, usualmente llamado Omar Khayyam, vivió en la segunda mitad del siglo XI.

En la introducción de su "Algebra" Omar Khayyam explica que "el arte del álgebra" radica en la determinación de cantidades desconocidas geométricas o numéricas.

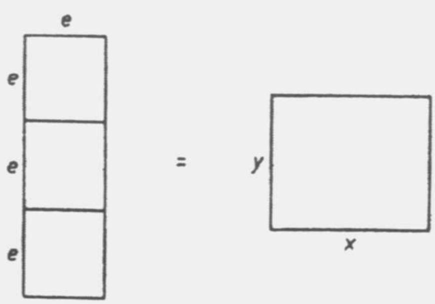
Esta distinción entre los números y magnitudes medibles es mantenida a través de todo el tratado. El autor menciona cuatro tipos de magnitudes medibles: la línea, la superficie, el sólido y el tiempo. Él excluye magnitudes de más de 3 dimensiones tal como el "cuadrado – cuadrado" y el " cuadrado – cubo", que eran usados por algunos algebristas.

1.4.2.-El álgebra de Omar Khayyam

El algebra de Omar Khayyam esta centrado en la geometría. Él primero resuelve ecuaciones lineales y cuadráticas por los métodos geométricos explicados en los "elementos de Euclides", y luego muestra que las ecuaciones cúbicas pueden ser resueltas mediante la intersección de cónicas.

Omar conocía muy bien que autores anteriores igualaban magnitudes geométricas con números. El evadió esta inconsistencia lógica con un truco, introduciendo una unidad de longitud. Escribió:

"Cada vez que en el libro diga " un número es igual a un rectángulo", debemos entender por el "número" un rectángulo para el cual un lado es la unidad, y el otro una línea igual en medida al número dado, de tal modo que cada parte con la cual se está midiendo es igual al lado que tomamos como unidad".



En la figura denotamos la unidad de longitud con e, y los lados del rectángulo con x e y . La figura denota la ecuación $3 = x \cdot y$

Omar Khayyan primero resuelve ecuaciones cuadradas por métodos usuales. Después pasa a las ecuaciones cúbicas. Algunas de ellas, por ejemplo:

$$x^3 + ax^2 = bx$$

pueden ser reducidas a ecuaciones cuadráticas. El primer tipo que requiere secciones cúbicas es:

"un número es igual a un cubo"

o, en notación moderna:

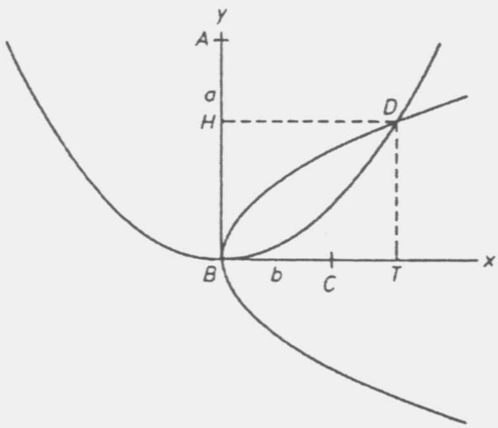
$$x^3 = N$$

Omar primero resuelve un problema auxiliar, a saber:

"Para encontrar 2 líneas[1] entre 2 líneas dadas tal que las cuatro líneas formen una proporción continua"

Si las 2 líneas dadas son llamadas AB = a y BC = b, el problema es, encontrar x e y tal que:

$$a : x = x : y = y : b$$



Omar dibujó 2 segmentos perpendiculares BA y BC, y construyó dos parábolas, las dos con vértice en B. La primer parábola con eje BC y "parámetro[2]" BC, la otra tiene eje BA y "parámetro" BA.

En notación moderna, las ecuaciones de las 2 cónicas son:

---

[1] Línea = segmento

[2] En cónicas es la longitud 2p de la cuerda perpendicular al eje mayor que pasa por un foco

ỉ $\quad y^2 = bx \qquad\qquad$ y $\qquad\qquad x^2 = ay$

Sea D el punto de intersección. Entonces las perpendiculares x = DH e y = DT satisfacen ỉ y por lo tanto a ✢

Luego, Omar considera la ecuación ✱ en la cual N es un número dado. Construye un bloque rectangular con base e^2 y altura Ne. Ahora él debe construir un cubo igual a este bloque. En el caso N=2 es el bien consabido problema Griego de "doblando el cubo". Hippokrates the Chios había probado que este problema podía ser reducido al problema de encontrar dos cantidades proporcionales x e y entre dos segmentos dados a y b.

Omar resolvió el problema auxiliar ✢ con a = e y b = Ne, y probó que el primer intermedio x es el lado del cubo requerido.

Todo esto es bien conocido en los textos Griegos. De acuerdo con Eutokios la solución ✢ por medio de la intersección de dos parábolas fue debido a Manaichmos.

Luego, Omar considera 6 tipos de ecuaciones cúbicas en las cuales un binomio es igualado a un monomio, por ejemplo:

● $x^3 + ax = b$
▲ $x^3 + b = ax$
☰ $x^3 = ax + b$
() $x^3 + ax^2 = b$
✕ $x^3 + b = ax^2$
? $x^3 = ax^2 + b$

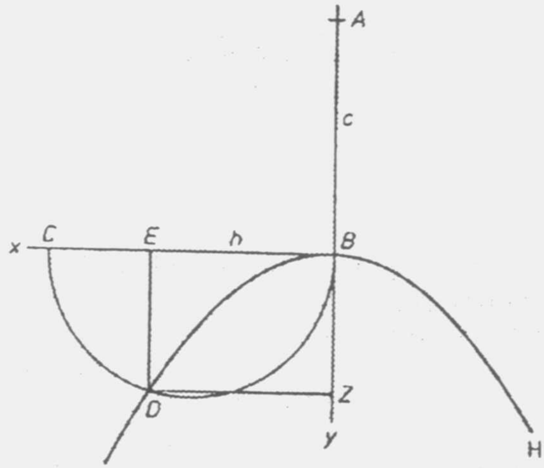
En la terminología de Omar, la ecuación 5 es escrita como:

" un cubo y (un número de) lados son iguales a un número"

Omar primero construye un cuadrado C^2 igual al número b. Esto significa, como él ha explicado antes que el bloque con lados c, c y h es hecho igual al bloque con lados e, e y be, donde e es la unidad de longitud y b es el número en el lado derecho de la ecuación 5. Así que, la ecuación 5 puede ser escrita en la forma homogénea.

$$x^3 + c^2x = c^2h$$

en la cual c = AB y h = BC son segmentos lineales dados.



Para resolver esta ecuación geométricamente, Omar construye una parábola (ver gráfico) con vértice en B, siendo su eje BZ y su "parámetro" AB = C
Luego él describe un semicírculo con diámetro BC = h.
El semicírculo tiene necesariamente un punto de intersección D con la parábola.
Omar ahora probó que DZ = x resuelve la ecuación 11.
En terminología moderna, sean x = DZ e y = DE las coordenadas de D. La ecuación de la parábola es

$$(12) \qquad x^2 = yc$$

o, en las palabras de Omar: "El cuadrado de DZ será igual al producto de BZ y AB". La ecuación del círculo es:

$$(13) \qquad y^2 = x\,(h - x)$$

la cual Omar escribe como una proporción

"BE es a ED como ED es a EC"

Ni más ni menos, (12) es escrita como una proporción

"AB es a BE como BE es a ED"

De estas dos proporciones Omar concluye que EB = x es la solución, y la única solución de este problema.

De esta manera, Omar escribe la ecuación (6) en la forma homogénea.

$$(14) \qquad x^3 + c^2h = c^2x$$

Y la resuelve por la intersección de la parábola

(15) $yc = x^2$

con la hipérbola

(16) $y^2 = x\,(x - h)$

La tercera ecuación (7) es resuelta en la misma forma, la única diferencia es el signo del término constante b.

La siguiente ecuación (8) es escrita como:

(17) $x^3 + ax^2 = s^3$

donde a y s son segmentos lineales conocidos.

Omar la resuelve por intersección de la hipérbola

$$xy = s^2$$

con la parábola

$$s\,(x + a) = y^2$$

Esta solución es innecesariamente complicada, porque requiere la solución preliminar de la ecuación $s^3 = b$ por medio de dos parábolas. Sería mucho más simple poner $b = cd^2$ e intersectar la parábola $x^2 = cy$ con la hipérbola $(x + a)y = d^2$.

En el siguiente tipo (9) es resuelta con un método similar. Una vez más, el término constante b es hecho igual al cubo s^3. Omar notó que en este caso la solución no es siempre posible.

El último tipo de ecuación (10) es reducida a

(18) $x^3 = ax^2 + ac^2$

y solucionando por la intersección de la hipérbola

$$xy = ac$$

con la parábola

$$y^2 = a(x - a)$$

Luego, Omar discute 7 tipos de ecuaciones cuadrinomiales, por ejemplo:

(19) $x^3 + ax^2 + bx = c$

(20) $x^3 + ax^2 + c = bx$

$$(21)\, x^3 + bx + c = ax^2$$
$$(22)\, c + bx + ax^2 = x^3$$
$$(23)\, x^3 + ax^2 = bx + c$$
$$(24)\, x^3 + bx = ax^2 + c$$
$$(25)\, x^3 + c = ax^2 + bx$$

Los métodos de solución son los mismos que en los casos trinomiales. Para resolver (19) uno utiliza un círculo y una hipérbola, para resolver (20) dos hipérbolas, y así sucesivamente.

Después de esto, Omar discute ecuaciones en las cuales aparecen términos como $1/x$, $1/x^2$ y $1/x^3$.

Su primer ejemplo es

$$x^3 = 10 / x^3$$

Multiplicando ambos lados por x^3, uno obtiene

$$(x^3)^2 = 10$$

y por lc tanto

$$x^3 = \sqrt{10}$$

o en las propias palabras de Omar, como las traduce Woepcke:

"Donc le racine de dix sera le cube cherché" (donde la raíz de 10 será el cubo deseado)

Omar nota que la ecuación

$$x^2 = a / x^3$$

No puede ser resuelta por los métodos expuestos por él, porque requiere la intersección de cuatro formas proporcionales entre dos líneas dadas, como Ibn al–Haithman ha probado.

Omar Khayyam no fue el primero en resolver ecuaciones cúbicas por medio de la intersección de cónicas. Al final de su tratado dice que alguien le ha dicho que Muhammand ibn al – Lait Abu al – Jud fue el autor de un tratado en el cual reduce la solución de las ecuaciones cúbicas a secciones cónicas, pero sin el tratamiento de todos los casos. En particular , el pensó la solución de las ecuaciones del tipo (21) por la intersección de una parábola y una hipérbola.

2.- Algebra en Italia

Los métodos de al – jabr y al – muqabala fueron hechos conocidos en Italia primero por la traducción al latín del álgebra de al – khwarizmi realizado por Gerardo de Cremona y luego por el trabajo de Leonardo da Pisa (llamado Fibonacci).Leonardo fue seguido por muchos otros escritores de libros de aritmética, de los cuales Luca Pacioli es el más conocido.

Antes de discutir el trabajo de estos autores, se explicará como fue creada la necesidad de este tipo de libro por las condiciones económicas de los mercaderes italianos.
Se hará uso del contenido de una lectura titulada *"Las Contribuciones del Renacentismo Italiano a la matemática europea"*.

2.1.-La conexión entre Comercio y Civilización en la Italia Medieval.

En el siglo 13, con las mejoras en la navegación por los peligrosos mares, se incrementó la circulación de monedas y la economía Europea se hizo predominantemente monetaria. La invención de letras de crédito, billetes de cambio, contabilidad y teneduría de libros hizo posible el aumento de la banca y la finanzas internacionales. Todo esto junto desarrolló una nueva clase de mercaderes, quiénes vivían en centros comerciales y manufactureros más grandes. La vida de los mercaderes sedentarios era muy diferente de las de sus viajantes predecesores. Los mercaderes de principio de la era medieval eran pequeños comerciantes, acarreando sus inventos en sus cabezas o en un pedazo de papel. Calculaban con sus dedos o con pequeños ábacos. En la otra mano, los mercaderes sedentarios y banqueros escribían y recibían cartas, billetes de cambio, reportes, órdenes y demás. Debían calcular precios, computar pagos, para saber ganancias y pérdidas.

Para todas estas operaciones necesitaban un sistema más eficiente para escribir números y preparado para cálculos escritos. Los números romanos eran demasiado engorrosos: el sistema numérico Hindo Arábigo era mucho más eficiente.

El crédito por descubrir y adoptar en la práctica comercial este sistema numérico , pertenece a un particular grupo de hombres, llamado "abbacists".

De acuerdo con Warren Van Egmond, cuya exposición estamos siguiendo aquí, uno debe distinguir entre la palabra latina "abacus", que significa pizarra para calcular y la palabra Italiana "abbaco", que usualmente significa "aritmética práctica".

2.2.-Fibonacci

2.2.1.-La vida de Fibonacci

Leonardo de Pisa era un miembro de la familia Bonacci, de aquí que se llamara a sí mismo "filo Bonacci", lo que fue abreviado a Fibonacci. A su padre, un secretario de la república de Pisa, le fue confiado alrededor de 1192 la dirección de la compañía comercial de Pisa en Bugia (ahora (Bougie) Algeria. Él contaba con que su hijo Leonardo se convirtiera en comerciante, por lo tanto lo llevó a Algeria. Allí Leonardo aprendió como calcular con los números Hindo – Arábigos. Sus viajes de negocios lo llevaron a Egipto, Siria, Byzantium, Sicilia y el sur de Francia.

Alrededor del 1200 Leonardo regresó a Pisa. Durante los siguientes 25 años realizó distintos trabajos, 5 de ellos son preservados:

1) Libber abbaci (1202, revisado 1228)
2) Geometría Práctica (1220)
3) Un libro titulado "Flos" (1225)
4) Una carta al filósofo Theodoro, quién vivió en Sicilia en la corte del emperador Francisco II.
5) Liber quadratorum (1225)

El tratado en el libro X los "Elementos" de Euclides que contenía el tratamiento numérico de los irracionales el cual ha demostrado por líneas y áreas, infortunadamente se ha perdido.

La importancia de Leonardo fue reconocido en la corte de Federico II. En los escritos de Leonardo son mencionados nombres de especialistas (eruditos) viviendo en la corte de Sicilia, incluyendo al astrólogo Michael Scotus, a quién Dante desterró al infierno, el filosofo Theodoro y el matemático Jhon de Palermo.

Alrededor del 1225, cuando Federico tomó la corte de Pisa, el astrónomo Dominico presentó a Leonardo al emperador. En esta ocasión, John de Palermo, propuso algunos problemas, que Leonardo resolvió rápidamente.

El primer problema era, encontrar el número x tal que $x^2 +5$ y $x^2 - 5$ sean números cuadrados .
Una solución , a saber,

$$x = 35/12 \qquad x^2 + 5 = (4\ 1/12)^2 \qquad x^2 - 5 = (2\ 7/12)^2$$

fue presentada sin la demostración en el libro "Flos" que Leonardo envió a Federico II. En el "Liber quadratorum" la solución fue deducida por un método, el cual explicaremos más adelante.

El segundo problema propuesto a Leonardo fue la solución de la ecuación cúbica:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

En el libro "Flos", Leonardo probó que la solución es ninguno de los enteros, no una fracción, ni un número irracional de los definidos en el libro X de los Elementos de Euclides. Él presentó una solución aproximada en la forma sexagesimal como:

$$1;\ 22,\ 7,\ 42,\ 33,\ 4,\ 40$$

De acuerdo con Vogel, el 40 es muy largo (grande) alrededor de 1½. Entonces la exactitud de Leonardo es admirable.

Si él hubiera aplicado el método de "doble falsa posición" explicado por él mismo en el "Liber abbaci", esto es el método de interpolación lineal entre un valor pequeño x, y un valor largo x_2, hubiera obtenido una aproximación muy pequeña. Es posible que halla usado el entonces llamado método Homer. Este método adaptado al sistema sexagesimal, consiste en poner $x = 1 + y_1$ y obtener una ecuación para y_1, luego poner $60\ y_1 = 22 + y_2$ y obtener una ecuación para y_2, y así sucesivamente.

La historia del método de Homer es muy complicada. En principio, el método era conocido por el autor del Tratado Chino "Nueve capítulos del arte matemático" (Chin Chang Suan Shu) quién vivió en el período Han (entre -150 y 150). El método fue también conocido por el matemático Árabe Jamshid al Kashi. El método fue redescubierto por Paolo Ruffini (1804) y W.G. Homer (1819).

En 1240, la república de Pisa otorgó al "serio y erudito maestro Leonardo Bigolli" un salario anual de 20 monedas de plata "en adición a las ganancias anuales" en reconocimiento de su utilidad a la ciudad y sus ciudadanos a través de su enseñanza y servicios devotos.

2.2.2.-El "Liber abbaci"

Los maestro Italianos de los cómputos eran llamados "maestri d' abbaco". En este sentido es como el título del más influencial trabajo de Leonardo debe ser entendido.

Este apareció primero en 1202. Para la segunda edición de 1228 "nuevo material había sido incluido, y lo superfluo removido". Fue editado por Baldassare Boncompagni en el vol. 1 de Scritti di Leonardo Pisano" (Roma 1857). Un sumario de 15 capítulos del "Liber abbaci" fue dado por Kurt Vogel en su artículo Fibonacci en el diccionario de la Biografía Científica.

La mayor parte del *Liber abbaci* es de lectura más bien árida y aburrida, pero algunos de sus problemas presentan un aspecto tan vivaz que los utilizaron también otros escritores posteriores.

En los capítulos 1 a 7 son introducidos los números Hindo Arábigos y los métodos de cálculos con enterosy fracciones son enseñados.

Los capítulos 8 – 11 contienen problemas concernientes a mercaderes. Un remarcado problema humorístico es el "problema de los 30 pájaros": Un hombre compra 30 pájaros: (patridges) perdices, palomas y gorriones. Un patridges cuesta tres monedas de plata, una paloma dos y un gorrión ½ . El paga con 30 monedas. ¿Cuántos patridges, palomas y gorriones compró?

El problema es resolver el par de ecuaciones:

$$x + y + z = 30$$
$$3x + 2y + \frac{1}{2} z = 30$$

en enteros positivos x, y, z. La única solución es x= 3 y = 5 z = 22.

Este problema es una variante del "problema de los 100 pájaros" ; el cual se encuentra en fuentes Chinas, Indias y Árabes.

Los capítulos 12 y 13 contienen distintos tipos de problemas recreativos, algunos conducen a una ecuación lineal, otros a 2 o 3 ecuaciones lineales con 2 o 3 incógnitas. Por ejemplo, encontramos en las páginas 228 a 243 una secuencia de problemas concernientes a "comprando un caballo".

Leonardo comienza con un simple caso de 2 personas. Una le dice a la otra: "Si me das un tercio de tu efectivo, podré comprar el caballo". La otra responde: "Si me das un cuarto de tu efectivo, podré comprar el caballo". Si s es el precio del caballo, tenemos 2 ecuaciones lineales con dos incógnitas x e y :

$$x + 1/3\ y = s$$
$$y + \frac{1}{4} x = s$$

El problema es indeterminado, pues s no es dado. La solución para s = 11 esta dada como

$$x = (3 - 1) \cdot 4 = 8$$
$$y = (4 - 1) \cdot 3 = 9$$
$$s = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 11$$

Otro caso conduce a 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

(2) $$x + 1/3\,(y + z) = s$$
$$y + \frac{1}{4}(x + z) = s$$

$$z + 1/5\,(x + y) = s$$

Para resolver esta ecuación Leonardo introduce una nueva incógnita

$$(3) \qquad x + y + z = t$$

Restando cada una de las ecuaciones a (3) se obtiene

$$2/3\,(y + z) = 3/4\,(x + z) = 4/5\,(x + y) = t - s = D$$

Con el objeto de obtener una solución entera, Leonardo considera D = 24 obteniendo

$y + z = 36$	$x + z = 32$	$x + y = 30$
$x = 13$	$y = 17$	$z = 19$

Esta solución de las ecuaciones (2) había sido obtenida por Diofantos.

El mismo problema "comprando el caballo" aparece en el libro de al – Karaji y en otras fuentes Árabes y Bizantinas.

Una invención original de Leonardo es la "serie de Fibonacci"

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ...

en la cual cada término es la suma de los dos términos que lo preceden.

Leonardo obtiene esta serie como solución al problema: *"¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja, que se reproduce a su vez desde el segundo mes?"*

El capítulo 14 está dedicado al cálculo con raíces cuadradas y raíces cúbicas.

Leonardo comienza por presentar algunos teoremas del Libro II de Euclides en forma numérica, omitiendo las demostraciones, "porque están todas en Euclides". Para raíces cuadradas él tiene la bien conocida aproximación:

$$\sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

Para la raíz cúbica Leonardo presenta una primera aproximación

(4)

$$\sqrt[3]{a^3 + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^3 - a^3} = a_1$$

Y luego una segunda aproximación

$$a_2 = a_1 + \frac{r}{3a_1(a+1)} \qquad \text{con } r_1 = a - a_1^{\,3}$$

De acuerdo con Vogel la primera aproximación (4) ya era conocida por al – Nasawi. En efecto, es una simple aplicación de la regla de "falsa doble posición". Como para la segunda aproximación Leonardo dice: "He inventado este modo de encontrar raíces"

Ejemplos de sus operaciones con radicales son:

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14}$$

y

$$4 + \sqrt[4]{10} = \sqrt{16 + \sqrt{10} + 8\sqrt[4]{10}}$$

El capítulo 15 es muy interesante. En una primera sección, Leonardo resuelve el par de ecuaciones

$$(8) \qquad 6 : x = y : 9$$
$$(9) \qquad x + y = 21$$

Como sigue: De (8) el encuentra

$$x \cdot y = 54$$

Y luego, usando Euclides II, 5

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{21}{2}\right)^2 - 54 = \frac{225}{4}$$

Entonces $x - y = 15, \qquad x = 18 \;\; y = 3$

En una segunda sección, Leonardo presenta el teorema de Pitágoras.

Para esto, resuelve el problema: En la línea de unión de las bases de dos torres de altura y distancia conocidas hay un brote el cual debe ser igual a la distancia de lo alto de las torres. Leonardo da una solución numérica tan buena como una geométrica. (rever)

La tercera, y más extensa, sección contiene un tratamiento sistemática de ecuaciones lineales y cuadráticas. Citando "Maumeth" i.e. Muhammed ben Musa al – Khwarizmi, Leonardo resuelve las 6 formas normales:

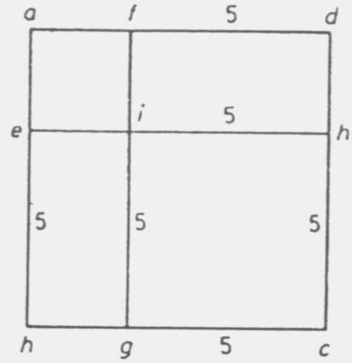
$$ax^2 = bx$$
$$ax^2 = c$$
$$bx = c$$

$ax^2 + bx = c$
$ax^2 + c = bx$ (2 soluciones)
$ax^2 = bx + c$

La cantidad desconocida x es llamada "radix", su cuadrado "quadratus" o "census" y el término constante c numerus- El método de solución está ilustrado por numerosos ejemplos.

El primer ejemplo de una ecuación cuadrática mixta es el mismo que en el algebra de al– Kwarizmi, llamado "census et decem radicis equantur 39" (1 cuadrado y diez raíces es igual a 39)

La solución está ilustrada por un dibujo



En otros ejemplos, uno debe dividir 10 en 2 partes x y 10 – x satisfaciendo una condición auxiliar como es:

$$\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=\sqrt{5}$$

Leonardo también incluye ecuaciones que pueden ser reducidas a ecuaciones cuadráticas, de esta manera, el conjunto de ecuaciones

$$y = 10/x$$
$$z = y^2/x$$
$$z^2 = x^2 + y^2$$

guiando a la ecuación cuadrática para x^4:

$$x^8 + 100x^4 = 10000$$

(*) liwein@ciudad.com.ar