

# Rango numérico de una matriz compleja

Ana Gabriela Martínez

Elvio A. Pilotta

**Resumen.** En este trabajo se estudia el concepto de rango numérico de una matriz compleja y se presenta un algoritmo para obtener una representación aproximada en el plano complejo del rango numérico de una matriz compleja. Se muestran algunos ejemplos numéricos y su representación gráfica.

## 1 Introducción

Dada una matriz compleja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y un vector (columna) no nulo  $x \in \mathbb{C}^n$  se define el *cociente de Rayleigh* como el número complejo dado por  $(x^*Ax)/(x^*x)$ , donde  $x^* \in \mathbb{C}^n$  es el vector (fila) transpuesto conjugado de  $x$ . El cociente de Rayleigh es utilizado, por ejemplo, para acelerar el método de las potencias para el cálculo numérico de los autovalores de una matriz, ver [3, 8]. Si el vector  $x$  tiene norma 1, es decir  $\|x\| = \sqrt{x^*x} = 1$ , se dice que  $x$  es un *vector unitario*. En el caso particular que  $x$  es un vector unitario el cociente de Rayleigh resulta  $x^*Ax$ .

Ahora bien, una vez definido el cociente de Rayleigh para una matriz  $A$ , estamos interesados en calcular los cocientes de Rayleigh para todos los vectores complejos unitarios. Así, tenemos la siguiente definición

**Definición 1** *El rango numérico o campo de valores de una matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es el conjunto dado por*

$$W(A) = \{x^*Ax : \|x\| = 1\},$$

es decir, el conjunto de todos los números complejos  $(x^*Ax)$  para todo vector unitario  $x \in \mathbb{C}^n$ .

Es fácil ver que  $W(A)$  es un conjunto compacto. Además, cuando  $A$  pertenece a un espacio de dimensión finita (como en este caso), se puede probar que  $W(A)$  es cerrado. Notar que si  $A = I$ , la matriz identidad, entonces  $W(I) = \{1\}$ .

El rango numérico de una matriz se relaciona con diferentes áreas de matemática pura y aplicada tales como teoría de operadores, análisis funcional, álgebras de Banach, normas matriciales y de operadores, análisis numérico, teoría de perturbaciones, polinomios matriciales, así también como en física

cuántica y otras disciplinas aplicadas ([4, 5]). Por otro lado, diferentes áreas de matemática tales como álgebra, análisis, geometría, combinatoria, análisis numérico y álgebra lineal numérica son de gran utilidad para su estudio. De allí que el rango numérico de una matriz compleja resulta tan atractivo para muchos investigadores.

En este trabajo estudiaremos algunos resultados importantes acerca del rango numérico de  $A$ . Posteriormente y usando propiedades de la matriz  $A$  caracterizaremos este conjunto. Estudiaremos algunos casos simples y para el caso general presentaremos un algoritmo para calcular una representación del rango numérico de  $A$  en el plano complejo.

## 2 Algunos resultados teóricos y propiedades

Veremos ahora algunas propiedades y consecuencias inmediatas de la definición.

**Proposición 1** *Si  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$ , entonces:*

1.  $W(A)$  es invariante por similitudes unitarias, es decir,  $W(U^*AU) = W(A)$  para toda matriz  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tal que  $U^*U = I$ .
2.  $W(\alpha A) = \alpha W(A)$ .
3.  $W(A + B) \subseteq W(A) + W(B)$ .
4.  $W(A + \alpha I) = W(A) + \alpha$ .
5. Sea  $\sigma(A)$  el conjunto de todos los autovalores de  $A$ . Entonces  $\sigma(A) \subseteq W(A)$ .

**Demostración:**

1. Sea  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz unitaria ( $U^*U = I$ ), entonces:

$$\begin{aligned} W(U^*AU) &= \{x^*(U^*AU)x : x^*x = 1\} \\ &= \{(Ux)^*A(Ux) : x^*x = 1\} \\ &= \{(Ux)^*A(Ux) : x^*U^*Ux = 1\} \\ &= \{(Ux)^*A(Ux) : (Ux)^*(Ux) = 1\} \\ &= \{y^*Ay : y^*y = 1\}, \text{ donde } y = Ux. \end{aligned}$$

2.  $W(\alpha A) = \{x^*(\alpha A)x : x^*x = 1\} = \{\alpha(x^*Ax) : x^*x = 1\} = \alpha W(A)$ .

3. Sea  $x \in \mathbb{C}^n$  tal que  $x^*x = 1$ , entonces  $x^*(A + B)x = x^*Ax + x^*Bx = y_1 + y_2$ , con  $y_1 \in W(A)$  y  $y_2 \in W(B)$ . Luego  $(A + B) \subseteq W(A) + W(B)$ .
4. Como  $x^*(A + \alpha I)x = x^*Ax + \alpha x^*x = x^*Ax + \alpha$ , entonces  $W(A + \alpha I) = W(A) + \alpha$ .
5. sea  $\lambda \in \sigma(A)$ , entonces existe un vector no nulo  $x \in \mathbb{C}^n$  tal que  $x^*x = 1$  y  $Ax = \lambda x$ . Luego  $x^*Ax = x^*\lambda x = \lambda x^*x = \lambda$  y por lo tanto  $\lambda \in W(A)$  para todo  $\lambda \in \sigma(A)$ , en consecuencia  $W(A) \supseteq \sigma(A)$ . ■

Recordemos que un conjunto  $S$  es convexo si el segmento que une todo par de puntos de  $S$  está contenido en  $S$ , esto es, si  $x, y \in S$  entonces  $(\alpha x + (1 - \alpha)y) \in S$  para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Dado un conjunto  $S$ , denotamos como  $\text{conv}(S)$  a la cápsula convexa de  $S$ , es decir, a la intersección de todos los convexos que lo contienen.

El siguiente resultado, conocido como el teorema de Toeplitz-Hausdorff, será de fundamental importancia para lo que veremos posteriormente.

**Teorema 1 (Toeplitz-Hausdorff).** *Dada una matriz compleja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , el rango numérico de  $A$  es un subconjunto convexo del plano complejo  $\mathbb{C}$ .*

Una prueba puede verse en [2]. Para demostrarlo se utiliza inducción sobre la dimensión. El caso  $n = 1$  es trivial y el caso  $n = 2$  se prueba separadamente. El pasaje inductivo de  $n - 1$  a  $n$  se prueba para  $n \geq 3$ .

Sean  $H_1$  y  $H_2$  dos subespacios lineales ortogonales de  $\mathbb{C}^n$  tales que  $\mathbb{C}^n = H_1 \oplus H_2$ , donde el símbolo  $\oplus$  denominado *suma directa* significa que  $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ . Sean  $A : H_1 \rightarrow H_1$  y  $B : H_2 \rightarrow H_2$  dos operadores lineales y definimos por  $C = A \oplus B$  al operador lineal de  $\mathbb{C}^n$  dado por  $C(h_1 + h_2) = Ah_1 + Bh_2$ , donde  $h_1 \in H_1$ ,  $h_2 \in H_2$ .

Como consecuencia del teorema anterior, veremos a continuación dos corolarios que se deducen del mismo.

**Corolario 1** *Si  $A$  y  $B$  son matrices complejas, entonces:*

1.  $\text{conv}(\sigma(A)) \subseteq W(A)$ ,
2.  $W(A \oplus B) = \text{conv}(W(A) \cup W(B))$ .

**Demostración:**

1. como  $W(A)$  es convexo y  $\sigma(A) \subseteq W(A)$  entonces  $\text{conv}(\sigma(A)) \subseteq W(A)$ .

2. Consideramos  $\mathbb{C}^n = H_1 \oplus H_2$ ,  $A : H_1 \rightarrow H_1$  y  $B : H_2 \rightarrow H_2$ , y sea  $C = A \oplus B$ . Es claro que  $W(A) \subseteq W(C)$  y  $W(B) \subseteq W(C)$ . Luego, como  $W(C)$  es convexo y como  $W(C) \supseteq (W(A) \cup W(B))$  entonces  $W(C) \supseteq \text{conv}(W(A) \cup W(B))$ .

Para probar la otra contención, sea  $x \in \mathbb{C}^n$ , un vector unitario, y  $x_1 \in H_1$ ,  $x_2 \in H_2$  tales que  $x = x_1 + x_2$ . Entonces  $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = 1$ . Sean

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \in H_1 \quad y_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|} \in H_2,$$

entonces:

$$\begin{aligned} x^*Cx &= (x_1^* + x_2^*)(A \oplus B)(x_1 + x_2) \\ &= x_1^*Ax_1 + x_2^*Bx_2 \\ &= \|x_1\|^2 y_1^*Ay_1 + \|x_2\|^2 y_2^*By_2 \\ &= \alpha(y_1^*Ay_1) + (1 - \alpha)(y_2^*By_2), \end{aligned}$$

lo cual implica que  $x^*Cx \in \text{conv}(W(A) \cup W(B))$  y por lo tanto  $W(C) \subseteq \text{conv}(W(A) \cup W(B))$ .  $\blacksquare$

El siguiente corolario nos dan las primeras caracterizaciones del rango numérico de una matriz  $A$  para dos casos particulares pero muy importantes.

**Corolario 2** *Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Entonces:*

1. *si  $A$  es normal ( $A^*A = AA^*$ ) entonces  $W(A) = \text{conv}(\sigma(A))$ ,*
2. *si  $A$  es hermitiana ( $A^* = A$ ) entonces  $W(A)$  es un segmento contenido en el eje real determinado por el mínimo y el máximo autovalor de  $A$ .*

**Demostración:**

1. como  $A$  es normal entonces es unitariamente similar a una matriz diagonal  $D$  con sus autovalores en la diagonal principal:  $A = U^*DU$ , donde  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  y  $U$  una matriz unitaria. Luego

$$\begin{aligned} W(A) &= W(U^*DU) = W(D) \\ &= W(\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \dots \oplus \lambda_n) \\ &= \text{conv}(W(\lambda_1) \cup W(\lambda_2) \cup \dots \cup W(\lambda_n)) \\ &= \text{conv}(\lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \dots \cup \lambda_n) \\ &= \text{conv}(\sigma(A)), \end{aligned}$$

por lo tanto  $W(A) = \text{conv}(\sigma(A))$ .

- si  $A$  es hermitiana es normal, luego por el item anterior se cumple que  $W(A) = \text{conv}(\sigma(A))$ . Ahora bien, los autovalores de una matriz hermitiana son todos reales, por lo tanto  $W(A)$  será un segmento contenido en el eje real que los contiene a todos. Mas aún,  $W(A) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ , donde  $\lambda_{\min}$  y  $\lambda_{\max}$  corresponden al menor y mayor autovalor de  $A$ , respectivamente. ■

También es posible caracterizar el rango numérico para el caso general de matrices complejas  $2 \times 2$ , triangulares superiores. En este caso, si la matriz está dada por  $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ , entonces  $W(A)$  es la región cerrada y acotada cuyo

borde es la elipse con focos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  y semieje menor igual a  $\frac{|\alpha|}{2}$ .

Una demostración de este resultado puede consultarse en [2].

De este modo, ahora tenemos caracterizadas a todas las matrices en  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ , ya que el teorema de Schur nos dice que toda matriz  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  es unitariamente similar a una matriz triangular superior y como  $W(A)$  es invariante bajo este tipo de transformaciones, será suficiente determinar el campo de valores para la matriz triangular superior.

Antes de considerar el caso general veremos algunos ejemplos simples.

## 2.1 Ejemplos

- Sea  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Aplicando el resultado anterior tenemos que  $W(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/2\}$ .

Observar que  $\sigma(A) = \{0\}$ . Ver Fig. 1.

- Sea  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Es fácil ver que  $\sigma(B) = \{0, 1\}$ . También por el resultado anterior, el rango numérico  $W(A)$  es la región cerrada y acotada cuyo borde es la elipse con focos  $F_1 = (0, 0)$  y  $F_2 = (1, 0)$  y semieje menor  $1/2$ . Para determinar la ecuación de la elipse notemos que el centro de la elipse es  $(x_0, y_0) = (F_1 + F_2)/2 = (1/2, 0)$ . Así tenemos que:

$$\frac{(x - 1/2)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

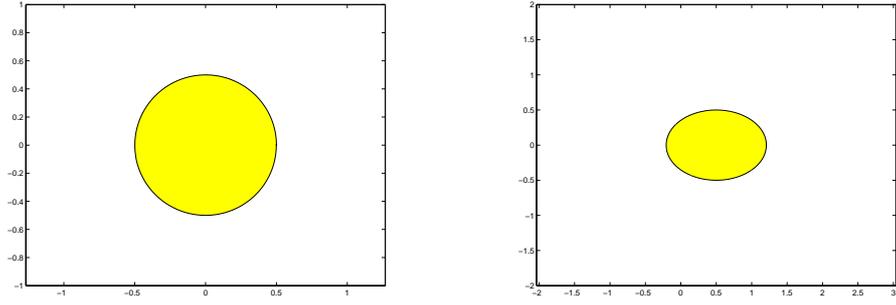


Fig. 1: *Rango numérico de las matrices A y B, respectivamente.*

Como el semieje menor es igual a  $\frac{1}{2}$ , obtenemos  $\frac{(x - 1/2)^2}{a^2} + 4y^2 = 1$ . Finalmente, calculemos  $a$  usando que

$$\begin{aligned} 2a &= \text{dist}(F_1; (x, y)) + \text{dist}(F_2; (x, y)) \\ &= \text{dist}((0, 0); (1/2, 1/2)) + \text{dist}((1, 0); (1/2, 1/2)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

por lo tanto  $a = \sqrt{2}/2$  y entonces,

$$W(B) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2(x - 1/2)^2 + 4y^2 \leq 1 \right\}.$$

Ver Fig. 1.

3. Sea  $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , con  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $|\lambda| = 1$ .

Como  $C$  es normal, pues  $CC^* = C^*C$ , entonces  $W(C) = \text{conv}(\sigma(C))$ . Además  $\sigma(C) = \{t \in \mathbb{C} : t^3 = \lambda\}$ , es decir,  $W(C)$  es un triángulo con vértices en los autovalores de  $C$ . Ver Fig. 2.

4. Sea  $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Definimos  $D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  y  $D_2 = [1]$ .

Luego  $D = D_1 \oplus D_2$ , y

$$\begin{aligned} W(D) &= W(D_1 \oplus D_2) \\ &= \text{conv}(W(D_1) \cup W(D_2)), \end{aligned}$$

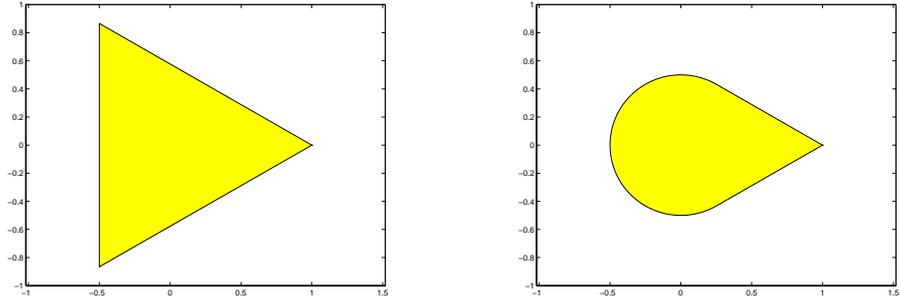


Fig. 2: Rango numérico de las matrices  $C$  y  $D$ , respectivamente.

donde  $W(D_1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1/2\}$  y  $W(D_2) = \{1\}$ . Ver Fig. 2.

### 3 El caso general

El problema de determinar el rango numérico de una matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  no es tarea fácil. Para ello vamos a usar fuertemente la convexidad de  $W(A)$ , algunas propiedades que ya fueron presentadas y otros resultados que vamos a deducir a continuación para determinar puntos del contorno de  $W(A)$ , como así también tangentes al mismo. A partir de estas observaciones vamos a construir un algoritmo que converge al conjunto que se desea determinar, es decir, al rango numérico de  $A$ .

Para cada matriz  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , llamaremos  $H(B) = \frac{1}{2}(B + B^*)$  a la parte hermitiana de  $B$  y  $\lambda_M(H(B)) = \max(\sigma(H(B)))$ .

El primer resultado que usaremos se obtiene de observar lo siguiente:

$$\max_{r \in W(H(A))} r = \max_{\|x\|=1} \frac{(x^*Ax + (x^*Ax)^*)}{2} = \max_{z \in W(A)} \operatorname{Re}(z).$$

Por otra parte, por ser  $H(A)$  hermitiana,  $\max_{r \in W(H(A))} r = \lambda_M(H(A))$ , luego

$$\max_{z \in W(A)} \operatorname{Re}(z) = \lambda_M(H(A))$$

Es decir que el máximo valor de  $\operatorname{Re}(z)$ , para  $z \in W(A)$ , está dado por el mayor autovalor de  $H(A)$ . Se sigue entonces que la recta, paralela al eje imaginario  $y$

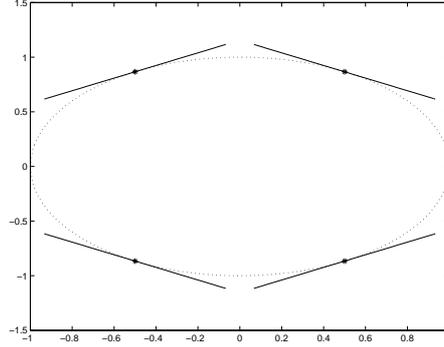


Fig. 3: Rectas tangentes al rango numérico de  $A$ .

y que corta al eje  $x$  en  $\lambda_M(H(A))$ , dada por  $z = \lambda_M(H(A)) + ti$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , delimita tangencialmente a  $W(A)$ .

Notemos además que por la proposición 1, ítem 2 tenemos que,

$$W(A) = e^{-i\theta}W(e^{i\theta}A).$$

Esto muestra que a través de rotaciones será posible obtener otras rectas tangentes a la frontera de  $W(A)$ , considerando el conjunto  $W(e^{i\theta}A)$ . Para determinar  $W(A)$  vamos a usar rotaciones que nos permitan obtener rectas tangentes a este conjunto.

Vemos entonces que el camino a seguir para obtener una buena aproximación al rango numérico, consiste en “encerrar” al conjunto  $W(A)$  determinando sus rectas tangentes. Para esto usaremos una serie de rotaciones que nos permitirán delimitar el conjunto desde distintos ángulos. Ver Fig. 3.

Dado un ángulo  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , definimos  $\lambda_\theta = \lambda_M(H(e^{i\theta}A))$ , y sea  $x_\theta \in \mathbb{C}^n$  un autovector unitario asociado a  $\lambda_\theta$ :

$$H(e^{i\theta}A)x_\theta = \lambda_\theta x_\theta, \quad \text{con } x_\theta^* x_\theta = 1.$$

Sea  $L_\theta = \{e^{-i\theta}(\lambda_\theta + ti) : t \in \mathbb{R}\}$ , la recta que resulta de la rotación, en un ángulo  $-\theta$ , de la recta tangente a  $W(e^{i\theta}A)$ . Notemos que  $W(e^{i\theta}A) = e^{i\theta}W(A)$  que es el rango numérico de  $A$  rotado en un ángulo  $\theta$ .

Sea  $H_\theta = e^{-i\theta}\{c \in \mathbb{C} : \text{Re}(c) \leq \lambda_\theta\}$ , el semiplano determinado por  $L_\theta$ .

Con estas definiciones se puede probar fácilmente que la recta  $L_\theta$  es un hiperplano que limita al conjunto convexo  $W(A)$  y además que  $W(A) \subseteq H_\theta$  para todo  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Necesitamos ahora determinar el punto de tangencia de la recta  $L_\theta$  con el conjunto  $W(A)$ . El próximo resultado nos da información acerca de este punto.

**Teorema 2** *El número complejo  $p_\theta = x_\theta^*Ax_\theta$  es un punto de la frontera de  $W(A)$  y además  $p_\theta \in L_\theta \cap W(A)$ , es decir,  $L_\theta$  es una recta tangente a  $W(A)$  que pasa por el punto  $p_\theta$ .*

**Demostración:**

Es claro que  $p_\theta = x_\theta^*Ax_\theta \in W(A)$ . Veamos que  $p_\theta = x_\theta^*Ax_\theta \in L_\theta$ .

$$\begin{aligned}\lambda_\theta &= x_\theta^*H(e^{i\theta}A)x_\theta = \frac{1}{2} \left[ x_\theta^*(e^{i\theta}A)x_\theta + x_\theta^*(e^{i\theta}A)^*x_\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ e^{i\theta}(x_\theta^*Ax_\theta) + e^{-i\theta}(x_\theta^*Ax_\theta)^* \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ e^{i\theta}p_\theta + (e^{i\theta}p_\theta)^* \right] \\ &= \operatorname{Re}(e^{i\theta}p_\theta)\end{aligned}$$

entonces  $e^{i\theta}p_\theta = \lambda_\theta + ki$  con  $k \in \mathbb{R}$ . Así  $p_\theta = e^{-i\theta}\lambda_\theta + ti$  con  $t \in \mathbb{R}$ . Luego  $p_\theta \in L_\theta$  y entonces  $p_\theta \in L_\theta \cap W(A)$ .  $\blacksquare$

El siguiente resultado nos da una representación del rango numérico de una matriz  $A$  en términos de los puntos  $p_\theta$ .

**Teorema 3** *Para toda matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  se cumple que*

$$\operatorname{conv}\{p_\theta, 0 \leq \theta < 2\pi\} = W(A) = \bigcap_{0 \leq \theta < 2\pi} H_\theta.$$

## 4 Algoritmo

A fin de construir un algoritmo que determine una aproximación de  $W(A)$  será necesario realizar una *discretización* del teorema anterior. Debido a esta discretización perderemos las igualdades y en su lugar tendremos contenciones. Ver [6].

Sea  $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$  con  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_k < 2\pi$  una partición del intervalo  $[0, 2\pi)$ .

Definimos

$$\begin{aligned}F_{\text{int}}(A, \theta) &= \operatorname{conv}\{p_{\theta_1}, p_{\theta_2}, \dots, p_{\theta_k}\} \\ F_{\text{ext}}(A, \theta) &= \bigcap_{1 \leq j \leq k} H_{\theta_j}\end{aligned}$$

Ahora, la versión discreta del teorema anterior resulta:

**Teorema 4** *Para toda matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  se cumple que  $F_{\text{int}}(A, \theta) \subseteq W(A) \subseteq F_{\text{ext}}(A, \theta)$ .*

Es decir que con  $F_{\text{int}}(A, \theta)$  aproximamos a  $W(A)$  desde el interior, entanto que con  $F_{\text{ext}}(A, \theta)$  lo hacemos desde el exterior al conjunto.

Denotamos por  $q_{\theta_j}$  a la intersección de  $L_{\theta_j}$  con  $L_{\theta_{j+1}}$ , para  $j = 1, 2, \dots, k$ . (Identificamos  $k + 1$  con 1).

Tenemos entonces la siguiente representación alternativa y más simple para  $F_{\text{ext}}(A, \theta)$ :

$$F_{\text{ext}}(A, \theta) = \bigcap_{1 \leq j \leq k} H_{\theta_j} = \text{conv}\{q_{\theta_1}, \dots, q_{\theta_k}\}.$$

Luego, es claro que la frontera de  $F_{\text{int}}(A, \theta)$  es la unión de los segmentos  $[p_{\theta_1}, p_{\theta_2}], \dots, [p_{\theta_k}, p_{\theta_1}]$  mientras que la de  $F_{\text{ext}}(A, \theta)$  es la unión de los segmentos  $[q_{\theta_1}, q_{\theta_2}], \dots, [q_{\theta_k}, q_{\theta_1}]$ .

Para poder implementar el algoritmo necesitaremos una expresión explícita de los puntos  $q_{\theta_j}$ . Para esto, consideremos  $q_{\theta_j} \in L_{q_{\theta_j}} \cap L_{q_{\theta_{j+1}}}$ . Entonces,

$$q_{\theta_j} = e^{-i\theta_j}(\lambda_{\theta_j} + ti) = e^{-i\theta_{j+1}}(\lambda_{\theta_{j+1}} + ki),$$

lo que implica que

$$(\cos \theta_j - i \text{sen} \theta_j)(\lambda_{\theta_j} + ti) = (\cos \theta_{j+1} - i \text{sen} \theta_{j+1})(\lambda_{\theta_{j+1}} + ki).$$

Igualando parte real e imaginaria obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda_{\theta_j} \cos \theta_j + t \text{sen} \theta_j &= \lambda_{\theta_{j+1}} \cos \theta_{j+1} + k \text{sen} \theta_{j+1} \\ t \cos \theta_j - \lambda_{\theta_j} \text{sen} \theta_j &= k \cos \theta_{j+1} - \lambda_{\theta_{j+1}} \text{sen} \theta_{j+1}. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por  $\cos \theta_{j+1}$ , la segunda por  $\text{sen} \theta_{j+1}$  y restándolas, obtenemos:

$$\lambda_{\theta_j} (\cos \theta_{j+1} \cos \theta_j + \text{sen} \theta_j \text{sen} \theta_{j+1}) + t (\text{sen} \theta_j \cos \theta_{j+1} - \text{sen} \theta_{j+1} \cos \theta_j) = \lambda_{\theta_{j+1}}.$$

Sea  $\delta_j = \theta_{j+1} - \theta_j$ , entonces

$$t = \frac{(\lambda_{\theta_j} \cos \delta_j - \lambda_{\theta_{j+1}})}{\text{sen} \delta_j},$$

y por lo tanto

$$q_{\theta_j} = e^{-i\theta_j} \left( \lambda_{\theta_j} + \frac{\lambda_{\theta_j} \cos \delta_j - \lambda_{\theta_{j+1}}}{\operatorname{sen} \delta_j} i \right).$$

Ver Figura 3.

Finalmente, para decidir el criterio de parada del algoritmo necesitaremos de las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{ext}}(A, \theta) &= \text{Área de } F_{\text{ext}}(A, \theta) \\ \Delta_{\text{int}}(A, \theta) &= \text{Área de } F_{\text{int}}(A, \theta) \\ \Delta(A, \theta) &= (\Delta_{\text{ext}}(A, \theta) - \Delta_{\text{int}}(A, \theta)) / \Delta_{\text{ext}}(A, \theta). \end{aligned}$$

Así,  $\Delta(A, \theta)$  mide el error relativo de la aproximación de  $W(A)$ , es decir, que la aproximación será “buena” cuando  $\Delta(A, \theta)$  tienda a 0.

Por lo tanto, será necesario disponer de una fórmula para calcular el área de un polígono con vértices conocidos. Esto se obtiene fácilmente subdividiendo el polígono en triángulos, calculando el área de cada uno de ellos y sumándolas.

Si  $T$  es un triángulo en el plano complejo con vértices  $c_1 = a + ib$ ,  $c_2 = c + id$  y el origen, entonces

$$\begin{aligned} \text{Área}(T) &= \frac{1}{2} |c_1 \times c_2| = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (ad - bc) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{c}_1 c_2) \end{aligned}$$

Ahora bien, si  $P$  es un polígono en el plano complejo con vértices  $c_1, c_2, \dots, c_k$  ordenados en sentido antihorario (en sentido contrario a las agujas del reloj), entonces

$$\text{Área}(P) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{c}_1 c_2 + \bar{c}_2 c_3 + \dots + \bar{c}_k c_1).$$

Con estas ideas podemos formular un algoritmo que, dada una tolerancia  $\delta$ , determine el rango numérico  $W(A)$  con un error de aproximación menor que  $\delta$ .

## 4.1 Algoritmo

Dada  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , y una tolerancia  $\delta > 0$ ,

**PASO 1** Verificar si  $A$  es hermitiana.

Si lo es, calcular el menor y el mayor autovalor de  $A$ .  $W(A)$  es el segmento que los une (en la recta real).

Si no, continúe.

**PASO 2** Verificar si  $A$  es normal.

Si lo es, calcular todos sus autovalores.  $W(A)$  es su cápsula convexa.

Si  $A$  no es normal, continúe.

**PASO 3** Tomar la partición  $\theta_j = (j-1)\frac{2\pi}{k}, j = 1, \dots, k$ , con  $k \geq 3$ . Para cada  $\theta_j$  construir  $H(e^{i\theta_j}A)$  y calcular  $\lambda_{\theta_j}$  el máximo autovalor y  $x_{\theta_j}$  su respectivo autovector unitario correspondiente.

**PASO 4** Calcular  $p_{\theta_j} = x_{\theta_j}^* A x_{\theta_j}$  y  $q_{\theta_j} = e^{-i\theta_j} \left( \lambda_{\theta_j} + \frac{\lambda_{\theta_j} \cos \delta_j - \lambda_{\theta_{j+1}}}{\sin \delta_j} i \right)$ , para cada  $j = 1, 2, \dots, k$ .

**PASO 5** Calcular  $\Delta = \Delta(A, \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\})$ .

Si  $\Delta < \delta$ , pasar al PASO 6,

sino reemplazar  $k$  por  $2k$  y volver al PASO 3. En ese paso deberán efectuarse sólo  $k$  nuevos cálculos.

**PASO 6** Graficar  $F_k(A) = F_{\text{int}}(A, \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\})$  como una aproximación a  $W(A)$ . La frontera de  $F_k(A)$  es la unión de los segmentos que unen  $p_{\theta_j}$  con  $p_{\theta_{j+1}}$ .

Observemos que la cantidad de trabajo computacional necesario para determinar  $W(A)$  a través de este algoritmo depende principalmente de la forma que tiene  $W(A)$  más que de la dimensión  $n$  de la matriz  $A$ . Para el caso general, el costo computacional dependerá del costo de resolver el problema del autovalor-autovector para la matriz hermitiana  $H(e^{i\theta}A)$ , es decir, de  $\mathcal{O}(n^3)$  (Ver [8]). Por lo tanto el costo computacional total será del orden  $\mathcal{O}(cn^3)$ , donde la constante  $c$  dependerá del número de puntos de la partición que sean necesarios para obtener la precisión deseada.

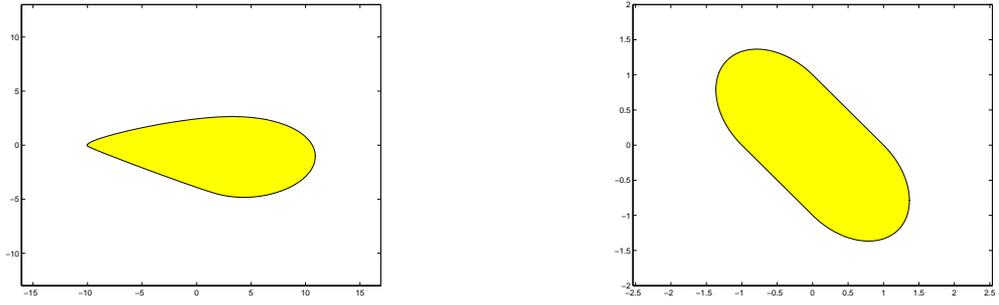


Fig. 4: Rango numérico de las matrices  $A_1$  y  $A_2$ .

## 5 Ejemplos numéricos

Para el Algoritmo anterior realizamos una implementación en MATLAB. (El lector interesado en tal implementación puede solicitarla a los autores, vía correo electrónico).

A continuación, presentamos algunos ejemplos de representación gráfica del rango numérico (Fig. 4 y Fig. 5) de las siguientes matrices, obtenidos usando la implementación en MATLAB:

$$\text{a) } A_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & -i & 0 \\ 1 & -3i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 1 \\ 3 & -5i & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & i \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -i & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & i & 0 & -2 \\ 2i & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4i \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } A_4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 10 & 0 & 1 & 5i \\ 15 & 0.5 & 0.4 & 1 & -i \\ 0 & -i/2 & 0 & 22 & -1 \\ i & 0.1 & 0 & 2.5 & 1 \\ 1 & 12 & 1 & 2/i & 0 \end{bmatrix}$$

## 6 Algunos comentarios finales

Otro concepto directamente relacionado al rango numérico de una matriz compleja  $A$  es el *radio numérico* definido por

$$r(A) = \max\{|z| : z \in W(A)\}.$$

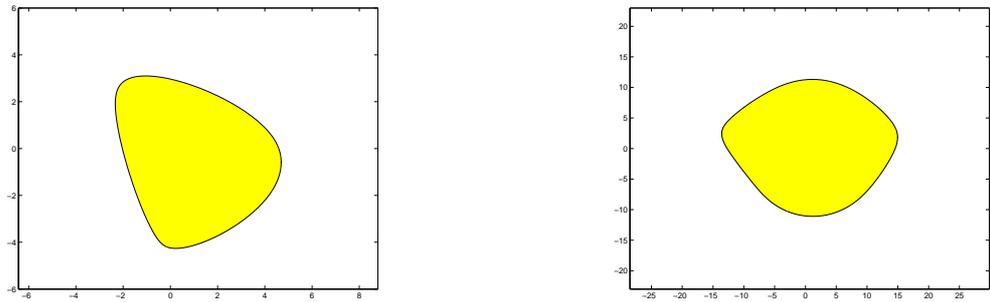


Fig. 5: Rango numérico de las matrices  $A_3$  y  $A_4$ .

Es decir  $r(A)$  es el radio del menor círculo centrado en el origen que contiene a  $W(A)$ . Interesantes propiedades algebraicas pueden ser probadas para el radio numérico. Ver [1, 7]. Además, el mismo aparece vinculado al estudio de matrices espectrales y, por lo tanto, en problemas de estabilidad relacionado a esquemas de diferencias finitas, donde la acotación uniforme de la norma de  $A^k$  desempeña un rol central.

En los últimos años la cantidad de trabajos relacionados con el rango y el radio numérico se incrementado notablemente, en particular en la década de los noventa. En 1991 se presentaron 11 trabajos en la IV Conferencia sobre Álgebra Lineal Aplicada de la SIAM, y en 1992 se realizó el I Workshop sobre el rango y el radio numérico de matrices complejas en Williamsburg (USA) con la presentación de 22 trabajos. Este Workshop continúa organizándose cada dos años (Portugal, Japón, Grecia, etc.).

Desde el punto de vista numérico como vimos en la sección anterior, el costo computacional se debe principalmente al cálculo de los autovalores–autovectores de algunas matrices hermitianas. Este es un problema caro computacionalmente y se necesitan métodos numéricos eficientes para resolverlo. En nuestra implementación usamos comandos de MATLAB para calcular esos autovalores–autovectores, esto es posible pues consideramos matrices de orden pequeño. Si las matrices son de orden grande, lo cual es frecuente en aplicaciones de problemas de la vida real, el problema podría ser inviable de resolver con métodos numéricos clásicos (problemas pequeños). De allí que sea necesario e importante también estudiar métodos numéricos que puedan aprovechar al máximo

la estructura de la matriz para controlar el costo computacional del cálculo del rango numérico de una matriz.

## Bibliografía

- [1] F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges, Vol. II*, Cambridge University Press, 1973.
- [2] Goldman and Marcus, Convexity of the field of a Linear transformation, *Canadian Mathematics Bulletin*, Vol. 2, N. 1, pag. 15–18, 1959.
- [3] G. Golub and C. Van Loan, *Matrix Computations*, tercera edición, The John Hopkins University Press, 1991.
- [4] K. E. Gustafson and D. K. M. Rao, *Numerical Range: The Field of Values of Linear Operators and Matrices*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [5] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [6] C. R. Johnson (1978), Numerical location of the fields of values, *Linear and Multilinear Algebra*, 3, pp. 9–14.
- [7] J. Sun and G. Stewart, *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, 1990.
- [8] D. Watkins, *Fundamental on Matrix Computations*, John Wiley & Sons, 1991.

Ana Gabriela Martínez  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC)  
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)  
CP 6065, 13081-970 Campinas, SP, Brasil.  
(Email: gabrik@ime.unicamp.br)

Elvio A. Pilotta  
Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF) – CIEM (CONICET)  
Universidad Nacional de Córdoba  
Ciudad Universitaria (5000) Córdoba, Argentina.  
(Email: pilotta@mate.uncor.edu)