

LENGUAJE ALGEBRAICO Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN LA ESCUELA SECUNDARIA

DIANA CECILIA POZAS

Departamento de Matemática - Universidad Nacional del Comahue

Quintral 1250

(8400) San Carlos de Bariloche - Argentina

E-mail: dpozas@crub.uncoma.edu.ar

RESUMEN

El objetivo del trabajo fue describir las habilidades algebraicas manifestadas por alumnos de 16 a 18 años de edad en la resolución de ecuaciones lineales, como así también en la interpretación gráfica de sistemas de ecuaciones. Se diseñó una encuesta que fue respondida por 120 alumnos pertenecientes a dos escuelas secundarias de San Carlos de Bariloche, provincia de Río Negro. Para el análisis de los datos se aplicó un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples, y luego una Clasificación Jerárquica Ascendente.

Los resultados obtenidos indicarían que los alumnos pueden realizar una correcta resolución algebraica de ecuaciones lineales con una incógnita pero no de ecuaciones de sistemas lineales. Asimismo, presentan dificultades para plantear ecuaciones a partir de un problema algebraico verbal.

INTRODUCCIÓN

Este estudio forma parte de una investigación más amplia que se está desarrollando en el Centro Regional Universitario Bariloche – Universidad Nacional del Comahue. Uno de los objetivos es abordar la intervención docente en relación a la enseñanza del lenguaje matemático, analizando las diferentes propuestas didácticas en el aula para su construcción. Entendemos que el lenguaje se manifiesta como un instrumento esencial en la formación de conceptos y procedimientos matemáticos. Éste no sólo cumple la función comunicativa cuya única finalidad es llevar a buen término el entendimiento entre profesor y alumno, sino que debe pensarse como un entorno de análisis y optimización de la actividad matemática.

La presentación final de la matemática como un lenguaje autosuficiente y formal es la que generalmente se trató de comunicar a los estudiantes mediante la enseñanza escolar, generando una profunda crisis en este nivel. Actualmente se cuenta con numerosos trabajos de investigación en los cuales se trata de clarificar la naturaleza del lenguaje matemático y los pormenores de su apropiación (Rojano, 1994). La tendencia a presentar el álgebra escolar como una especie de lenguaje algebraico se refleja en el peso excesivo que se otorga a las actividades algebraicas formales en detrimento de las funcionales; o en la presentación del

álgebra en continuidad muy privilegiada y casi exclusiva al marco aritmético de referencia en detrimento del marco geométrico (Gascón, 1999).

Efectivamente, en nuestra experiencia docente hemos visto que las actividades de álgebra que se proponen en el aula de la escuela secundaria requieren en su gran mayoría de la manipulación formal de las expresiones algebraicas en las cuales las letras, o bien son incógnitas específicas, o bien son variables de una función. Por esta razón se realizó un estudio exploratorio para describir las habilidades algebraicas manifestadas por alumnos de 16 a 18 años de edad en la resolución de ecuaciones lineales, como así también en la interpretación gráfica de sistemas de ecuaciones. En este trabajo se partió de datos obtenidos a partir de encuestas. Para el análisis de los mismos se aplicó un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples, y luego una Clasificación sobre las coordenadas factoriales. El AFCM es una técnica exploratoria multivariada que permite obtener una visión gráfica, más comprensiva y global de las relaciones entre las dimensiones observadas a través de las encuestas.

Los resultados obtenidos indicarían que los estudiantes encuestados pueden manipular formalmente una ecuación lineal con una incógnita, aunque limitados por dificultades en las operaciones con números fraccionarios. También manifiestan dificultades para relacionar sistemas de ecuaciones lineales con gráficas de funciones lineales. Ante un tema tan general como lo es el lenguaje algebraico, se pretende visualizar ejes o temas sobre los cuales indagar en profundidad. Asimismo, la tipología obtenida en la clasificación proporcionó información valiosa para seleccionar casos a estudiar.

METODOLOGÍA

Se elaboró una encuesta (ver Anexo 1) que involucró tres tipos de ejercicios: a) resolver dos ecuaciones con su respectiva verificación; b) resolver un problema verbal, y c) relacionar tres sistemas de ecuaciones con su respectiva gráfica indicando el número de soluciones encontradas. Dicha encuesta fue respondida por 120 alumnos pertenecientes a dos escuelas secundarias de San Carlos de Bariloche. Los alumnos, cuyas edades oscilan entre 16 y 18 años, se encuentran cursando los dos últimos años de la escuela secundaria. El procesamiento y análisis de la información recogida se realizó a través de los métodos exploratorios multidimensionales. Se empleó la técnica de análisis factorial de correspondencias múltiples (Benzécri, 1973). Esta técnica es especialmente adecuada para el tratamiento de datos de encuestas ya que permite el análisis de variables cualitativas y sus respectivas modalidades en forma simultánea, en especial, a través del recurso de representaciones gráficas en planos factoriales.

Las variables consideradas fueron una construcción a posteriori de la realización de las encuestas. Se definieron tres variables nominales con sus respectivas modalidades, las cuales se presentan en la siguiente tabla:

Variables Nominales	Modalidades	Identificación en los planos factoriales
a) Resolución de ecuaciones de primer grado	Resuelve ecuaciones correctamente Resuelve correctamente usando calculadora No opera con fracciones	REC RCC NoOF
b) Resolución de problemas	Planteo y resolución correcta Resolución correcta no algebraica Resolución incorrecta No resuelve el problema	RAP RnoAP RIP NoRP
c) Sistemas de ecuaciones de primer grado	Relaciona sistemas con gráficas y justifica Relaciona sistemas con gráficas sin justificar Relaciona sistemas con gráficas incorrectamente No contesta	RSGyJ RSGNoJ RSGI NoRSG

En el punto 1 de la encuesta se observaron tres situaciones claramente diferenciadas. Algunos estudiantes no resolvían o resolvían incorrectamente la ecuación a), es decir, la que involucra manejo de fracciones. Por este motivo llamamos a esta modalidad de respuesta NoOF: no opera con fracciones. En numerosos casos, y refiriéndonos a la misma ecuación, se observaron en la resolución números decimales y otros procedimientos los cuales indicaban que las operaciones con fracciones fueron realizadas con calculadora. A esta modalidad la llamamos RCC: resuelve correctamente usando calculadora. En el resto de los casos, se observó un manejo adecuado de las operaciones con fracciones y de las propiedades numéricas manifestado en la correcta resolución de las dos ecuaciones planteadas en el punto 1 de la encuesta. Llamamos a esta modalidad REC: resuelve ecuaciones correctamente.

En el punto 2 de la encuesta se propone un problema, no se pide ningún procedimiento en particular para resolverlo. Se observaron cuatro situaciones. Quienes plantearon una ecuación con una incógnita y la resolvieron correctamente dieron lugar a la modalidad RAP: resolución algebraica del problema. Otros estudiantes no partieron de ninguna ecuación sino que, haciendo dibujos y algunos cálculos lograron responder correctamente al problema. Llamamos a esta modalidad RNoAP: resolución no algebraica del problema. Otros estudiantes plantearon una ecuación incorrecta dando lugar a la modalidad RIP: resolución incorrecta del problema. Y finalmente, el resto no respondió al punto en cuestión. Esta modalidad se denominó NoRP: no resuelve el problema.

El punto 3 de la encuesta persigue el objetivo de indagar acerca de qué manera los estudiantes relacionan sistemas de ecuaciones lineales con gráficas y si justifican de alguna manera su elección. Se observaron cuatro situaciones.

Algunos estudiantes resuelven analíticamente cada sistema y le asignan una gráfica y sólo una. Estos procedimientos dan lugar a la modalidad RSGyJ: relaciona sistemas con gráficas y justifica. Otros estudiantes respondieron asignando correctamente a cada sistema una gráfica, pero sin realizar ningún tipo de justificación. Esta modalidad de respuesta se denominó RSGNoJ. Otros estudiantes respondieron incorrectamente en al menos una asignación, lo cual dio lugar a la modalidad RSGI: relaciona sistemas con gráficas incorrectamente. Y finalmente el resto de los estudiantes no respondieron al punto en cuestión, lo cual corresponde a la modalidad NoRSG.

RESULTADOS

Los datos se analizaron empleando la técnica de Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples, mediante el programa SPAD 3.5. Se observó que los cuatro primeros ejes acumulan el 59,75 % de la inercia, por lo cual se consideraron tres planos factoriales para el análisis de la información. A continuación se presentan los principales planos factoriales considerando como activas a todas las variables nominales:

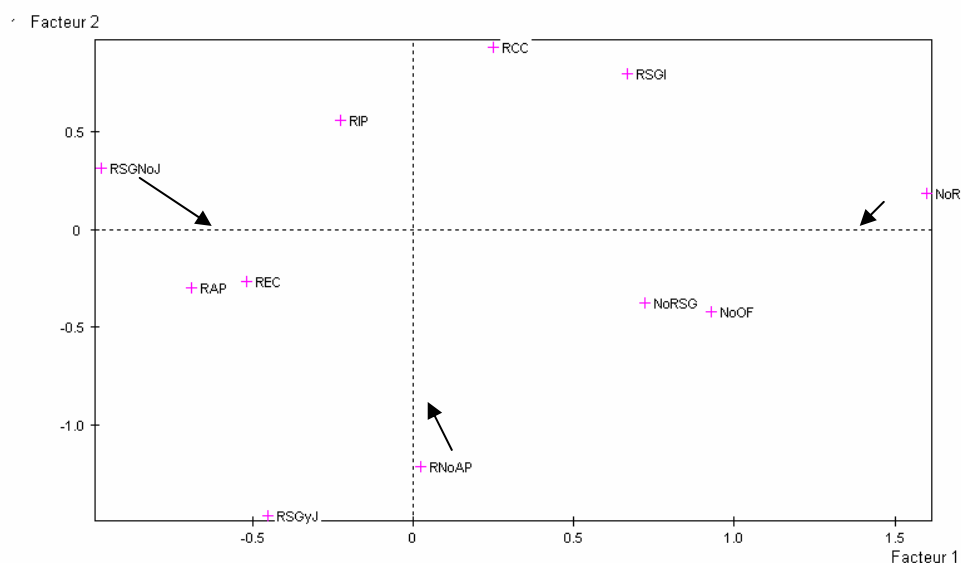


Figura 1. Las etiquetas se corresponden con las modalidades de respuesta. Las flechas indican el eje al cual contribuyen.

El Factor uno, en el eje horizontal, está mayormente conformado por las modalidades RSGNoJ (relaciona sistemas con gráficas, no justifica) y NoRP (no resuelve el problema), ambas con buena calidad de representación. Podríamos decir que el Factor uno separa las modalidades que indican respuesta y ausencia de respuesta. Opone la modalidad que corresponde a quienes no resuelven el problema (NoRP) de quienes resuelven ecuaciones correctamente (REC). También opone la modalidad de quienes relacionan sistemas con gráficas sin

justificar (RSGNoJ) de quienes no contestan (NoRSG) o no resuelven la ecuación que involucra manejo con fracciones (NoOF).

El Factor dos se conforma en torno a la resolución no algebraica del problema (RNoAP) que se opone a la resolución incorrecta del problema (RIP). En este eje también están bien representadas y oponiéndose las modalidades: resolución de ecuaciones usando calculadora (RCC) y relaciona sistemas con gráficas justificando la elección (RSGyJ).

La lectura del primer plano factorial permite reconocer en el semiplano izquierdo las modalidades que caracterizan al buen desempeño en todos los ejercicios de la encuesta; mientras que en el derecho se observan las modalidades que indican resoluciones incorrectas o ausencia de respuestas.

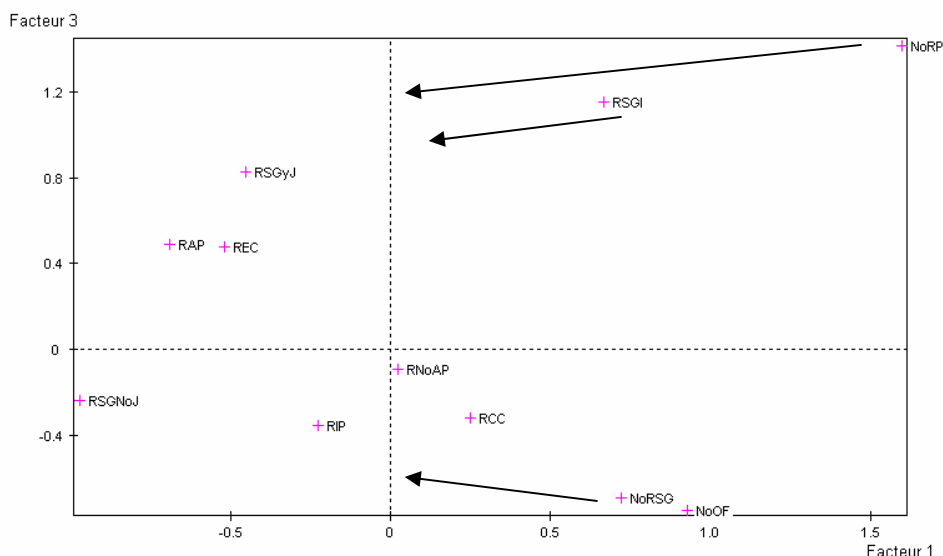


Figura 2. Las etiquetas se corresponden con las modalidades de respuesta. Las flechas indican el eje al cual contribuyen.

A la conformación del tercer eje contribuye principalmente la relación entre sistemas y gráficas realizada incorrectamente (RSGI). También contribuyen las modalidades que indican ausencia de respuesta, esto es, no responder al problema (NoRP) y no relacionar sistemas con gráficas (NoRSG).

En el semiplano izquierdo nuevamente aparecen asociadas las modalidades que indican una correcta resolución de los tres ejercicios de la encuesta (REC, RAP, RSGyJ), mientras que en el derecho, no opera con fracciones (NoOF) se asocia a no relaciona sistemas con gráficas (NoRSG). La modalidad relaciona sistemas con gráficas incorrectamente (RSGI) se asocia con no resolución del problema (NoRP).

CLASIFICACIÓN JERÁRQUICA

Otra técnica del análisis estadístico multidimensional es la denominada “clasificación jerárquica ascendente”. Con el objetivo de escoger en cuántos grupos se podrían clasificar los 120 estudiantes encuestados se realizó una Clasificación. El dendograma se construyó en base a los primeros seis ejes factoriales, los cuales proyectan un 81,95% de la inercia original. Un dendograma jerárquico siempre es “cortado” horizontalmente a una altura conveniente de manera tal que permita la lectura e interpretación de sus ramas. Por lo tanto, para construir una tipología se requiere de la consideración de varias alternativas hasta lograr una que resulte satisfactoria por su coherencia lógica. En este caso se seleccionó una partición en tres clases.

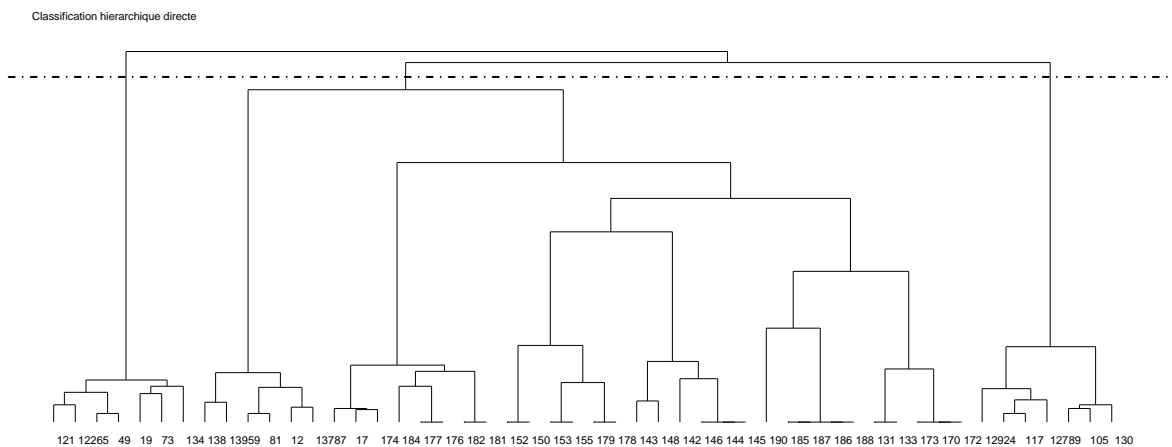


Figura 3. Dendograma jerárquico. La línea horizontal punteada indica la partición del conjunto de 120 individuos en tres clases.

El Cluster o grupo 1 está formado por 11 estudiantes, que representan el 9,17 % de la muestra. Se caracteriza por la modalidad RSGyJ: relacionan sistemas con gráficas y justifican.

El Cluster o grupo 2 está formado por 97 estudiantes, que representan el 80,83 % de la muestra. Se caracteriza por la modalidad RIP: resuelven incorrectamente el problema.

El Cluster o grupo 3 está formado por 12 estudiantes, que representan el 10 % de la muestra. Se caracteriza por la modalidad RAP: resuelven algebraicamente el problema.

En una de las salidas del SPAD se pueden observar tres tablas que muestran las distancias de cada individuo al centro de gravedad de la clase. Podemos decir que la clase 2 es la más “compacta” u homogénea. y la clase 1 es la que presenta las mayores distancias.

DISCUSIÓN

Vimos en el apartado anterior que se seleccionó una partición en tres grupos, la discusión será realizada en relación a esta partición óptima.

El grupo 1 que se caracteriza por la modalidad RSGyJ (relaciona sistemas con gráficas y justifica) es el menos homogéneo de los tres. Los estudiantes de este grupo muestran un correcto manejo en los pasajes de términos. Se observaron distintos métodos de resolución de los sistemas y algunos, además, escribieron el número de soluciones de cada sistema. Estos procedimientos muestran una comprensión acerca de la existencia de solución a un sistema de ecuaciones y su relación con las gráficas de una o dos funciones lineales. Este grupo es el más reducido, apenas representa el 9% de la muestra. Posiblemente, para el resto de los alumnos el trabajo realizado alrededor de “la ecuación de la recta”, parece no ayudarlos para establecer una relación argumentada entre un sistema de ecuaciones y una gráfica.

Un aspecto muy importante para la construcción del lenguaje algebraico es la posibilidad de expresarlo a través del lenguaje del álgebra simbólica. Una vez que se supera esta primera etapa, podría decirse que lo demás es cuestión de aplicar un algoritmo. Sin embargo, las modalidades de respuesta a la resolución del problema fueron decisivas para la conformación de los dos grupos restantes.

El grupo 2 que se caracteriza por la modalidad RIP (resolución incorrecta del problema) presentó el mismo tipo de error en la mayoría de los casos. Dicho error se manifestó en el pasaje al lenguaje algebraico, lo que se denomina “planteamiento del problema”. A modo de ejemplo, se transcribe la ecuación que plantearon varios alumnos:

$$\left(\frac{x}{2}\right):3 = 1600$$

Pareciera que para los alumnos el resultado de esta ecuación era lo suficientemente coherente como para revisar si el planteo guardaba relación con el enunciado del problema. Tampoco se observó ningún tipo de dibujo o esquema que sirviera de soporte para expresar correctamente el problema en símbolos. Al respecto, una representación visual de los objetos a los que se alude en el texto del problema, suele ser de gran ayuda, aún cuando sea muy esquemática. La gran mayoría de los estudiantes que dieron una respuesta correcta, pero no algebraica (modalidad RNoAP) recurrieron a una representación visual en la cual introducían letras para indicar las cantidades desconocidas. En esas representaciones subyace una interpretación algebraica del problema y son indicativas de que hay un pensamiento algebraico.

El grupo 3 que se caracteriza por la modalidad RAP (resolución algebraica del problema) es el que operó con el método que consideramos genuinamente algebraico. Es decir, se identifican las incógnitas mediante letras y se expresan las

relaciones matemáticas mediante ecuaciones. Puede ser de ayuda, aunque no imprescindible, el uso de representaciones visuales.

CONSIDERACIONES FINALES Y PERSPECTIVAS

Un número significativo de estudiantes resuelven ecuaciones por el método formal, es decir, trasponiendo términos de un miembro a otro o aplicando la misma operación en ambos miembros de la ecuación. Decimos entonces que manifiestan un manejo adecuado o formal de las ecuaciones de primer grado, considerando el nivel de escolaridad en que se encuentran. No obstante, el manejo de fracciones pareció ser el “gran obstáculo” a sortear para llegar a la solución correcta en todas las ecuaciones involucradas en la encuesta. Pareciera que para una buena parte de estos alumnos, el álgebra es operar con números y letras, sin otro objetivo que el de obtener valores para las mismas aplicando algoritmos de resolución.

Este estudio preliminar y exploratorio sirvió para comenzar a indagar en al menos dos aspectos de la enseñanza-aprendizaje del lenguaje algebraico. La resolución de problemas verbales puede dar sentido al uso de los símbolos del álgebra, facilita el paso progresivo desde una etapa aritmética hacia una puramente algebraica. En la resolución de problemas algebraicos escolares se han identificado cinco categorías de sistemas de representación (Fernández García, 1997). Desde esta perspectiva sería factible continuar este estudio aplicando un nuevo instrumento con el propósito de analizar los sistemas de representación que utilizan los estudiantes ante determinados problemas algebraicos. Esto serviría para diseñar estrategias didácticas que, respetando los conocimientos previos de los alumnos, apunten progresivamente hacia niveles más abstractos en el uso del simbolismo algebraico.

Por otro lado, y considerando que el tema en cuestión está presente en la currícula de la escuela secundaria desde los primeros años, no puede faltar la mirada sobre las intervenciones docentes cuando se desarrolla este tema en el aula. En el camino hacia un lenguaje de signos abstractos se deben contemplar diversas opciones provenientes de la gran experiencia y conocimientos previos de los alumnos. Es tarea nuestra, de los docentes, descubrir cuáles son los conocimientos algebraicos competentes que manifiestan los estudiantes ante las actividades y consignas que les proponemos.

Agradecimientos:

La autora agradece a la Lic. Romina Cóppola y a la Prof. María Teresa Pietronave, quienes administraron las encuestas en sus respectivos cursos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Benzécri, J. (1973) *L'Analyse des Données*. París: Dunod.

Fernández García, F. (1997) *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis Doctoral. Granada: Departamento Didáctica Matemática. Universidad de Granada.

Gascón, J. (1999) La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática*, Vol 11 (1), 77-88.

Rojano, T. (1994) La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12 (1), 45-56.

Anexo 1 - ENCUESTA

1. Resolver las siguientes ecuaciones y verificar el resultado:

a) $4x - 27 = \frac{-1}{2}x$

b) $2(x + 1) = 4(x - 1)$

Verificación a)

Verificación b)

2. Resuelve el siguiente problema:

De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad total del depósito.

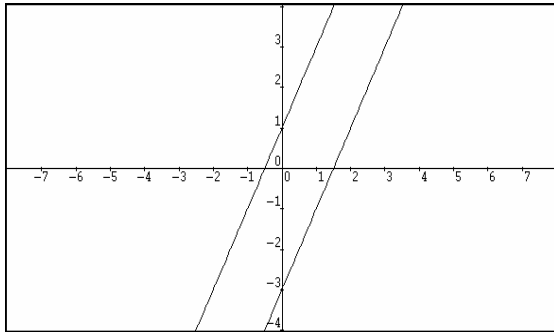
3. Relaciona cada sistema de ecuaciones con la gráfica que corresponda. Indica en cada caso si el sistema tiene una solución, o infinitas soluciones o ninguna solución.

1. $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

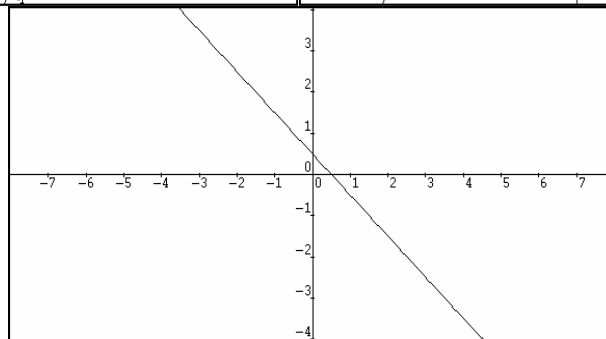
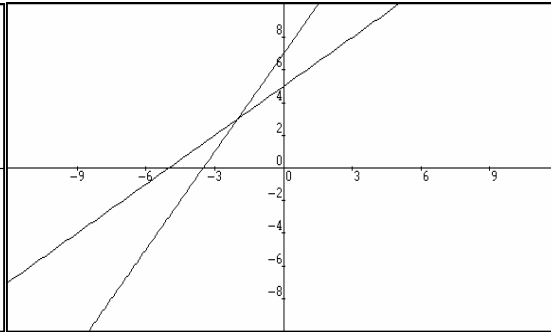
2. $\begin{cases} -x + y = 5 \\ -2x + y = 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y = \frac{1}{2} \\ -2x + 2x = -1 \end{cases}$

A.



B.



C.

¡MUCHAS GRACIAS POR TU COLABORACIÓN!