COMPRENSIÓN DE LOS PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS POR MEDIO DEL USO DE DIVERSOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Marcela Agurto, Caroline Salazar, Luis Zuñiga
Escuela de Pedagogía en Matemática y Estadística Universidad de las Américas. Chile
magurto.aguilera@gmail.com, caroline.salazar4@gmail.com, lzuniga@udla.cl

Resumen

Este trabajo gira alrededor de la problemática que tienen los estudiantes al tratar de utilizar los métodos para encontrar soluciones a las ecuaciones cuadráticas y en la interpretación y uso que dan a estas soluciones. Para salvar este obstáculo se propone una forma de usar la factorización, con el propósito que los alumnos logren observar los valores que serán determinados para las raíces utilizando registro geométrico. Se consideraron aspectos para diseño de secuencia didáctica, que busca que el estudiante tenga la oportunidad de apropiarse del conocimiento. Para lograr este objetivo se propone que el alumno trabaje diferentes contextos.

Introducción

Tomando en cuenta documentos de apoyo relacionados con el tema de este trabajo, se consideraron ciertos aspectos para el diseño de una secuencia didáctica, que busca que el estudiante que la lleve a cabo, tenga la oportunidad de apropiarse del conocimiento. Para lograr este objetivo se propone que el alumno trabaje diferentes contextos: natural, geométrico, algebraico y aplicación. A su vez la estrategia principal es que el conocimiento se obtenga por descubrimiento guiado.

En este sentido se piensa que es importante utilizar diferentes situaciones que involucren este contenido, y creemos que existen diferentes medios para adquirir un conocimiento, también consideramos que involucrar más de uno enriquece el aprendizaje significativo, y aunque el proceso algebraico ha tenido prioridad en los últimos años, es bien sabido que por sí solo no es suficiente, por lo menos a lo que se refiere a la enseñanza-aprendizaje. Claro está, que con esto no se quiere decir que debamos dejar a un lado lo algorítmico, de lo que se trata es que el alumno interactué con los diferentes lenguajes matemáticos, donde nosotros utilizaremos las representaciones semióticas propuestas por Duval (1993), para así darles la oportunidad de formarse criterios y construir su propio sentir matemático. Ante estas situaciones didácticas se espera favorecer el aprendizaje significativo, con el propósito de incidir positivamente en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Concepto

La ecuación cuadrática es una ecuación que contiene el cuadrado de la cantidad desconocida, pero no de mayor potencia, se llama una ecuación cuadrática, o una ecuación de segundo grado. Si la ecuación contiene tanto la plaza y la primera potencia de la incógnita se llama una cuadrática afectada; si contiene sólo el cuadrado de la desconocida que se dice que es una cuadrática pura.

Por lo tanto $2x^2 - 5x = 3$ es una cuadrática afectada y $5x^2 = 20$ es una cuadrática pura. A cuadrática pura puede considerarse como una ecuación sencilla en la que el cuadrado de la cantidad desconocida se encuentra.

Ejemplo. Resuelve $\frac{9}{x^2-27} = \frac{25}{x^2-11}$.

Multiplicando arriba, $9x^2 - 99 = 25x^2 - 675$;

∴ $16x^2 = 576$;

∴ $x^2 = 36$;

Y tomando la raíz cuadrada de estos iguales, tenemos
x = ± 6.

En la extracción de la raíz cuadrada de los dos lados de la ecuación x ^ 2 = 36, podría parecer que debemos anteponer el signo doble de las cantidades en ambos lados, y escribir ± x = ± 6. Pero un examen de los diversos casos hace ver que esto es innecesario. Para ± x = ± 6 da los cuatro casos:
+ x = + 6, + x = -6, -x = + 6, -x = -6,

Y éstos están incluidos en las dos ya dada, a saber x = + 6, x = -6. Por lo tanto, cuando extraemos la raíz cuadrada de los dos lados de una ecuación, es suficiente para poner el signo doble antes de la raíz cuadrada de un lado. De los ejemplos anteriores parece que después de la reducción adecuada y transposición cada ecuación cuadrática puede ser escrita,
$ax^2 + bx + c = 0$,

Donde a, b, c puede tener cualquier valor numérico que sea. Así que, si podemos resolver esta cuadrática podemos resolver cualquiera.
Transposición, $ax^2 + bx = -c$;

Dividiendo por a, $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

Completando la plaza añadiendo a cada lado $(\frac{b}{2a})^2$,
$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$;

Es decir, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$;

Extracción de la raíz cuadrada,

$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$; $x=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$.

Dificultades

En la actualidad persisten las dificultades y errores en el acercamiento y apropiación de los objetos matemáticos en la escuela. Las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas es hoy un foco de estudio e investigación matemática, en el que a pesar de la antigüedad, de los resultados obtenidos y de los esquemas teóricos utilizados para interpretar esos resultados, hay cuestiones importantes aun no resueltas. Algunas de las causas de estas dificultades se debe a la forma de enseñanza tradicional2, donde el profesor presenta un tema, da algunos ejemplos y deja como trabajo la realización de gran cantidad de ejercicios cuyas soluciones son exactamente igual a los ejemplos presentados en clase. Puesto que no hay una conclusión de un saber ligado a la comprensión conceptual y procedimental de los objetos estudiados de esta forma en clase, pues el profesor es el dueño del saber y su trabajo se limita a transmitir conocimiento. En el aprendizaje y estudio del álgebra escolar, donde los objetos matemáticos poseen un carácter de mayor abstracción, se presentan dificultades y errores asociadas a la complejidad de objetos de estudio, estos se presentan en la transición del pensamiento aritmético al algebraico, en los cuales se destacan:

- Una de estas características, planteada por Cardano, se refiere a la relación que existe entre los coeficientes y las raíces de una ecuación. Esta es una característica la cual tiene poco desarrollo en la clase de álgebra y tampoco es identificada por el estudiante, pues se le dificulta comprender que las raíces de una ecuación son el resultado de la manipulación de sus coeficientes. Por ejemplo en la expresión $x^2+6\,x+\,5$, para encontrar las raíces el estudiante, en su proceso de factorización, busca dos números tales que sumados den 6 y multiplicados den 5. Por lo cual escribe $(x+5)*(x+1)$, donde es fácil notar que $x=-1\;o\;x=-5$. Para que el estudiante pueda hallar estos valores tuvo que haber realizado una manipulación de coeficientes y posteriormente encontrar las soluciones para la ecuación.
- El error que observamos consiste en la sustitución simultánea de la incógnita por dos valores distintos, al verificar una ecuación como la señalada más arriba. Por ejemplo, si el alumno sabe que las raíces de la ecuación $(x+5)*(x+1)=0$ son $-1\;y-5$ verifican incorrectamente así: $(-5+5)*(-1+1)=0$ deducen que $0*0=0$, cosa que no le permite autodetectar su error. Acerca de este error que observamos, formulamos posibles razones.

1. La aplicación de la propiedad para resolver la ecuación podría estar incidiendo, pues muchos estudiantes podrían ver que la ecuación dada se “fragmenta” en dos de primer grado y el estudiante verifican como si fueran dos ecuaciones de primer grado y no una de segundo grado.
2. Podría tratarse de un error de tipo lógico. El estudiante podría estar pensando que como la ecuación tiene dos raíces, las dos deben estar presentes en la expresión al momento de la verificación. Por ejemplo, la ecuación tiene raíces $-5\;y-1$ entra en

conflicto con $x = -1$ y $x = -5$ que es la lógica que soporta la expresión algebraica en la que trabajamos.

3. Si bien los estudiantes explicitan que para que un producto sea cero uno u otro de los factores debe ser cero, parecería existir la creencia de que ambos factores deben ser ceros.

Secuencia Didáctica

Inicio:

Se realiza una retroalimentación de los conocimientos previos, recordando los conjuntos numéricos. Continuando, se dan tres ejercicios contextualizados en pizarra y se convierten en un lenguaje algebraico, mostrando la relación que existe entre estos dos registros, como por ejemplo:

- La suma del cuadrado de un número y el número es 30

Luego se hace el desarrollo de este ejercicio:

$$x^2 + x = 30$$
$$x^2 + x - 30 = 0$$
$$(x + 6) * (x - 5) = 0$$
$$x = -6 \quad \vee \quad x = 5$$

Este es el número

Tiempo estimado: 20 minutos.

Desarrollo:

Se ordena el curso en grupos de 4 a 5 personas, donde se entrega una guía con ejercicios expresados en un lenguaje natural y en lenguaje algebraico, además de completar el cuadro que compara los tres registros utilizados en clase. En el primer ítem de la guía deberán calcular las raíces de las distintas ecuaciones utilizando el recurso didáctico, mientras tanto en el segundo se debe completar el cuadro comparativo de los distintos registros. Se retiran las guías para revisar los procedimientos que los estudiantes realizaron. Tiempo estimado: 60 minutos.

Cierre:

Se les realiza preguntas a los estudiantes como por ejemplo: ¿Qué les pareció el material didáctico?, ¿Cómo se sintieron con su manipulación?, ¿Qué fue lo que más les costó y por qué?, ¿Qué fue lo que menos les costó y por qué?, etc. Se les recuerda los tipos de resolución de las ecuaciones de segundo grado. Tiempo estimado: 10 minutos.

Propiedades utilizadas en la Secuencia didáctica

Lenguaje Natural: La suma de…, en este caso se utiliza aquella propiedad para asociar y darle sentido lógico al lenguaje natural.

Lenguaje Algebraico: Se utiliza la propiedad distributiva, porque la factorización se basa en esta propiedad, y al realizar el tratamiento de la ecuación de segundo grado en este registro, uno de los métodos es la factorización.

Lenguaje Geométrico: En este registro, se utiliza la propiedad cancelativa al utilizar el opuesto con el lado rojo en las fichas bicolores (Figura 1).

Figura 1: Fichas bicolores

Justificación de la secuencia didáctica

Esta secuencia didáctica es realizada con el fin de superar los obstáculos que fueron mencionados anteriormente, de esta forma poder trabajar con los estudiantes los diferentes registros de representación, haciendo que los alumnos conozcan y comprendan el cómo transformar y convertir, según corresponda, los registros de representación. La secuencia didáctica esta propuesta para el nivel de 3°medio, debido a la ubicación curricular del objeto de saber. Para esta secuencia didáctica se utiliza, como material didáctico el uso de las fichas bicolores, este material permite a los estudiantes ver el registro de representación geométrica o figural la representación de la ecuación cuadrática, de esta forma el estudiante conocerá y aprenderá con las tres representaciones: lenguaje natural, algebraico y geométrico.

Conclusión

Para abordar el tema de la investigación, se debió analizar el saber erudito, con el fin de ver el concepto de Ecuación Cuadrática y los métodos de resolución. Se llegó a obtener la existencia del método de factorización, completación de cuadrados y una fórmula que se generó a partir de la aplicación de completación de cuadrados en la expresión general de una ecuación cuadrática. En la secuencia didáctica se planteó la actividad, que sustenta la comprensión de la existencia de raíces que es el obstáculo y este se supere con la ayuda del material didáctico. El material didáctico aportara que los estudiantes puedan hacer la conversión del registro natural y/o el algebraico y su tratamiento (factorización) al registro geométrico. Y en la guía se hará que los estudiantes realicen los registros y puedan acomodarlo para que lo asocien de forma individual, y que cada registro cuenta con una particular propiedad que aporta a la conversión.

Referencias bibliográficas

Hall, H. S., & Knight, S. R. (1960). *Elementary algebra*. New York: Macmillan & Co Ltd.

Ochoviet, C (2004). *¿a.b=0 ⇒ a=0 ∨ b=0? Reflexiones e implicaciones en la enseñanza de la matemática*.Tesis de maestría no publicada. Instituto Politécnico Nacional, Mexico.

Gustin Ortega, J. D., & Avirama Gutiérrez, L. M. (2014). *Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo* (Doctoral dissertation).

Saiz, O, Blumenthal,V . (2012). *Texto Del Estudiante: Matemática Tercero Medio*. Chile: Cal Y Canto.

MINEDUC (2015). *Matemática programa de estudio tercer año medio, documento en edición*. República De Chile: Ministerio De Educación.