PRÁCTICAS ARGUMENTATIVAS DE ESTUDIANTES DE PROFESORADO FRENTE A LAS CONSIGNAS *DEMOSTRAR* O *JUSTIFICAR*

Virginia Montoro

Centro Regional Universitario Bariloche - Universidad Nacional del Comahue – Rep. Argentina

vmontoro@crub.uncoma.edu.ar / vmontoro@gmail.com.ar

Pensamiento Matemático Avanzado / Educación Superior / Investigación Cualitativa

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está enmarcado en el proyecto de investigación: "El aprendizaje de la demostración en geometría en la formación de profesores"[1], que con el objetivo general de estudiar el proceso de aprendizaje de la demostración en estudiantes de Profesorado de Matemática en el contexto de problemas de Geometría Euclídea, se propone, como objetivo particular, indagar acerca de las concepciones de estos estudiantes sobre la demostración matemática. Reportamos aquí el análisis de una tarea propuesta en un test aplicado a estos estudiantes en el contexto del citado proyecto, análisis realizado con el fin de obtener indicios sobre aspectos de las concepciones de los estudiantes respecto de la demostración matemática en cuanto a su diferenciación de otros tipos de argumentación.

En le proyecto marco y desde nuestra doble función de investigadores y formadores de Profesores de Matemática trabajamos bajo la hipótesis de que una manera eficiente de contribuir al mejoramiento de la enseñanza-aprendizaje de la matemática, es el aportar elementos que enriquezcan la formación de los docentes, especialmente en el sentido de profundizar los procedimientos del método matemático; por lo que hemos considerado investigar el proceso de aprendizaje de los estudiantes de profesorado enfocando a la demostración como una expresión esencial del quehacer matemático.

Históricamente la matemática ha pasado de estar relacionada con problemas prácticos, a ser una ciencia deductiva que trabaja con definiciones de conceptos; relaciones entre ellos y sus propiedades; y es la demostración el modo de argumentación aceptado en la comunidad matemática para confirmar esas propiedades. La demostración es un procedimiento o actividad matemática ligada a establecer propiedades de los conceptos, equivalencia de definiciones o a confirmación de conjeturas. Un aspecto que distingue una demostración matemática de una argumentación en general es la necesidad de esta de existir en relación a una axiomática explícita. En este contexto para la comunidad matemática no habría mucha diferencia entre demostrar o justificar una afirmación, ambos términos significarían deducir su validez mediante razonamientos lógicamente validos de la axiomática pertinente.

Sin embargo encontramos que al término demostración se lo utiliza en los ámbitos sociales y profesionales más diversos. Uno de estos significados puede ser "realizar la acción efectiva que evidencia aquello que se pretende ver"; por ejemplo: el movimiento se demuestra andando. También se asimila la demostración al hecho de que se "enseñe cómo hacer algo"; ej: demostrar como funciona determinado programa de computadora; también, aplicando una falsa inducción completa se dice "esto demuestra que..." y de un sólo ejemplo se saca una conclusión universal, ej: en una publicidad, un par de medias blancas demuestra la superioridad de un jabón en polvo. En el mundo castrense son frecuentes las demostraciones de fuerza y en el ámbito jurídico, es común apelar a la necesidad de demostrar la veracidad del modelo propuesto para explicar la sucesión de los hechos. (Alsina, 2003).

Por otra parte; la argumentación se ha convertido en una herramienta muy utilizada para la construcción de los aprendizajes en ciencias en general; entendemos por argumentación cualquier discurso que se emplea para sacar en claro algo, deducir como consecuencia natural; es decir un razonamiento que se emplea para convencer a alguien de aquello que se afirma o se niega; es así

[1] Proyecto de Investigación 04B134, aprobado y subsidiado por la secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue: Dirigido por L. Siñeriz y Co-dirigido por V. Montoro; otros integrantes del mismo son C. Ferraris, M. Ferrero y M. Juan

como aparecen en la enseñanza, a veces confundidos, términos como argumentación, explicación, justificación, prueba y demostración. El término justificación aparece también frecuentemente en el vocabulario educativo, y muy frecuentemente en la educación matemática. El diccionario nos dice que justificación es una prueba convincente de algo y justificar sería probar algo con razones convincentes, testigos o documentos; es decir una forma más general de argumentación que no necesariamente converge al término demostración en un sentido matemático. Si bien existe una argumentación en educación matemática, especialmente en la resolución de problemas, donde pueden desarrollarse prácticas argumentativas validas en otras ciencias como son la metáfora, la analogía, la abducción, la inducción, etc., estas prácticas deberán desaparecer al momento de la construcción de un discurso que sea aceptable según las reglas propias de la comunidad matemática.

En este trabajo, de acuerdo con Balacheff (1987), entenderemos por argumentación cualquier discurso destinado a obtener el consentimiento del interlocutor sobre una afirmación; una explicación es una argumentación en que el consentimiento se busca a partir de la explicitación de la racionalidad de la afirmación, y no a través de otro tipo de argumentos como podrían ser los de autoridad, los afectivos o los de reputación. Las pruebas son explicaciones en que la explicitación de la veracidad de una aserción se realiza sobre la base de reglas o normas consensuadas por una comunidad determinada en un momento dado. En la comunidad matemática estas normas plantean la presentación de una sucesión de enunciados, cada uno de los cuales es una definición, un axioma, un teorema previo o un elemento derivado mediante reglas preestablecidas de los enunciados que le preceden, las pruebas reciben el nombre de demostraciones.

No podemos soslayar, sin embargo, que demostrar en matemática es una tarea cognitivamente compleja, no siempre tan diáfana como su redacción final parece indicar. La denominada “demostración final” de un teorema es la culminación de un proceso, la presentación limpia y ordenada de una larga investigación nunca exenta de intuición, pruebas, argumentos, justificaciones, errores, refinamientos, etc. (Polya,1954, Lakatos, 1976, Schoendfeld,1992). Sin dudas el proceso de aprendizaje de este contenido matemático tan esencial no se vera exento de esta complejidad y se verán reflejadas en él estas aproximaciones. En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática se utilizaran argumentaciones para validar proposiciones matemáticas y estas puede aparecer bajo distintos aspectos, con mayor o menor grado de explicitación y con distintos niveles de rigor. Podemos decir, sin temor a equivocarnos, que el pasaje de las justificaciones, explicaciones en matemáticas hacia la argumentación deductiva, para culminar en la demostración es lo que caracteriza el pasaje de las matemáticas escolares hacia la matemática superior.

Es nuestra tarea como formadores de profesores de matemática mediar para que nuestros estudiantes posean un marco conceptual sólido en matemática y para ello deberemos prestar especial atención a su proceso de aprendizaje de la demostración. Demostrar es un contenido específico de la matemática; en el proceso de aprendizaje de la demostración de hecho se aceptan argumentaciones, explicaciones y justificaciones. Sin embargo no es claro si la aceptación de estas prácticas argumentativas podría constituirse en un obstáculo para la construcción de la problemática matemática de demostración. Duval (1993) concluye que "el desarrollo de la argumentación aun en sus formas más elaboradas no abre los ojos hacia la demostración. Esta autor afirma que la demostración requiere un aprendizaje "específico e independiente".

Según Balacheff (1999) desde el punto de vista del aprendizaje existe una relación compleja y constitutiva del sentido entre la argumentación y la demostración: la argumentación se constituye en obstáculo epistemológico al aprendizaje de la demostración, y más generalmente de la prueba en matemáticas. Dado que el movimiento hacia la racionalidad matemática no puede lograrse salvo si se toma conciencia efectiva de la naturaleza de la validación en matemáticas, se provocarán al mismo tiempo la construcción de la argumentación y de la demostración.

Tampoco podemos estar ajenos que en la problemática del aprendizaje de la demostración subyace el contrato didáctico que emerge naturalmente de las posiciones del alumno y el docente con respecto a los saberes en juego. Dado que el docente es el garante de la legitimidad y de la validez epistemológica de lo que se construye en la clase, eso parecería implicar que el alumno se vería privado de un acceso auténtico a una problemática de la verdad y de la prueba Balacheff (1999). Es decir que en las producciones de los alumnos y la construcción de este aprendizaje será de suma importancia lo que el docente valide como una prueba, una demostración o como una justificación y según este autor no debemos caer en el error de carácter epistemológico de dejar creer a los alumnos, que ellos son capaces de producir una prueba cuando no han hecho otra cosa que argumentar.

Respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje de la demostración, encontramos los trabajos precursores de Polya (1954), Fischbein (1982), Balacheff (1987), Arsac (1992) y Duval (1991) que estudian situaciones de validación y prácticas argumentativas de los alumnos, las concepciones de verdad y falsedad y la tipología de pruebas que ellos producen. No podemos dejar de considerar los aportes (entre otros) de Dreyfus (1999), Godino y Martínez Recio (1997 – 2001), Martínez Recio (2002), Ibáñez Jalón, (2002) Sáenz Castro (2002) que analizan los rasgos característicos del significado de la demostración en distintos contextos institucionales y las distintas dimensiones para este concepto como así también las dificultades con que se encuentran los estudiantes universitarios para producir demostraciones formales.

En un trabajo anterior (Montoro. 2005) reportamos una categorización de las producciones de estos estudiantes en problemas de demostrar al comienzo del estudio de la Geometría; en aquella oportunidad se categorizaron las producciones de los alumnos en 6 tareas de demostrar buscando en cada una de ellas indicadores que dieran cuenta del papel que en ellas se asigna al ejemplo, la utilización de procedimientos propios de la matemática, y el aporte de argumentos deductivos y de lenguaje simbólico.

Luego a cada producción se le asignó una categoría de “tipo de prueba” Utilizando aquí la palabra “prueba” a fin de atender a toda la gama de validaciones que producen los estudiantes para una aserción. De este modo intentamos cubrir los distintos tipos de producciones de los estudiantes en estas tareas, desde los estadios más intuitivos a los estrictamente formales. Sintéticamente, en aquella ocasión, se consideraron como *pruebas empíricas* aquellas que se sustentan en conocimientos prácticos que se captan a través de los sentidos y/o la acción; procedimientos de validación en los cuales se utilizan los ejemplos como elementos para convencer. Diferenciando según sea el papel del ejemplo en: *prueba ingenua* que consiste en extraer de la observación de un pequeño número de casos (en ocasiones sólo un caso) la certeza de verdad de una aserción; *prueba crucial* es aquella en la cual se usa un ejemplo cuidadosamente seleccionado por quien argumenta, tomado como representante de clase y finalmente *prueba genérica* es un procedimiento de validación realizado mediante operaciones o transformaciones sobre un ejemplo.

Las *pruebas intelectuales* son aquellas que se componen de argumentaciones que implican propiedades y relaciones entre propiedades y su comunicación está caracterizada por el lenguaje matemático. Distinguiremos la *experiencia mental* y la *deducción formal.* En la experiencia mental se consideran ejemplos que no son tomados como elementos de convicción sino para ayudar a organizar la justificación o como soporte de la argumentación. Si bien los argumentos pueden ser informales, se sabe que con verificar en uno o varios casos no alcanza; hay conciencia de lo que falta, lo que lleva a producir otra clase de argumentos para convencer y por último en la deducción formal la justificación se basa en operaciones mentales sin recurrir necesariamente a la ayuda de ejemplos específicos. Se hacen inferencias en base al conocimiento de propiedades y definiciones, se realizan operaciones sintácticas con los enunciados que permiten trascender al ejemplo. La esencia de la justificación es la transformación de las expresiones simbólicas que se conectan en la argumentación. (Siñeriz y Ferraris. 2005).

Según nuestros resultados podemos decir que, en el momento de comenzar el estudio de la Geometría; 3 de estos estudiantes producen, por lo general, pruebas intelectuales formales. Otros 3 proponen pruebas intelectuales del tipo experiencia mental; 2 de ellos producen pruebas empíricas genéricas-cruciales y 5 estudiantes producen pruebas ingenuas. (Montoro 2005). En la Tabla I (en la sección metodología) puede observarse el tipo de pruebas que produce, en general cada estudiante.

El objetivo específico del presente trabajo es: analizar las prácticas argumentativas que brindan los estudiantes frente a la consigna *demostrar* y frente a la consigna *justificar*; analizando, si las hubiere, diferencias; a fin de descubrir indicios de las concepciones de estos estudiantes sobre la demostración matemática en cuanto a su diferenciación de otros tipos de argumentación. Así mismo relacionar estas prácticas, con el tipo de pruebas que producían estos estudiantes al comienzo del estudio de la geometría.

METODOLOGÍA

Participantes:

Participaron 13 estudiantes cursantes de la asignatura Geometría Euclídea del Plano del Profesorado de Matemática del Centro Regional Universitario Bariloche. La asignatura citada corresponde al segundo año de estudios. Las edades de estos estudiantes oscilan entre 19 y 33 años, y en su totalidad han cursado previamente las asignaturas Álgebra I y II; Calculo I y II y Geometría Analítica; en estas asignaturas han tenido contacto con numerosas demostraciones y en la primera estudian elementos de lógica proposicional y métodos de demostración.

Categorizamos previamente (Montoro 2005), para cada uno de estos estudiantes los tipos de pruebas que produce, en general, frente a problemas de demostrar al comienzo del estudio de la geometría; según los indicadores que describimos en la introducción Esta categorización puede observarse en la siguiente tabla.

	TIPO de PRUEBA	
E1	IEM	Intelectual. Experiencia Mental
E2	IF	Intelectual Formal
E3	EG-C	Empírica Genérico - Crucial
E4	IEM	Intelectual. Experiencia Mental
E5	EG-C	Empírica Genérico - Crucial
E6	IF	Intelectual Formal
E7	IEM	Intelectual. Experiencia Mental
E8	EI	Empírica Ingenua
E9	EI	Empírica Ingenua
E10	IF	Intelectual Formal
E11	EI	Empírica Ingenua
E12	EI	Empírica Ingenua
E13	EI	Empírica Ingenua

Tabla I: Tipos de pruebas que producen estos estudiantes frente a problemas de demostrar (Montoro. 2005)

Instrumento de indagación

Se propuso en la primera clase de Geometría Euclídea del Plano, una tarea para ser resuelta en forma individual y por escrito. A continuación la trascribimos:

Definición: Se llama mediatriz de un segmento a la recta perpendicular al mismo por el punto medio.

A continuación se enuncian tres propiedades relacionadas con la mediatriz de un segmento:

P1: Los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del mismo.

P2: Las mediatrices de los lados de un triángulo tienen un punto en común.

P3: Todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia.

a) Demostrar P1.

b) Justifica la siguiente afirmación: "P2 es verdadera".

c) A partir de P1 y P2 demostrar P3.

Luego se realizó una entrevista a cada estudiante en la cual se lo consultó sobre el sentido de cada producción. Esta fueron abiertas, grabadas en su totalidad y luego consultadas en caso de dudas.

Metodología de análisis

La categorización de las prácticas argumentativas de los estudiantes fue realizada por la autora procediéndose después a realizar controles cruzados con otras integrantes del proyecto de modo de cuidar la aplicación de criterios uniformes y apropiados. En algunos casos que se presentaban dudas sobre las producciones, por ejemplo: si sólo aparecía un dibujo podía ser porque el estudiante consideraba que éste era suficiente para justificar la afirmación correspondiente o porque simplemente estuvo probando y decidió no seguir con la tarea; se recurrió a las entrevistas para dilucidar sobre estas cuestiones. Ver por ejemplo producción item c del/a alumno/a E9 en el Anexo.

Para este análisis no hemos tenido en cuenta si los conceptos o propiedades utilizadas son correctos o no; como tampoco si se han aplicado leyes lógicas válidas. Sino mas bien la intención que el estudiante deja ver a través de sus producciones en cuanto a si intenta hacer una argumentación deductiva o simplemente una explicación de hechos; es decir si realiza sus validaciones utilizando una argumentación deductiva y con componentes que tendien a la formalización o si en cambio valida mediante una forma general de argumentación, dando razones inductivas, mostrando dibujos o produciendo aserciones tomadas como hechos.

Consideramos que estos estudiantes están en un proceso de formación en cuanto a su conocimiento matemático y por lo tanto en proceso de aprendizaje del contenido *demostración*, por lo que observaremos cuanto se alejan o se acercan sus producciones a un argumento deductivo; ya que en muy pocos casos sus producciones pueden ser consideradas una demostración matemática formal.

Los indicadores que se tuvieron en cuenta fueron en primera instancia si la argumentación utilizada para validar la afirmación era una argumentación deductiva es decir que el estudiante desprende consecuencias de las hipótesis o realiza inferencias basadas en propiedades y definiciones, o simplemente una manifestación de hechos a las que denominamos explicación. Consideramos que el estudiante brinda una explicación cuando se limitan a dar razones convincentes no deductivas; declara o expone razones o causas de algún hecho con palabras, dibujos o ejemplos, para que se haga evidente.

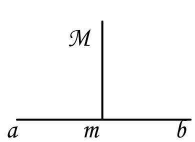
RESULTADOS Y DISCUSION

En la categorización de las respuestas de los estudiantes frente a la consigna Demostrar o Justificar, pudieron consensuarse las siguientes categorías:

Argumentación deductiva formal: hemos considerado que realiza una argumentación deductiva formal cuando hace inferencias basadas en las hipótesis, propiedades o definiciones y presenta una secuencia lógica de expresiones simbólicas

Por ejemplo: Item a) de E6

a)

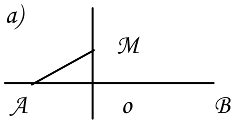


am = mb Sea x un punto de la recta M ➔ *por Pitágoras* $ax^2 = am^2+mx^2$
$bx^2 = bm^2+mx^2$ *Por hip am=mb* ➔ $ax^2 = mb^2+mx^2$ ➔
$ax^2 = bx^2$ *por ser medidas de segmentos siempre positivas* $ax=xb$.

Argumentación deductiva coloquial: consideramos una argumentación deductiva coloquial cuando presenta inferencias basadas en las hipótesis; propiedades o definiciones, realizándola coloquialmente

Por ejemplo: item a) de E4

a)



Se que la distancia que hay entre el punto o donde se corta la mediatriz con el segmento es el punto medio. Por lo que la distancia de o a los extremos es la misma y la podemos tomar como base y luego la altura sería la distancia de o a un punto cualquiera de la mediatriz y uniendo el punto con los extremos se conforma un triángulo rectángulo donde tanto a la derecha como a la izquierda de la mediatriz queda formado el mismo triángulo con la misma base y la misma altura y por lo tanto la misma hipotenusa (porque el triángulo es rectángulo y la hipotenusa es la distancia del punto a un extremo y a va a ser la misma al extremo derecho que al izquierdo

Explicación coloquial: Se consideró una explicación coloquial cuando el estudiante, clarifica (o se clarifica) la situación. En general presenta un *aspecto* de argumento deductivo sin llegar a hacer inferencias reales.

Por ejemplo: Item a) de E8

a) Sea un segmento ab, existe un punto medio entre estos llamado c (es decir c equidista de los extremos a y b) y si trazamos la mediatriz los puntos de esta siguen equidistando de sus extremos por definición de mediatriz.

Explicación por evidencia: Será una explicación por evidencia cuando intenta evidenciar la proposición mediante la afirmación de que se cumple alguna propiedad o alguna definición sin argumentar, solo haciendo afirmaciones

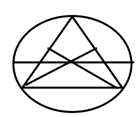
Por ejemplo: Item b) de E7

b) Por definición de Baricentro

Explicación por dibujo: Será una explicación por dibujo cuando muestra a través de un dibujo. Afirma sin argumentar.

Por ejemplo: Item b) de E9

a) todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia[2]



- [2]Pensas que este dibujo que justifica que la propiedad sea verdadera?: .... sí, más o menos me lo imaginé así y dije, si es la mitad, porque más que nada me acordaba como sería más o menos lo de las mediatrices, lo dibujé : ...y este también traté de verlo gráficamente más que nada, pero sí era por esto....por este puntito es lo que veía... (De la entrevista posterior al tests)

La Tabla II muestra la caracterización de las respuestas de los estudiantes respecto de la consigna; en el Anexo podemos observar la producción de algunos estudiantes.

	TIPO PRUEBA	Item a	Item b	Item c	Dif
E1	IEM	Arg. deductiva coloquial	Explicación por evidencia	Arg. deductiva coloquial	SI
E2	IF	Arg. deductiva formal	Arg. deductiva formal	Arg. deductiva formal	NO
E3	EG-C	Arg. deductiva coloquial	Explicación coloquial	Arg. deductiva coloquial	SI
E4	IEM	Arg. deductiva coloquial	Explicación coloquial	No Contesta	SI
E5	EG-C	Arg. deductiva coloquial	Explicación por dibujo	Arg. deductiva coloquial	SI
E6	IF	Arg. deductiva formal	Explicación por evidencia	Arg. deductiva formal	SI
E7	IEM	Arg. deductiva coloquial	Explicación por evidencia	Arg. deductiva coloquial	SI
E8	EI	Explicación coloquial	Explicación por evidencia	No Contesta	SI
E9	EI	Explicación coloquial	Explicación por dibujo	Explicación por dibujo	SI
E10	IF	Arg. deductiva formal	Arg. deductiva formal	No contesta	NO
E11	EI	Explicación por dibujo	Explicación por dibujo	Explicación dibujo	NO
E12	EI	Explicación por dibujo	Explicación por dibujo	Explicación dibujo	NO
E13	EI	Explicación coloquial	Explica por dibujo	Explicación coloquial	SI

Tabla I I: La primera columna refiere a la etiqueta que se le asignó a cada estudiante; la segunda el tipo de prueba que produce en general este estudiante (Montoro. 2005) y las tercera, cuarta y quinta corresponde al tipo de argumento que presenta en cada item de la tarea propuesta. La ultima columna expresa si hubo diferencia en las producciones respecto de la consigan demostrar o justificar.

Observamos que frente a la consigna *demostrar* la mayoría de los estudiantes tiende a dar un argumento deductivo o al menos una explicación coloquial (que tenga *aspecto* de argumento deductivo); y ante la consigna *justificar* tienden a dar una explicación que puede ser por evidencia o dibujo. La mayoría de los estudiantes responden en forma diferenciada frente a las dos consignas, tendiendo a producir argumentos deductivos frente a la consiga demostrar y frente a la de justificar prefieren dar una explicación y se sienten con mayor libertad; aun para explicar lo que les sucede en un sentido subjetivo como por ejemplo el caso de E4 que ante la consigna Justificar el item b) enuncia: *No lo puedo entender se me plantean dudas con los triángulos obtusángulos hasta que no lo entienda no lo puedo hacer*

Observamos que sólo un estudiante realiza una práctica argumentativa distinta para el Item c que para el item a; el resto tiene la misma práctica o no contesta.

Solo 4 estudiantes no diferencian entre consignas; dos de ellos producen pruebas formales en general, (ver las producciones de E2 Anexo) es decir que se encontrarían en un estadio mas avanzado del aprendizaje de la demostración; mientras que los otros 2 producen pruebas ingenuas en general (ver las producciones de E12 en Anexo). Para aquellos que se encuentran en una etapa formal; pareciera que el termino justificación, en un contexto matemático los remite a la forma de validación matemática es decir hacia una prueba formal. Ahora aquellos que se encuentran en una etapa inicial en cuanto al aprendizaje de la demostración no sienten otra necesidad de argumentación que la de dar una explicación, tanto si se les pide demostrar como justificar.

Entre los estudiantes que dan respuestas diferentes a las diferentes consignas encontramos de tres tipos:

- los que dan *argumentación deductiva coloquial* frente a la consiga demostrar y una *explicación por evidencia o dibujo* frente a la de justificar (ver E7 en Anexo) ;
- los que producen una *argumentación deductiva formal* ante la consigna demostrar y *explicación por evidencia* frente a justificar. (ver E6 en Anexo);
- los que dan una *explicación coloquial* frente a demostrar y los que dan una *explicación por evidencia o dibujo* para justificar (ver E13 en Anexo)

Observamos que la argumentación deductiva o explicación que brindan en los distintos ítems estará relacionada con el tipo de pruebas que producen en general. Los estudiantes que producen Pruebas Formales al comienzo de la geometría tienden a dar argumentaciones deductivas formales en ambos casos, es decir tanto cuando se les pide demostrar como cuando se les pide justificar. Salvo en el caso de E6 que a la consigan justificar responde con una explicación por dibujo.
En cambio los estudiantes que realizan Pruebas de Experiencia mental en los tres casos tienen respuestas diferentes ante las distintas consignas produciendo argumentaciones deductivas coloquiales para demostrar y explicaciones ante justificar. En los dos casos que producen pruebas genéricas cruciales la respuesta es muy similar al grupo anterior. Por ultimo los que producen pruebas ingenuas producen explicaciones en ambos casos, algunos dando una explicación coloquial cuando se les pide demostrar y por evidencia o dibujo cuando se les pide justificar; los que no cambian el tipo de respuesta explican por evidencia en los dos casos

CONCLUSIONES

Podríamos decir que estos estudiantes describen dos extremos donde demostrar y justificar significan lo mismo pero en distinto sentido. En un extremo se encontrarían los que se encuentran muy alejados de construir argumentos deductivos que los lleven a una comprensión del concepto de demostración matemática como son los que en ambos casos explican por medio de un dibujo y en el otro los que realizan argumentaciones deductivas formales tanto para demostrar como para justificar; estos estudiantes parecieran comprender el concepto de demostración ya que producen en general pruebas formales; pareciera que para ellos justificar en un contexto matemático es lo mismo que demostrar o dicho de otro modo que la demostración es la única justificación valida en matemática.

Por otra parte tenemos los que producen una argumentación deductiva coloquial bajo al consigna demostrar y un explicación por evidencia en justificar, diferenciando claramente los términos, en forma similar a los que producen una explicación coloquial (con forma de demostración) y solo una explicación por dibujo o evidencia en justificar. En estos últimos es notable como a pesar de no producir pruebas intelectuales hacen una diferencia evidente ante los distintos términos. Pareciera que al menos en teoría comprendieran que la demostración matemática tiene que ver con el razonamiento deductivo, y que frente a la justificación se sienten con mayor libertad de acción

Es evidente que en el proceso de aprendizaje de la matemática nos encontraremos también con procesos de argumentación, es más estos últimos se vuelven necesarios a la hora de la comprensión de los conceptos, lo que no es claro si este proceso llevará a los estudiantes necesariamente a abandonar todo tipo de argumentación no deductiva a la hora de comprender cabalmente la demostración matemática.

Sin duda los estudiantes encuentran útiles las justificaciones y explicaciones a la hora de hacer inteligible el carácter de verdad, de una proposición o de un resultado; ahora bien es nuestra responsabilidad que sepa distinguir entre las argumentaciones que le sirven para comprender, o para explicar o para resolver algún problema de la demostración como una técnica especifica con sus propias reglas.

A modo de cierre podríamos decir que los docentes que tenemos la responsabilidad de la formación matemática de los futuros profesores; debiéramos prestar especial atención en no caer en el error de dejar creer a los alumnos, que ellos son capaces de producir una demostración cuando no han hecho otra cosa que argumentar. Por el contrario si bien en la comprensión de los conceptos; propiedades; definiciones y en la resolución de problemas tomaremos como validas argumentaciones de todo tipo y con frecuencia pediremos a nuestros alumnos que justifiquen y esto podrá significar muchas cosas por ejemplo decir *cómo lo pensamos*, *que es mas creíble porque se cumple en algunos casos; etc.* Deberemos explicitar la diferencia de estos argumentos con una demostración matematica.

En esto último acordamos con Balacheff (1999) cuando expresa que *comprender la demostración implica construir una relación particular al conocimiento como aquello que esta en juego en una construcción teórica, y por lo tanto implica renunciar a las libertades que uno podría tomarse, personalmente, en el juego de la argumentación*. Dado que una construcción cabal del conocimiento matemático no puede darse si no se logra una toma conciencia efectiva de la naturaleza de la validación en matemáticas, debiéramos ocuparnos de que nuestros estudiantes se nutran de de la argumentación pero no pierdan de vista las características esenciales de la demostración.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., (2003) C. D. Q. Como quisiéramos demostrar. Epsilon 57. España. 345-356

Arsac, G. Et al (1992) Initiation au raissonnement au colllege. Presses Universitaires de Lyon. IREM.

Balacheff, N. (1987). Processus de pruebe et situations de validation. Educational Studies in Mathematics, vol 18 : 147-176

Balacheff, N. (1990): Beyond a psychological approach: the psychology of mathematics education. Learning of Mathematics, Vol. 10, Nº. 3, pp. 2-8.

Dreyfus, T. (1999). Johnny can't prove. Educational Studies in Mathematics, 38, 85-109

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demostration. Educational Studies in Mathematics,22,233-261

Duval, R.(1993): Argumenter, demontrer, expliquer: continuitéou rupture cognitive?. Petit x, 31, 37 –61.

Fischbein, E (1982). Intuition an Proof. For the learning of Mathematics. 3,2,9-24

Godino, J. D. y Martínez Recio A., (1997). Significado de la demostración en educación matemática. Original Title: Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional statements. PME XXI (Vol.2 pp. 313-320). Lahti, Finland. [Trad. castellana: www.lettredelapreuve,it/Resumes/Godino/Godino97ES.html].

Godino, J. D. y Martínez Recio A., (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. Enseñanza de las Ciencias 19(3) 405 - 414 España

Ibáñez Jalón, M.J., (2002). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Almería. España. (Septiembre de 2001) , Eds: M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y j. D. Godino. Servicio de Publicaciones. Universidad de Almería. 11-26.

Lakatos, I. (1976): Proofs and Refutations. Oxford University Press: London. [Trad. castellana: Pruebas y refutaciones. Alianza Ed.: Madrid, 1978].

Martínez Recio, A. (2002) La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Almería. España. (Septiembre de 2001) , Eds: M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y j. D. Godino. Servicio de Publicaciones. Universidad de Almería. 29-43

Montoro, V. (2005). *Explorando la producción de los estudiantes de profesorado en cuanto a la demostración en geometría euclídea.* Ponencia en XXVIII Reunión de Educación Matemática. Organizada por la Unión Matemática Argentina. Salta. Septiembre. *Resumen en Actas* XXVIII REM - UMA. 2005.

Polya, G. (1954): Mathematics and Plausible Reasoning. Vol II. Princeton University Press: Princeton, NJ. [Trad. castellana: Matemáticas y razonamiento plausible. Tecnos: Madrid (1966)].

Sáenz Castro, C., (2002). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Almería. España. (Septiembre de 2001) , Eds: M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y j. D. Godino. Servicio de Publicaciones. Universidad de Almería. 47-62.

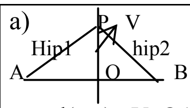
Schoenfeld, A. H. (1992) . Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, en Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, NTCS, Macmillan Publishing Company, N.Y., 1992, págs.334-370. (The University of California -Berkeley).

Siñeriz, L. y Ferraris C. (2005). Tipos de prueba: una de las categorías de un Modelo Teórico del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría. Memorias del VII Simposio de Educación Matemática Chivilcoy (Prov. de Bs. As). ISBN 987- 20239-3-X. Vol XII.

ANEXO: PRODUCCIONES DE ALGUNOS ESTUDIANTES

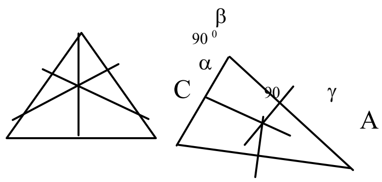
E2

a)

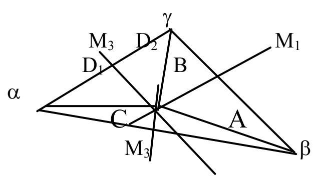


d(p,o) =V OA≡OB pues o está en el punto medio de AB.
$|Hip\ 1|^2 = |OA|^2 + |OP|^2$
$|Hip\ 2|^2 = |OB|^2 + |OP|^2$ Como OA = OB ➔ $|Hip\ 1|^2 = |Hip\ 2|^2$
➔ $|Hip\ 1| = |Hip\ 2|$. La distancia de P a los extremos de AB es la misma para ambos.

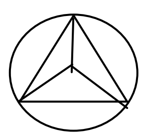
b)



El ángulo entre MA y MC es 180-α
MB ~ MA = 180-α
MB ~ MC es 180-β

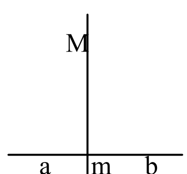


$M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ porque no son paralelas
$\exists p \in M_1 \cap M_2$ A≡C y A≡B por P_1 B≡ C por transitividad $D_1 \equiv D_2$. Puedo construir con k perp a $\alpha\gamma$ ~ Aque pase por p que cumple con las propiedades de la mediatriz pues pasa por el punto medio del lado $\alpha\gamma$ define dos triángulos rectángulos con hipotenusas congruentes y pasa por el punto medio de $\alpha\gamma$ por criterio de semejanza de triángulos para determinar la bisectriz del ángulo llano debe ser mas rigurosa la demostración pero "no entra en el margen"
c) Como las mediatrices se cortan en un punto y las distancias desde ese punto a cada vértice son las mismas se puede centrar el compás en P y trazar una circunferencia de radio D que pase por los tres vértices.



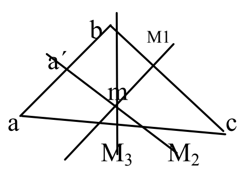
E6

a)



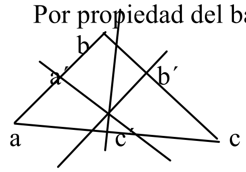
am = mb Sea x un punto de la recta M ➔ por Pitágoras $ax^2 = am^2 + mx^2$
$bx^2 = bm^2 + mx^2$ Por hip an=mb ➔ $ax^2 = mb^2 + mx^2$ ➔ $ax^2 = bx^2$ por ser medidas de segmentos siempre positivas.

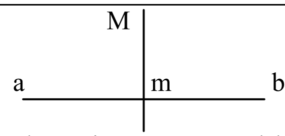
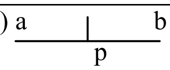
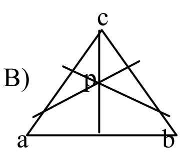
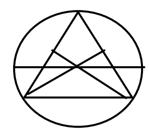
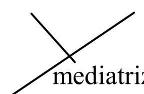
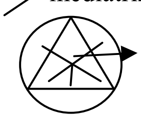
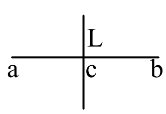
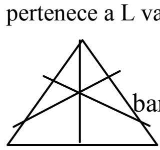
b)



Por propiedad del baricentro.

c)



	aa´= a´b ➔ ma= mb bb´= b´c ➔ mb= mc => ma=mb=mc ➔ cc´= c´a ➔ mc= ma Si tomo como radio a na y el centro de la circunferencia n puede trazar una circunferencia que contenga a b c ➔ el triángulo queda inscripto en la circunferencia.
E7	a) ab m punto medio  . La distancia de a y m es igual a la distancias de m a b por simetría respecto del punto medio. . como m es un punto de la recta mediatriz P_1 se cumple para m . Para los demás puntos también se cumple las simetría respecto de la mediatriz b) Por definición de Baricentro c) tomo al punto de intersección de las mediatrices del triángulo como centro de una circunferencia y como radio la distancia del centro a uno de los vértices del triángulo que equidistan el centro hace de punto medio.
E9	A)  Dem: por definición p es la mitad de ac ➔ la distancia de b a p va a ser igual a lo de p a c. B)  punto p en común  P3 todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia(1) (1): .... pero sí, más o menos me lo imaginé así y dije, si es la mitad, porque más que nada me acordaba como sería más o menos lo de las mediatrices, lo dibujé : ...y este también traté de verlo gráficamente más que nada, pero sí era por esto....por este puntito es lo que veía... (Textual de la entrevista)
E12	A)  mediatriz B)  baricentro[3]
E13	a) Si una recta pasa por el punto medio de un segmento lo corta a este en dos segmentos iguales por lo tanto desde el punto donde corto esa recta al segmento y los extremos del mismo existe igual distancia , por lo tanto ese punto equidista d elos extremos  Sea ab un segmento y sea la recta L mediatriz del mismo , ==> L es perpendicular a ab y corta a este en el punto c el cual es punto medio de ab , entonces el punto c está a la misma distancia de a que de b , por lo tanto todos los puntos que pertenece a L van a equidistar de los extremos. 3b)  baricentro 3c) el punto donde se cruzan las mediatrices es el centro de la circunferencia donde el triángulo esta innscripto este punto equidista de los vértices del triángulo por lo tanto es el centro de la circunferencia.

[3] : bueno, y justificar que las mediatrices de los lados de un triángulo tienen un punto en común, no es baricentro es.......circuncentro.....bueno, no importa, eso....bueno, también te pedían justificar, ¿ pensás que cumpliste con la consigna de justificar?
K: sí, porque pedía que justifique si existía