Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica[1]

Morten Blomhøj

Traducción: María Mina[2]

El desarrollo de competencias para establecer, analizar y criticar modelos matemáticos es frecuentemente considerado relevante para los últimos años de la escuela secundaria o después de ella. La creencia general entre los profesores es que las actividades de modelización presuponen una comprensión de la matemática involucrada en ellas. La modelización matemática, sin embargo, puede ser vista como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje, y esto es relevante para cualquier nivel de enseñanza. Las actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar al aprendiz a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir importantes conceptos matemáticos. Además, las competencias para establecer, analizar y criticar procesos de modelización y el posible uso de los modelos es una meta educativa, por derecho propio, de la enseñanza de la matemática en la educación general. Este capítulo presenta un marco teórico que ha sido utilizado para el diseño de cursos de modelización, para analizar actividades de modelización de los estudiantes, para identificar obstáculos en el aprendizaje durante un proceso de modelización, y para guiar las interacciones de los profesores con sus estudiantes durante el trabajo. Este marco se ilustrará con un ejemplo tomado de un proyecto de desarrollo en el cual estudiantes de octavo grado trabajaron con modelización de fenómenos reales relativos a su propia experiencia.

La modelización matemática como una teoría

La investigación en educación matemática ha sido, de algún modo, reticente en desarrollar sus propias teorías paradigmáticas. Con frecuencia, estas teorías son tomadas de ciencias de base y aplicadas al campo de la educación matemática (por ejemplo, teorías generales del aprendizaje son tomadas de la pedagogía o de la sicología). Por lo tanto, es relevante buscar áreas en la educación matemática donde las teorías puedan emerger del estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En este capítulo, argumentaré que la modelización matemática es una

---

[1] Traducción autorizada por el autor del artículo: BLOMHØJ, M. (2004) Mathematical modelling - A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. National Center for Mathematics Education. Suecia, p. 145-159.

[2] Colegio Gabriel Taborín. Integrante del equipo de investigación del proyecto *Indagaciones sobre la formación de docentes en matemática. Perspectivas, tendencias y desafíos*, subsidiado por ACC y SeCyT-UNC bajo la dirección de Mónica Villarreal (CONICET-FaMAF) y Dilma Fregona (FaMAF).

de estas áreas. Una comprensión teórica coherente del proceso de modelización y del proceso de aprendizaje relacionado con él ha sido desarrollada durante los últimos 20 años. Esto ha sucedido a través de una estrecha interrelación entre el desarrollo curricular, prácticas de enseñanza y reflexiones teóricas. De hecho, ahora disponemos de una teoría, tomada como un sistema de puntos de vista interconectados, que puede ser usada para colocar a la modelización como un elemento importante de la enseñanza general de la matemática, como así también para analizar, prever y comprender mejor las dificultades de aprendizaje de los alumnos relativas a la modelización (Blum et al., 2003). La absoluta comprensión de los conceptos “modelo matemático” y “modelización” es una parte importante de esta teoría y, antes de ilustrar la relevancia de la teoría para la enseñanza de la matemática, es necesaria cierta clarificación conceptual.

¿Qué es un modelo matemático?

Un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática. Este aspecto fundamental del concepto de modelo desde ya tiene significativas implicaciones didácticas. En primer lugar, esto implica que, cuando la matemática es aplicada a una situación extra-matemática, algún tipo de modelo matemático está involucrado explícita o implícitamente en ella. Segundo, para que un alumno experimente con un modelo matemático y sea capaz de reflexionar sobre las relaciones existentes en él, es una precondición epistemológica que este alumno sea capaz de percibir la situación o fenómeno modelado y la matemática en juego, como dos objetos separados pero al mismo tiempo interrelacionados. En efecto, esto es el núcleo del problema, ya sea en relación al potencial que tiene el aprendizaje de la modelización matemática, como a las dificultades conectadas con este aprendizaje. El siguiente ejemplo simple ilustra la naturaleza de un modelo matemático y algunas de sus implicaciones didácticas. Una familia de vacaciones maneja 1180 kilómetros en 12 horas. La velocidad promedio (98 km/h) para este viaje puede ser calculada dividiendo la distancia total por el tiempo transcurrido. Tal cálculo puede ser percibido como un modelo matemático. Esto se ilustra en la figura 1.

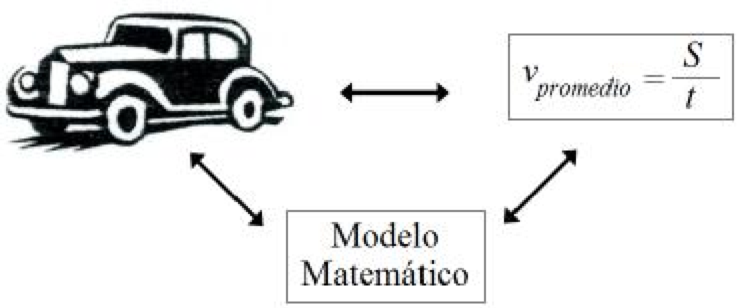

Figura 1. *El cálculo de la velocidad promedio de un viaje particular de un automóvil es un modelo matemático*

Como modelo del viaje, la velocidad promedio es sólo una descripción general; podría ser considerada un modelo estándar indiscutible. Y, por lo tanto, no hay razón para discutir el cálculo mismo. Sin embargo, el modelo es más que solo el cálculo de la velocidad promedio. El modelo identifica la distancia recorrida y el tiempo total empleado. El kilometraje registrado por el auto podría ser considerado la distancia total recorrida. Esto incluye los desvíos realizados por la familia para encontrar un buen lugar para almorzar. Sin embargo, la distancia también podría ser estimada en el mapa y en consecuencia, el tiempo serían las horas reales empleadas en manejar esa distancia. Esto da lugar, por ejemplo, al siguiente cálculo: 1150 km/10h = 115 km/h, el cual también es otro modelo de la misma situación. Cuál de estos dos modelos es una descripción más ajustada o válida depende de las intenciones de uso de estos resultados. Si el modelo será usado en una discusión acerca del tráfico o del modo de manejar del conductor con respecto a las regulaciones legales de velocidad, el segundo modelo es más relevante que el primero. Si la familia usará el modelo para estimar qué distancia sería factible de manejar el día siguiente, están en realidad introduciendo un nuevo modelo. El modelo puramente descriptivo que provee una estimación de la velocidad promedio de un recorrido que ya ha sido realizado, se transforma en un modelo predictivo, cuando es usado para calcular el tiempo necesario para alcanzar cierto destino. El modelo podría ser representado matemáticamente como $s(t)=v_{esp} \cdot t$, donde $s(t)$ es la distancia cubierta luego de t horas de manejo y v_{esp} es la velocidad promedio esperada (km/h).

Dependiendo de cuál de las dos estimaciones es usada para v_{esp}, t puede ser interpretado de dos maneras diferentes, es decir, como el tiempo total empleado en el paseo o como el tiempo efectivo de manejo. Si se usan los 98 km/h, que incluye las dos horas de detención para almorzar, se tiene la consecuencia inmediata de que el modelo es válido únicamente si t está alrededor de las 12 horas. Usando el otro valor para v_{esp}, el tiempo empleado en el almuerzo debe ser añadido al tiempo estimado de conducción real con el fin de calcular cuánto tiempo se necesita para alcanzar el destino final.

El modelo predictivo es mucho más complicado epistemologicamente que el modelo descriptivo. Se construye implícitamente sobre un número de suposiciones considerando las similitudes entre dos situaciones diferentes: una usada para estimar la velocidad promedio y la situación mediante la cual se predice el tiempo de manejo esperado. La predicción del modelo puede ser evaluada únicamente mediante la realización concreta del viaje. Por supuesto, este tipo de modelo puede validarse mediante la experiencia (es decir, mediante información estadística).

El ejemplo muestra que, aún en este caso muy simple de aplicación de la matemática a una situación de la vida diaria, hacer explícitas las relaciones dentro del modelo y discutir la validez de las posibles aplicaciones del mismo, resulta siempre en consideraciones sobre las relaciones entre los conceptos matemáticos y las representaciones, y su significado en el contexto. Además, explicitar las relaciones dentro del modelo permite una crítica del mismo y de su posible uso.

El proceso de modelización

En principio, existe un proceso de modelización detrás de todo modelo matemático. Esto significa que alguien de manera implícita o explícita ha recorrido un proceso de establecer una relación entre alguna idea matemática y una situación real. En otras palabras, con el fin de crear y usar un modelo matemático es necesario, en principio, recorrer todo el camino de un proceso de modelización. Analíticamente es posible describir un proceso de modelización matemática consistente en los siguientes seis sub-procesos (Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003).

(a) Formulación del problema: formulación de una tarea (más o menos explícita) que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelizada.
(b) Sistematización: selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. del dominio de investigación resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática.
(c) Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.
(d) Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.
(e) Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.
(f) Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

El proceso de modelización no debería ser entendido como un proceso lineal. Tal como ya fue indicado en el ejemplo de arriba, un proceso de modelización siempre toma la forma de un proceso cíclico donde las reflexiones sobre el modelo y la intención de uso de éste, conduce a una redefinición del modelo. De hecho, cada uno de los seis sub-procesos puede introducir cambios en el proceso previo. Para señalar estos aspectos dinámicos, el proceso de modelización es mostrado mediante el diagrama circular de la figura 2.

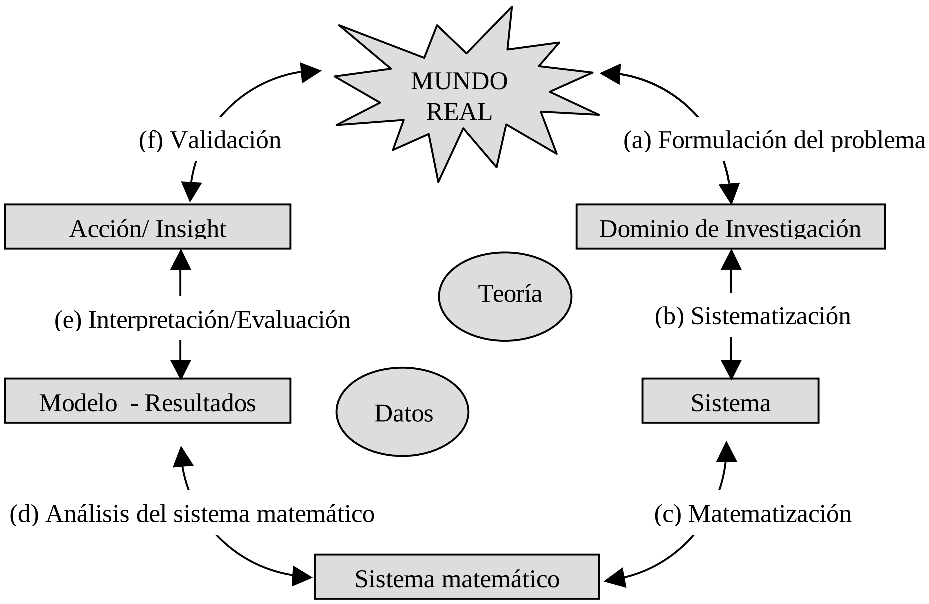

Figura 2. Un modelo gráfico de un proceso de modelización

El conocimiento teórico y los datos empíricos concernientes al dominio de investigación son la base para todos los sub-procesos. Esto está indicado mediante las dos elipses en el centro del diagrama. Debo enfatizar que las categorías de datos y teoría están relacionadas y para nada bien definidas. “Teoría” significa aquí el conocimiento acerca del dominio de investigación usado en el proceso de modelización. El conocimiento base podría tener un status epistemológico bien diferente aún dentro del mismo proceso de modelización, variando desde teorías bien fundadas con matices incorporados (tal es el caso frecuente de la física) hasta experiencias personales y compartidas, y suposiciones puramente ad hoc. El carácter de este conocimiento base tiene vital importancia para determinar cómo el modelo y sus posibles aplicaciones pueden ser validados. A veces, los “Datos” existen previos al proceso de modelización y por lo tanto, estos “datos” pueden ser usados en los procesos de sistematización y matematización y eventualmente usados también para validar el modelo. Con mayor frecuencia, sin embargo, los datos relevantes tienen que ser recolectados como parte del proceso de modelización. Aquí, la producción de datos presupone el modelo. Tales datos pueden ser usados para estimar los parámetros del modelo pero no como base para validar el mismo. Desarrollar en los alumnos la sensibilidad necesaria para estas profundas reflexiones es una parte importante de las metas a largo plazo para la enseñanza de la modelización matemática. El modelo del proceso de modelización de la figura 2 contiene rótulos para los seis sub-procesos como así también un intento de evaluar las seis fases que enmarcan a éstos. Por *modelización matemática me refiero al proceso completo descripto en la figura 2.* Para ilustrar los sub-procesos y etapas del proceso de modelización se hará referencia a un contexto simple donde un alumno de octavo grado (14 años de edad) construye y analiza un modelo con el fin de describir la relación entre la duración de su ducha matinal y la cantidad de agua usada para esta ducha. El ejemplo está tomado de un proyecto de desarrollo llamado *Mañanas Matemáticas*, que se describe en la sección siguiente.

En este contexto, el "mundo real" podría ser la comprensión fonomenológica del hecho que existe una conexión entre el tiempo empleado en la ducha y la cantidad de agua usada. La formulación de un primer problema sobre el cual trabajar, proceso (a), podría ser: ¿Cuánta agua empleo para mi ducha matinal? Más adelante en el proceso, la cuestión podría cambiar a "¿Cuánto tiempo podemos estar en la ducha en casa antes de que el agua se enfríe?" En este contexto, el "dominio de investigación" puede ser enmarcado por la pregunta: "¿Qué podría influenciar el uso de agua para una ducha?" El proceso de sistematización, proceso (b), debería identificar cuáles son, en realidad, los mecanismos esenciales que regulan el uso del agua durante una ducha. Tres factores diferentes pueden ser identificados: la temperatura del agua, el flujo de agua, y la duración de la ducha. Con el fin de simplificar la cuestión, el alumno podría decidir no tener en cuenta la temperatura y asumir que el flujo de agua es constante. Una matematización simple, proceso (c), de este sistema conduciría a un "sistema matemático" consistente en una función lineal (en realidad, una proporcionalidad directa) que proporciona la cantidad de agua caliente usada como función de la duración de la ducha. El análisis de este "sistema matemático", proceso (d), colocaría ideas acerca de cómo estimar el flujo de agua como parámetro esencial del modelo y subsecuentemente producir "resultados del modelo" en la forma de cálculos numéricos en una tabla o como gráfico. Los resultados deben ser interpretados y validados con datos empíricos o con la experiencia, proceso (e). Esto puede conducir a un cambio en el proceso (b) tomando en cuenta que el agua necesita circular durante unos segundos antes de alcanzar una temperatura agradable. Este sistema podría ser matematizado mediante una función lineal con dos parámetros que pueden ser estimados desde los datos empíricos. Por último, pero no menos importante, la validación del proceso completo de modelización matemática debería ser evaluado, proceso (f), el cual cuestionará las suposiciones básicas, los datos usados para estimar los parámetros del modelo, y la medida en la cual el modelo es aplicable a otros miembros de la familia. Nuevos datos empíricos son necesarios para este proceso. Si el modelo cambia su enfoque a cuánta agua caliente se necesita para proveer a la familia de la suficiente capacidad para la ducha matinal de todos, el modelo resultante podría ser usado para diseñar un sistema de calentamiento del agua por energía solar.

Esta descripción de un proceso de modelización de ninguna manera es una descripción de lo que realmente sucede en la situación concreta de enseñanza con un alumno trabajando sobre este problema, aunque las observaciones de un episodio particular de enseñanza han inspirado la descripción dada (Parte del episodio es analizado en la sección siguiente.) Tampoco debería ser considerada esta descripción como una prescripción de un camino ideal a seguir cuando se trabaje con este problema en una situación de enseñanza. La idea es simplemente ilustrar que todos los sub-procesos de un proceso de modelización matemática podrían ser obtenidos de este caso simple donde la matemática es usada para describir una situación de la vida real. Esto significa que el contexto tiene el potencial, en una situación de enseñanza, de desafiar a los alumnos a trabajar con todas las partes del proceso de modelización. En principio, todas las situaciones donde se usa la matemática para describir fenómenos o situaciones no matemáticos tienen este potencial. Por supuesto no todos los contextos son igualmente adecuados para desafiar a los alumnos a trabajar con todas las partes del proceso de modelización. Sería sensato trabajar con los diferentes sub-procesos de modelización en contextos diversos antes de apuntar a desarrollar competencias de modelización de gran alcance en los alumnos.

> Por competencia en modelización matemática quiero decir ser capaz de llevar a cabo en forma autónoma y conciente todos los aspectos de un proceso de modelización en un contexto dado, cf. con la figura 2.
>
> (Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003)

Por definición las competencias en modelización incluyen las competencias en resolución de problemas. En la mayoría de los casos, la matematización y el análisis del modelo (procesos (c) y (d)) se constituyen en un problema matemático para el que modela y en consecuencia, el proceso de modelización incluye resolución de problemas matemáticos. Pero es importante darse cuenta que es el problema de la vida real el que debería guiar la actividad de modelización y que la resolución del problema está subordinada a él. Desde un punto de vista didáctico es importante que la perspectiva de modelización coloque a la actividad de resolución de problemas en un contexto real e incluya solución de problemas de naturaleza extra-matemática (por ejemplo, procesos (a), (b), (e) y (f) de la figura 2).

Aprendiendo matemática mediante modelización

En el proyecto de desarrollo *Mañanas Matemáticas*, el cual será descripto en una sección posterior, la idea fue desafiar a los estudiantes en el uso de la matemática para describir y analizar algún fenómeno de sus vidas diarias con el fin de (1) motivar el trabajo con matemática, (2) establecer raíces cognitivas sólidas para la concepción, de parte del alumno, de algunos conceptos matemáticos básicos, y (3) experimentar a la matemática como medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria.

El ejemplo de la “ducha matinal” ilustra estas metas. Durante las clases, un muchacho, Morten (por coincidencia, el mismo nombre del autor), para quien la matemática es difícil y no muy interesante, fue desafiado a calcular cuánta agua usaba para su ducha de la mañana. Luego de alguna discusión acerca de cómo podría medirse esto (incluyendo la posibilidad de tomar la ducha de pie en un gran recipiente) Morten decide llevar un balde a la ducha de la mañana siguiente y encontrar cuánto tiempo llevaría llenarlo. Para que esto tengo sentido, el flujo de agua tiene que ser constante durante la ducha y hasta aproximadamente el mismo nivel cada mañana. Morten explica que él, en realidad, cierra el paso de agua al mismo nivel cada mañana. De acuerdo con Morten, lleva exactamente 1 minuto llenar el balde que contiene 6 litros. Sin embargo, Morten ha olvidado controlar cuánto tiempo emplea en ducharse, por lo tanto él no puede calcular qué cantidad de agua usa para una ducha normal. El docente lo desafía a hacer una tabla que muestre la cantidad de agua empleada en ducharse durante 1 a 20 min. Su primer comentario fue "Los 20 minutos deben ser de mi hermana". Luego, Morten fue motivado también a realizar un gráfico y escribir una ecuación que describan la relación. Esto no fue para nada una tarea simple para Morten. Durante la discusión de los resultados, el docente preguntó a Morten si él tenía que esperar antes de entrar a la ducha para que salga el agua tibia. Morten concuerda con esto, y se tomó la tarea de medir cuánta agua tibia fluye antes de que sea confortable entrar a la ducha.

Para la clase siguiente, Morten había encontrado que 3 litros de agua tibia tenían que circular antes de que él pudiera entrar a la ducha, y que su baño demoraba 7 minutos, incluyendo el lavado del cabello. Luego de subsiguientes discusiones con el docente, Morten toma la tarea de incluir los 3 litros de agua en sus cálculos del agua usada en una ducha normal: 6 litros/min. 7 min + 3 litros = 45 litros. Para su poster[3], Morten también produce una tabla, un gráfico (ver figura 3) y la siguiente ecuación para la nueva relación y = 6 litros/min . x + 3 litros, donde x es el tiempo para ducharse en minutos, e y es la cantidad de agua usada en minutos.

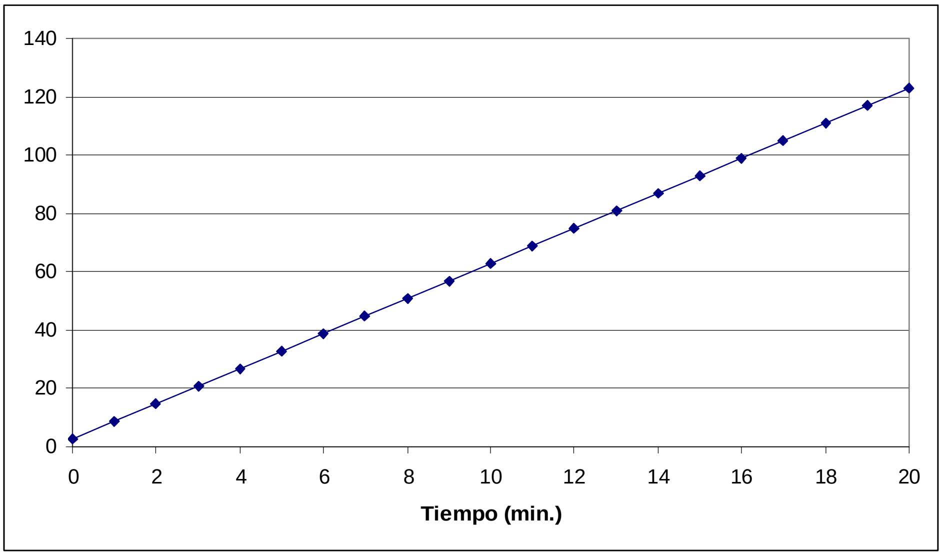

Figura 3. Reproducción del gráfico del poster de Morten

[3] Como parte de la unidad de enseñanza *Mañanas Matemáticas* los alumnos producen un poster tamaño A3 describiendo las situaciones de sus propias mañanas matemáticamente.

Para Morten esta fue la primera vez que él debía establecer una expresión matemática de una función. Sin embargo, él había trabajado con diferentes formas de representación y al hacer esto constantemente usó su conocimiento del contexto. La tabla fue producida añadiendo 6 litros a la cantidad de agua para cada minuto, y subsecuentemente, añadiendo 3 litros de acuerdo al cambio en el modelo. El gráfico se realizó marcando los pares de valores dados en la tabla. Al hacer esto, Morten se dio cuenta que la tabla y el gráfico podían ser usados para encontrar la cantidad de agua para una ducha que dura de 0 a 20 minutos. Desafiado y apoyado por el diálogo con el docente, Morten pudo escribir una ecuación para la función y comprender que la pendiente de la recta era exactamente el flujo que el midió de 6 litros por minuto. Desde un punto de vista didáctico este episodio contiene algunos aspectos importantes. Morten eventualmente generó sus propias motivaciones para modelizar matemáticamente su ducha matinal y además aceptó los desafíos del docente. El diálogo con el docente hizo posible la reflexión sobre la propia experiencia de Morten y el modelo matemático de su ducha matutina. Es también un aspecto importante de este episodio que el contenido matemático del modelo es relevante para el aprendizaje de conceptos matemáticos simples dentro del alcance de cada alumno en particular.

A mi juicio, a través de la modelización de su ducha matinal, Morten ha formado sólidas raíces cognitivas para el aprendizaje del concepto de función y de las diferentes representaciones conectadas a la recta del gráfico. Además, Morten es capaz de interpretar su ducha matemáticamente, y como fue discutido con el docente, de cambiar la pendiente de la recta del modelo según lo desee al cambiar el flujo del agua, dentro de ciertas limitaciones.

Tal experiencia y reflexión son ciertamente una buena base para el aprendizaje del concepto de pendiente de una función lineal. Morten no tenía conocimiento formal acerca de la modelización matemática antes del episodio, y los aspectos modeladores de su trabajo no se hicieron explícitos para él por parte del docente. Sin embargo, la planificación del curso y las interacciones del docente con los alumnos fueron guiados por la idea de enseñar matemática a través de actividades de modelización, y tal como fue demostrado, el ejemplo puede ser descripto y analizado con referencias a las etapas de un proceso de modelización. El potencial para el aprendizaje de este episodio yace en la reflexión del alumno conectada a los procesos (a), (b) y (c) en el proceso de modelización, y el conocimiento del profesor sobre modelización guió el diálogo con su alumno.

La modelización matemática como práctica de enseñanza

Tal como fue sugerido, la modelización matemática es una tarea difícil. El docente tiene que colocar una situación donde los alumnos puedan trabajar con un fenómeno o situación de la vida diaria que les sean familiares y que les permita poner en juego su conocimiento matemático en un proceso de modelización. Colocar el escenario para actividades de modelización es un elemento crucial en la enseñanza de la modelización matemática[4]. La descripción general del proceso de modelización (ver figura 2), las sub-competencias de modelización, tanto como los elementos de justificación pueden ser usados como herramientas para la planificación de actividades de enseñanza. A continuación, presentaré un modo de plantear el escenario para actividades de modelización en los niveles iniciales de la escuela secundaria.

Mañanas Matemáticas

Mañanas Matemáticas es un proyecto de desarrollo llevado a cabo por un investigador (el autor) y un docente de matemática (Mikael Skånstrøm) en una escuela experimental en Dinamarca (ISPF, Rødovre) trabajando conjuntamente para diseñar, implementar en el aula, observar y analizar una unidad de enseñanza para alumnos de 8vo grado, quienes fueron desafiados a usar la matemática para modelizar un fenómeno de sus mañanas de todos los días. El curso comienza con la siguiente introducción dada por el docente:

Mañanas Matemáticas

El reloj despertador suena. Tu mano intenta alcanzarlo y se cae de la mesa. Lo encuentras y lo apagas. Te das vuelta en la cama y tratas de imaginar que es sábado, pero lentamente sientes que algo interesante va a ocurrir hoy. Ahora lo recuerdas, Mañanas matemáticas con Mikael y Morten. A las 8:00 estarás con tus compañeros trabajando en la descripción de tu mañana matemática. Un día excitante te está esperando … Te pones los anteojos matemáticos listo para observar tu mañana matemáticamente.

¿Cuánta agua usas para lavarte los dientes y cuánto tiempo dura un tubo de pasta dental? ¿Qué ocurre con la ducha? La matemática también puede encontrarse en los modos en que distribuyes tu tiempo en la mañana, o cómo llegas a la escuela.

Tu tarea

Realizar observaciones cuidadosas de lo que ves con tus anteojos matemáticos desde que te levantas hasta que llegas a la escuela. Tus observaciones deben ser descriptas y analizadas matemáticamente y presentadas a través de historias coherentes sobre tus mañanas cotidianas. Las historias y tus reflexiones deben ser presentadas en un póster con un bonito diseño. Tienes cuatro módulos (4 x 90 minutos) a tu disposición. Todos deben hacer su propio póster, pero se los alienta a trabajar juntos ayudándose unos a otros. Dos profesores estarán disponibles para ayuda y discusión durante esos períodos.

[4] El concepto de colocar el escenario es presentado y discutido en Skovsmose, 1994.

Los 48 alumnos (divididos en dos equipos) se involucraron todos en la tarea aún cuando no estaban acostumbrados a esta forma de enseñanza de la matemática. Todos estos alumnos de 8vo grado son nuevos ingresantes en la escuela y este proyecto se presentó justo dos meses después del comienzo del año escolar. Todos, salvo uno de los alumnos, produjeron posters de tamaño A3 con historias acerca de sus propias mañanas y sus contenidos matemáticos. La mayoría de los posters fueron organizados cuidadosamente y producidos con colores y gráficos de computadoras. Casi todos tenían cálculos y representaciones gráficas basados en datos propios de los alumnos. Cerca de un tercio de los alumnos tenían fórmulas escritas y explicaban sus cálculos en palabras y dándoles valores a sus figuras. Muy pocos posters contenían reflexiones sobre los métodos usados o sobre los resultados obtenidos. Sin embargo, cuando eran cuestionados por uno de los docentes la mayoría de los alumnos fueron capaces de reflexionar sobre su trabajo y resultados.

Al elegir qué observar muchos alumnos se inspiraron en la breve introducción del docente. Los tópicos más comunes incluían: distribución de tiempos para rutinas matinales y transporte, representados en diagramas circulares; distribución energética y precios de diferentes productos para el desayuno; medios de transporte, costos, tiempo usado y velocidad (promedio). A estos hay que agregar que muy pocos temas de interés más personal fueron observados por los alumnos (por ejemplo, temas relacionados a las mascotas, o al número de posibles combinaciones de vestidos en el guardarropa). Con el fin de alentar a los alumnos a decidir por ellos mismos qué podría ser de interés, es necesario colocar el escenario y dar a los alumnos una idea de las posibilidades. Sin embargo, nuestra experiencia muestra que estos ejemplos concretos son factibles de ser copiados por los alumnos. Este es un dilema que debería ser considerado en la planificación práctica.

Los resultados de nuestro análisis del proyecto se resumen en las siguientes líneas:

— Todos los alumnos parecen gustar de la idea de describir sus propias mañanas matemáticamente. El nivel de compromiso fue alto y nadie cuestionó la relevancia del proyecto.

— Los alumnos emplearon mucho tiempo en asuntos prácticos como recolectar datos y diseñar los posters.

— Los alumnos se ayudaron e inspiraron entre ellos, y acudieron al profesor frecuentemente.

— Casi todos los alumnos realizaron cálculos y variadas representaciones gráficas de sus propios datos.

— Con el fin de reflexionar sobre sus descripciones matemáticas los alumnos necesitaron el estímulo y apoyo de los profesores.

El proyecto produjo varias situaciones de “canal abierto”, donde un alumno se mostró ansioso por tener que aprender matemática nueva para su trabajo. Esta forma verdaderamente abierta de montar el escenario para las actividades de modelización de los alumnos permite la oportunidad de trabajar con el proceso de modelización completo, pero las “Mañanas Matemáticas” desafió a los alumnos a trabajar especialmente con la primera parte del proceso de modelización (es decir, procesos (a) y (b)). Sin embargo, se necesita de una consiguiente enseñanza si las experiencias individuales de cada alumno durante el curso deberán servir como base para la comprensión del proceso de modelización matemática. La calidad del curso tiene mucho que ver con los aspectos afectivos del proceso de aprendizaje. La puesta en escena motivó al alumno a trabajar independientemente, usando la matemática para describir y analizar situaciones de su vida diaria. Para muchos de los alumnos el curso les abrió los ojos para ver a la matemática en su propia vida diaria.

Debo notar que la forma en que se hizo la puesta en escena puede cambiarse fácilmente con el fin de dar directivas más específicas acerca del fenómeno o problema que el alumno debería abordar. Sería posible así guiar a los alumnos en actividades de modelización que involucren métodos o conceptos matemáticos que sean de particular relevancia. Sin embargo, esto debería ponerse en la balanza junto con el efecto motivador de dar al alumno la libertad de elección, y la posibilidad de desafiarlos a trabajar también con la formulación del problema, proceso (a), del proceso de modelización. En realidad, a la misma clase se le propuso luego modelar un fenómeno que tenía que ver con velocidad y esto fue usado como punto de partida para la enseñanza sistemática del concepto de velocidad.

La modelización matemática como una teoría para la práctica

Una teoría sobre modelización matemática se funda en las definiciones de modelo matemático, modelización, y competencia en modelización. Pero la teoría, la cual aún está en desarrollo, es más que sólo estas definiciones y una comprensión general de la modelización matemática tal como fuera mostrado en la figura 2. La teoría también incluye una justificación de la modelización matemática como elemento esencial de la enseñanza de la matemática en los distintos niveles del sistema educativo, como así también, sugerencias y reflexiones sobre cómo implementar la modelización en diferentes contextos educativos (Niss, 1989). La justificación de la modelización como un elemento de la enseñanza de la matemática en la educación general ha sido tema de investigación en educación matemática durante años[5]. Aquí, brevemente establezco cuáles son los tres argumentos más importantes a favor de la modelización matemática, como elemento central en la enseñanza general de la matemática aún desde edades tempranas.

[5] Niss (1989) propone una discusión sobre el problema de justificación y un vistazo general sobre distintos tipos de justificación.

1. La modelización matemática tiende puentes entre la experiencia de vida diaria de los alumnos y la matemática. Esto motiva el aprendizaje de la matemática, provee de directo apoyo cognitivo a las conceptualizaciones de los alumnos y coloca a la matemática en la cultura, como medio de describir y entender situaciones de la vida diaria.

2. En el desarrollo de sociedades altamente tecnológicas, las competencias para establecer, analizar y criticar modelos matemáticos son de crucial importancia. Este es el caso tanto desde una perspectiva individual en relación a las oportunidades y desafíos educativos y en el mundo laboral, como desde una perspectiva social en relación a las necesidades de una fuerza laboral adecuadamente educada.

3. Los modelos matemáticos de distinto tipo y complejidad están jugando roles importantes en el funcionamiento y formateado de sociedades basadas en la alta tecnología. Por lo tanto, el desarrollo de competencias expertas y seculares en criticar modelos matemáticos y la forma en que son usados para la toma de decisiones se está convirtiendo en un imperativo para el mantenimiento y futuro desarrollo democrático.

Por supuesto, la modelización matemática tiene diferentes significados en los distintos niveles educativos y no se les debería dar igual importancia a estos argumentos en todos los niveles. En los primeros años de la escuela media, los alumnos usan la matemática para describir situaciones de su vida diaria, aún sin darse cuenta, en un principio, de que están trabajando con la modelización matemática. Habitualmente, la enseñanza puede conducir a la consecución del argumento (1)[6]. Sin embargo, ya en los primeros años de la escuela media es posible desafiar a los alumnos a llevar a cabo proyectos de modelización completos y a reflexionar sobre sus resultados.

El proyecto “Mañanas Matemáticas” puede ilustrar en realidad la posibilidad de enfocar en uno de estos tres argumentos de justificación al, deliberadamente, hacer la puesta en escena para el trabajo de modelización de los alumnos. En este contexto, desearía enfatizar que la teoría de modelización matemática es útil para la planificación educativa y práctica de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en todos los niveles. Mi experiencia con investigación del desarrollo usando modelización matemática en los niveles iniciales de la escuela secundaria (Blomhøj, 1993; Blomhøj y Skånstrøm, 2002), en los niveles superiores (Blomhøj, 1991), en la formación de profesores (Blomhøj, 2000) y en el nivel universitario (Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003) muestra que la teoría puede ser una herramienta para la práctica de la enseñanza de la modelización matemática al permitir:

[6] El proyecto de desarrollo “Mañanas Matemáticas” fue deliberadamente direccionado a la realización del primer argumento, ver también Blomhøj y Skånstrøm (2002).

— analizar procesos auténticos de modelización retrospectivamente y adaptar estos para la enseñanza;

— analizar actividades de modelización de los alumnos;

— identificar los diferentes sub-procesos involucrados en un particular proceso de modelización;

— diseñar episodios de enseñanza y preparar el diálogo que desafíen las sub-competencias;

— comunicar y discutir las metas de un curso de modelización con alumnos y profesores;

— enseñar modelización matemática basada en la experiencia de los alumnos.

La teoría de la modelización matemática se desarrolla más ampliamente a través de la interacción con la práctica de la enseñanza. Experiencias de enseñanza y resultados del análisis de las actividades de modelización de los alumnos proveen nuevos discernimientos sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática[7]. Estos son ejemplos de tales hallazgos:

— Los alumnos generalmente encuentran motivador y relevante trabajar con problemas reales, significando esto problemas relevantes para alguien fuera del aula.

— Situaciones cuasi-auténticas, es decir contextos construidos para la enseñanza, también pueden dar soporte para la construcción de significados para los estudiantes, si son lo suficientemente ricos y son considerados seriamente en la enseñanza.

— El conocimiento matemático, conceptual o procedimental, no es un prerrequisito para las actividades de modelización. La experiencia demuestra que las actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje, crear raíces cognitivas sólidas para la construcción de conceptos matemáticos de parte

[7] Descripciones y reflexiones sobre prácticas similares de modelización matemática están diseminadas en la literatura y pueden ser encontradas en los anales de ICTMA (International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications), ver, por ejemplo, (Niss, Blum y Huntley, 1991), (de Lange, Keitel, Huntley y Niss, 1993) y (Ye, Blum, Houston y Jiang, 2003). Ver también (Gravemeijer y Doorman, 1999) por un enfoque similar (RME) al aprendizaje de la matemática a través de actividades de modelización.

del alumno y ser un modo de desafiar sus conceptualizaciones al ampliar el dominio para las actividades de modelización.

— Las concepciones de los alumnos acerca de la modelización matemática evolucionan muy lentamente y son fuertemente dependientes de la experiencia personal con el proceso de modelización. Esto enfatiza la necesidad de una planificación educativa a lo largo de los diferentes niveles del sistema educativo.

— El conocimiento de los alumnos de los diferentes procesos involucrados en la modelización es importante para la estructuración de sus experiencias.

— Los progresos y obstáculos para el desarrollo de competencias en los alumnos en modelización pueden entenderse en referencia a una descripción de los sub-procesos en modelización matemática. Tal compresión puede apoyar la planificación de la enseñanza.

— Se pueden identificar distintos tipos de obstáculos:

  — Experiencias y conocimientos inapropiados del dominio de las actividades de modelización. (Puede considerarse una parte de los objetivos de enseñanza el desarrollo de tales experiencias y conocimientos).

  — Obstáculos cognitivos, especialmente con respecto a (c) y (d) del proceso de modelización.

  — Obstáculos sociológicos, especialmente con respecto a (a), (b), (e) y (f) del proceso de modelización.

  — Factores afectivos.

Conclusión

Desde la literatura en investigación y mi propia experiencia en la enseñanza de la modelización matemática en todos los niveles, encuentro clara evidencia de los siguientes enunciados relativos a la modelización matemática:

Es posible identificar lo que podría llamarse una teoría para el aprendizaje y la enseñanza de la matemática y que tal teoría puede usarse como base para el desarrollo de la práctica de la enseñanza de la matemática.

En particular, esto es cierto para la enseñanza de la matemática en los niveles iniciales de la escuela secundaria. La modelización matemática en este nivel puede *ser vista como una forma de aprender matemática así como una meta formativa en sí misma.*

La teoría ha sido desarrollada y continuamente se está desarrollando a través de la interacción entre la reflexión teórica y el desarrollo de las prácticas de enseñanza, y por lo tanto, puede ser considerada como un ejemplo paradigmático de desarrollo teórico dentro de la investigación en educación matemática.

Referencias

Blomhøj, M. (1991). Mathematical modelling at upper secondary level. En M. Niss, W. Blum, y I. Huntley (Eds), *Teaching mathematical modelling and applications* (p. 187–194). London: Ellis Horwood.

Blomhøj, M. (1993). Mathematical modelling in elementary mathematics teaching. En J. de Lange, C. Keitel, I. Huntley, y M. Niss (Eds), *Innovations in maths education by modelling and applications* (p. 257–268). London: Ellis Horwood.

Blomhøj, M. y Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications* 22 (3), 123-139.

Blomhøj, M. y Skånstrøm, M. (2002). Matematikmorgener – et udviklings-arbejde. En I. Holden (2003), *Utvikling av matematikkundervisning i samspill mellom praksis og forskning – nye arbejdsformer i matematikkundervisningen* (p. 61-72). No 1 i skriftserie for Nasjonalt Senter for Matematikk I Opplæringen. Trondheim: NTNU.

Blum, W y otros (2003). *ICMI-Study 14. Applications and modelling in mathematics education*. Discussion Document. Special issue of ICMI – Bulletin (2003).

Gravemeijer, K., Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129.

de Lange, J., Keitel, C.; Huntley, I. y Niss, M. (1993). *Innovations in maths education by modelling and applications.* London: Ellis Horwood.

Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula. En W. Blum, y otros (Eds), Ap*plications and modelling in learning and teaching mathematics*, (p. 22-31). Chicester, UK: Horwood Publishing.

Niss, M., Blum, W., y Huntley, I. (Eds) (1991). *Teaching of mathematical modelling and applications.* London: Ellis Horwood.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Ye, Q., Blum, W., Houston, S.K.; y Jiang, Q. (Eds) (2003). *Mathematical modelling in education and culture: ICTMA 10.* Chichester, UK: Horwood Publishing.

Morten Blomhøj. IMFUFA, Roskilde University. Postbox 260, Dk-4000 Roskilde Denmark.
e-mail: blomhoej@ruc.dk