# UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA CON GEOGEBRA

Claudia DE LOS RÍOS – Victorina del Carmen MARQUEZ
matema_clau@yahoo.com.ar – vmarquez3@hotmail.com
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales- Universidad Nacional de San Juan- Argentina

Tema: V5.- TIC y Matemática
Modalidad: Comunicación breve (CB)
Nivel educativo: Terciario- Universitario
Palabras clave: Derivada, GeoGebra, Educación

**Resumen**

*En nuestra realidad cotidiana estamos haciendo uso constantemente de las TIC, por ello, es lógico pensar que si muchas de nuestras acciones están condicionadas por el manejo de la tecnología, debamos incorporarlas en forma habitual a la educación, para garantizar la alfabetización tecnológica de nuestros estudiantes.*

*Este trabajo tiene como objetivo mostrar una propuesta para la enseñanza del concepto de derivada de una función y sus aplicaciones en un entorno informático usando GeoGebra.*

*El software fue seleccionado por su potencialidad, es un programa dinámico para el Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática y está instalado en las computadoras que reciben los alumnos y docentes del nivel Secundario por el Programa Conectar Igualdad.*

*Se presenta la introducción al concepto de derivada a través de la noción de pendiente de la recta tangente y de la variación instantánea. La posibilidad que brinda el software para calcular y graficar de manera rápida y precisa permite al docente generar estrategias que orienten a los alumnos a apropiarse del concepto de derivada de una función en un punto, contribuyendo así a lograr una construcción colaborativa del conocimiento. Se muestran también ejemplos de aplicación de la derivada en el análisis de una función.*

## Introducción

Es lógico pensar que con el avance de la tecnología en los últimos años y el número creciente de computadoras personales, debamos incorporarlas en forma habitual a la educación de la Matemática y en nuestro caso a la enseñanza del Cálculo.

El aprendizaje del Cálculo y en particular, la conceptualización de la noción de derivada, constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual.

Este trabajo tiene como objetivo mostrar una propuesta que contribuya a la comprensión del concepto de derivada de una función y como ejemplo de aplicación la fórmula de Taylor, en un entorno informático usando GeoGebra.

Coincidimos con Dolores C. en que "*muchos estudiantes sólo pueden obtener derivadas de funciones algebraicas mediante fórmulas, pero difícilmente comprenden el para qué de esos algoritmos que realizan y el significado de los conceptos. Inclusive, difícilmente logran asociar las ideas claves del cálculo en la resolución de problemas elementales sobre la variación*".

La posibilidad que brinda el software para calcular y graficar de manera rápida y precisa permite al docente generar estrategias que orienten a los alumnos a apropiarse del concepto de derivada.

Se supone conocido el manejo básico de GeoGebra, como por ejemplo ingresar una función, evaluarla en un punto, mostrar la recta que pasa por dos puntos, etc.

**Desarrollo**

Las funciones se pueden estudiar de forma estática: ¿cuánto vale esta variable para tal valor de la otra?, o de forma dinámica: ¿con qué rapidez se produce la variación?

Geométricamente la tasa de variación media de una función entre dos puntos (TVM) coincide con la pendiente de la recta secante a la función que pasa por los puntos dados y la tasa de variación instantánea (TVI) o derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

Con el fin de visualizar la variación media de una función e introducir la noción de variación instantánea proponemos la siguiente situación problemática:

Calcular la tasa de variación media para la función $y = \ln x$ entre a=1 y b=2; entre a=1 y b=1,5; entre a=1 y b=1,1; entre a=1 y b=1,01; entre a=1 y b= 1,001 y comparar, para cada caso, estos valores con las pendientes de las rectas secantes en los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)). Trazar la recta tangente a la función en el punto (1, f(1)) y comparar la pendiente de esta recta con la de las rectas secantes trazadas anteriormente.

El ejercicio propuesto se resuelve con los siguientes pasos:

1- Graficamos la función $y = \ln x$

2- Calculamos la TVM teniendo en cuenta la siguiente definición:

Dada una **función** ***y*= *f(x)***, se llama **variación media** (TVM) de la función en un intervalo [a, b] al cociente siguiente:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3- Trazamos, en cada caso, la recta que pasa por los puntos de coordenadas (a, f (a)) y (b, f (b)).

Observamos que el valor de la TVM coincide con la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos de coordenadas (a, f (a)) y (b, f (b)).

4- Trazamos la recta tangente a la función en a=1.

Observando los valores de TVM obtenidos, estamos en condiciones de concluir que a medida que los dos puntos del intervalo [a, b] están lo suficientemente próximos entre sí, el cociente anterior tiende al valor de la pendiente de la recta tangente en x=a. Este valor es la variación instantánea (TVI) de la función en x=a.

El valor de b puede expresarse como b = a + h, siendo h un valor infinitamente pequeño.

$$TVI = pendiente\ de\ la\ recta\ tangente = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En la figura 1 se muestran la vista algebraica y la vista gráfica del ejercicio resuelto

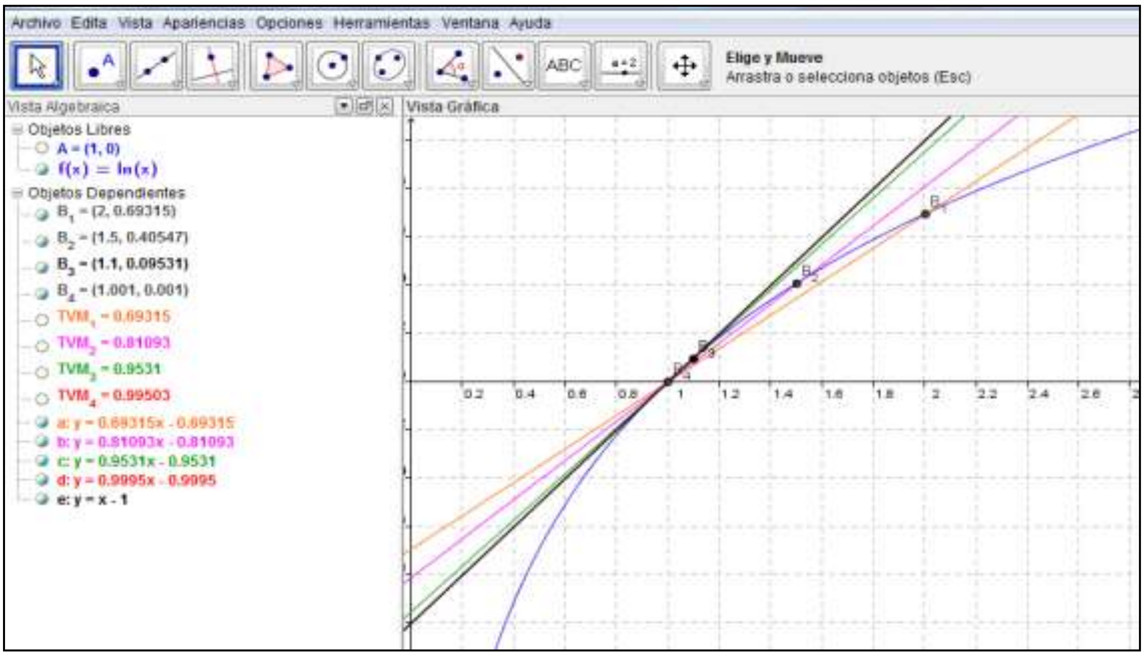


Fig.1 Vista del ejercicio resuelto

Con el fin de observar en forma animada como la sucesión de rectas secantes tienden a la recta tangente presentamos el archivo" "Interpretación geométrica de la derivada" que muestra, con el recurso del deslizador, la conclusión anterior. En la figura 2 se presenta la vista inicial de este archivo.

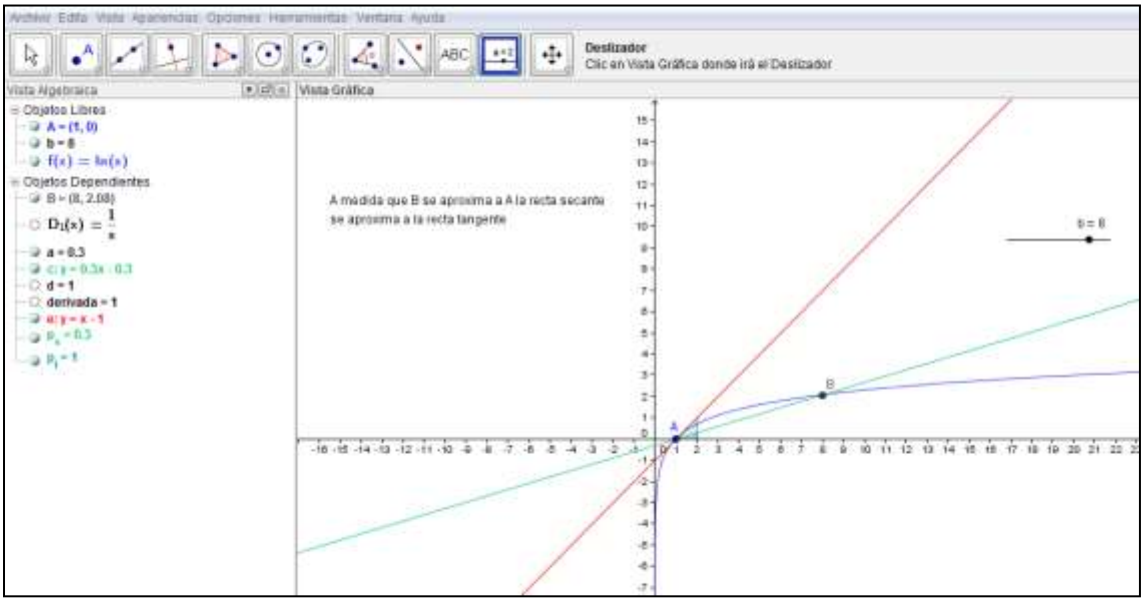


Fig. 2 Interpretación geométrica

Una vez finalizada esta actividad, estamos en condiciones de definir la derivada de la función en un punto y la función derivada que con GeoGebra se obtiene utilizando los siguientes comandos:

**Derivada[<Función> ]**

Da por resultado la derivada de la función respecto de la variable independiente.

**Derivada[<Función>, <Variable> ]**

Da por resultado la derivada parcial de la función respecto de la variable indicada.

**Derivada[<Función>, <Orden n de la Derivada (número o valor numérico)> ]**

Da por resultado la derivada de orden n de la función respecto de la variable independiente.

**Aproximación de funciones**

Entre las aplicaciones de la derivada elegimos aproximación de funciones porque es un tema difícil de comprender geométricamente y además muy arduo de resolver manualmente.

Sabemos que la recta tangente a una función en un punto es aquella recta que pasa por el dicho punto y tiene la misma pendiente que la curva en ese punto (primera derivada en el punto), lo que hace que la recta tangente y la curva sean prácticamente indistinguibles en las cercanías del punto de tangencia. Gráficamente podemos observar que la curva se pega "suavemente" a la recta en este entorno, de tal manera que "de todas las rectas que pasan por el punto, es esta recta la que más se parece a la curva cerca del punto".

La figura 3 muestra la función $y=e^x$, la recta tangente a la función en x=1 y otras rectas que pasan por el punto:

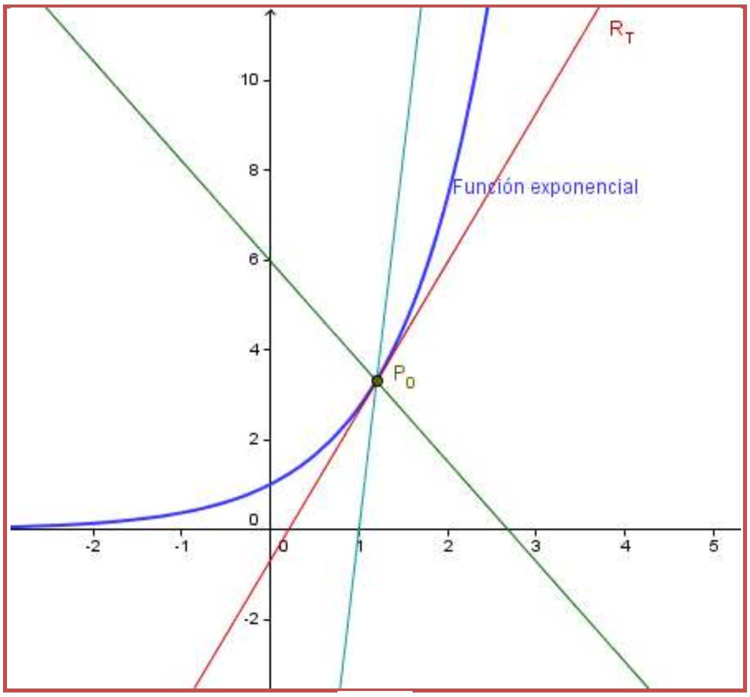


Fig. 3

Nótese que cerca del punto de tangencia, la curva se comporta casi linealmente, si x se encuentra "lejos" de $x_0$, la recta tangente ya no funciona como "aproximador". Parece pues natural preguntarnos por otra función (no lineal) que sirva a nuestros propósitos. La recta tangente es un polinomio de grado 1, el más sencillo tipo de función que podemos encontrar, por lo que podemos tratar de ver si es posible encontrar un polinomio de grado dos o más que nos sirva para aproximar nuestra función en un rango más grande que la recta tangente.

**Teorema de Taylor**

Sea f continua en [a, b] y con derivadas hasta de orden n continuas también en este intervalo cerrado; supóngase que $f^{n+1}(x)$ existe en (a,b), entonces para x y $x_0$ del intervalo (a,b) se tiene:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + E_n$$

Donde $E_n = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ y c es un punto que se encuentra entre x y $x_0$.

Con GeoGebra se puede visualizar con facilidad las distintas aproximaciones a medida que vamos aumentando n.

Para comprobar el teorema enunciado, proponemos hallar las distintas aproximaciones de la función $y=e^x$ en un entorno de $x_0=0$ utilizando el comando **Polinomio Taylor[ ]** haciendo variar el n

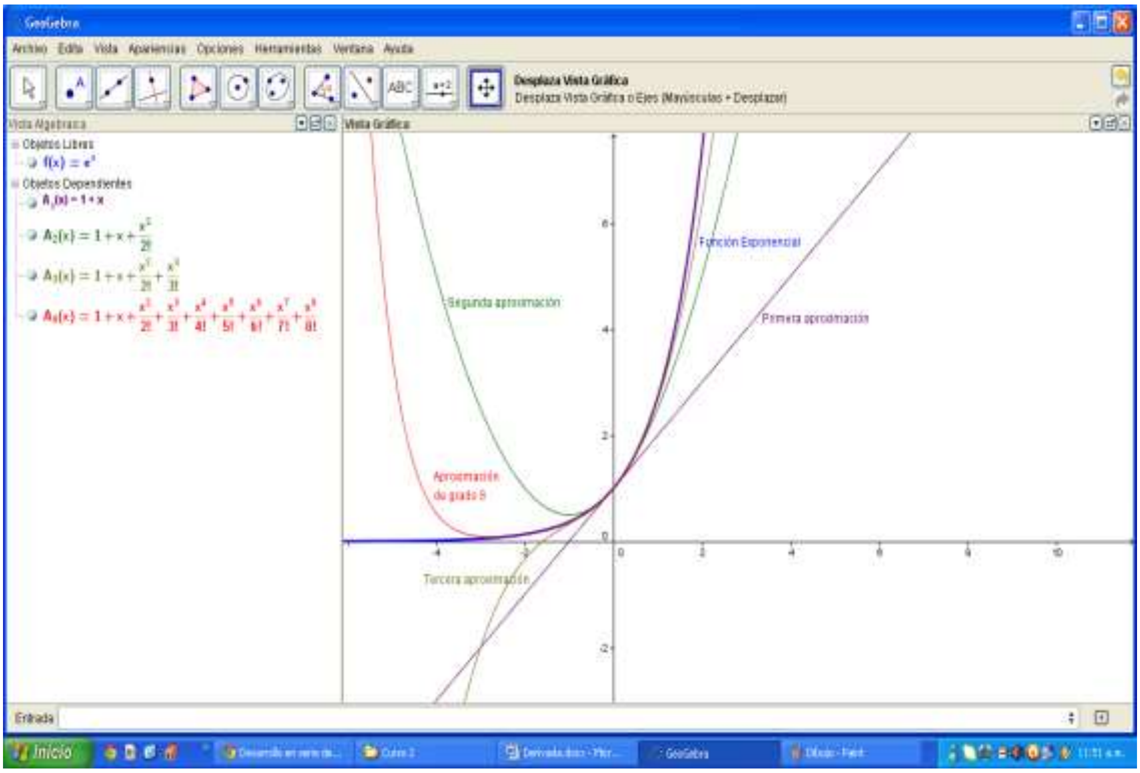

Fig.4 Vista de las aproximaciones de la función exponencial

En la figura 4 vemos que la aproximación por polinomio de Taylor es mejor cuanto más cercano se encuentre x a $x_0=0$ y que para cada valor fijo de x, la aproximación va mejorando conforme aumentamos el grado del polinomio.

## Conclusiones

La introducción del concepto de derivada utilizando recursos tecnológicos resultó interesante tanto para los alumnos como para los docentes. La posibilidad de trabajar cada uno en su propia computadora, contribuyó a un aprendizaje basado en la construcción y reflexión. Ante cada problema presentado el alumno realiza diversas acciones: calcula, interpreta, saca conclusiones, simula nuevas situaciones y se encuentra en condiciones de plantear hipótesis. Consideramos importante incorporar al aula el trabajo con software, sin descuidar el rigor y la formalización requeridos en la enseñanza del Cálculo en la Universidad.

## Referencias bibliográficas

Dolores C. (2000).El futuro del cálculo infinitesimal. Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España. Cantoral R. (coordinador). Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F. pp. 155-181.

Gonzalez de Doña, M., Aguado, L., Gil, Y., De los Ríos, C., Ferrarini, C., Contreras, J., y Sebriano, I. (2011).*Desarrollo de Competencias para gestionar información y construir conocimientos en los nuevos ambientes educativos*. Argentina: Editorial Fundación Universidad Nacional de San Juan.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., y Saidon, L. (2009). *Manual oficial de GeoGebra* Versión 3.2. Disponible http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/index.htm

Purcell, E.,Varberg, D., y Rigdon, S. E. (2001).*Cálculo* (8a. ed.). México: Pearson Educación.