GEOMETRÍA ANALÍTICA CON SOFTWARE

Raúl David Katz, Pablo Agustín Sabatinelli
Facultad de Ciencias Exactas Ingeniería y Agrimensura.
Universidad Nacional de Rosario. Argentina
rdkatz@fceia.unr.edu.ar, pablos@fceia.unr.edu.ar
Niveles Terciario y Universitario

Palabras claves: Resolución de problemas. Geometría analítica. Software.

Resumen
El objetivo esencial de la Geometría Analítica es la resolución de problemas geométricos mediante métodos algebraicos y la interpretación geométrica de los desarrollos algebraicos. A grandes rasgos podemos considerar que la Geometría Analítica se ocupa esencialmente de dos problemas:

- dada la descripción geométrica de un conjunto de puntos, encontrar la ecuación algebraica que cumplen dichos puntos;
- dada una expresión algebraica, describir en términos geométricos el lugar geométrico de los puntos que cumplen dicha expresión.

Los cursos de Geometría Analítica, por lo general, por razones de tiempo y la complejidad de algunos desarrollos, tanto algebraicos como gráficos, tratan un número limitado de tales problemas.
Nuestra propuesta para el taller es abordar una variada colección de problemas, en los que el uso de la herramienta computacional se convierte en un valioso recurso, no sólo para evitar cálculos que resultan tediosos cuando se realizan a mano, sino también, un medio facilitador de representaciones geométricas, a veces difícil o imposible de lograr de otra manera. Es así que el software se convierte en un valioso auxiliar para agilizar cálculos y facilitar la visualización de lugares geométricos. En el taller, en esta oportunidad, adoptamos el software Maple porque consideramos que no es complicado generar animaciones incluso en aquellos casos en los que se utilice el software por primera vez. En tal sentido, Bishop (1989) señala que, el poder generar y manipular imágenes en la computadora estimula las habilidades de visualización mental y la comprensión de ideas algebraicas. Son precisamente éstos algunos de nuestros propósitos de logro.
Las propuestas se orientan a la resolución de problemas de la geometría lineal, del plano y del espacio, problemas de cónicas, superficies cuádricas y regladas como el conoide.

Fundamentos y ejes del taller propuesto
Introducción
El objetivo esencial de la Geometría Analítica, cuyos precursores se consideran Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650), es la resolución de problemas geométricos mediante métodos algebraicos y la interpretación geométrica de los desarrollos algebraicos. A grandes rasgos podemos considerar que la Geometría Analítica se ocupa esencialmente de dos problemas:

- dada la descripción geométrica de un conjunto de puntos, encontrar la ecuación algebraica que cumplen dichos puntos;

- dada una expresión algebraica, describir en términos geométricos el lugar geométrico de los puntos que cumplen dicha expresión.

Los cursos de Geometría Analítica, por lo general, por razones de tiempo y la complejidad de algunos desarrollos, tanto algebraicos como gráficos, tratan un número limitado de tales problemas.

Nuestra propuesta para el taller es abordar una variada colección de problemas, en los que el uso de la herramienta computacional se convierte en un valioso recurso, no sólo para evitar cálculos que resultan tediosos cuando se realizan a mano, sino también, un medio facilitador de representaciones geométricas, a veces difícil o imposible de lograr de otra manera. Es así que el software se convierte en un valioso auxiliar para agilizar cálculos y facilitar la visualización de lugares geométricos. En tal sentido, Bishop (1989) señala que, el poder generar y manipular imágenes en la computadora estimula las habilidades de visualización mental y la comprensión de ideas algebraicas. Son precisamente éstos algunos de nuestros propósitos de logro, a través de las actividades que se proponen.

Las propuestas se orientan fundamentalmente, a la resolución de problemas de la geometría lineal, tanto del plano como del espacio, y problemas de cónicas, superficies cuádricas y regladas como el conoide.

Hemos puesto particular atención en algunas superficies regladas. Se plantean problemas donde las ecuaciones de un hiperboloide de una hoja y de un paraboloide hiperbólico resultan de la definición de los mismos como lugares geométricos de puntos pertenecientes a rectas.

El paraboloide hiperbólico, también llamado silla de montar, tiene secciones que son parábolas con ramas ascendentes y otras secciones en planos perpendiculares a los anteriores que son parábolas con ramas descendentes. Por muy “curvado” que parezca, tiene la propiedad de que, por cualquier punto de su superficie hay dos rectas contenidas en la misma.

El arquitecto catalán Antoni Gaudí (1852-1926), que revolucionó la arquitectura en lo concerniente a la construcción de catedrales, encontraba en el paraboloide hiperbólico propiedades singulares, que han dado lugar a diseños y proyectos muy significativos.

Al concluir el Taller esperamos que los participantes hayan podido vivenciar una forma de trabajo que les permita innovar o recrear su propia práctica docente, vinculada con la Geometría Analítica.

Etapas del Taller

<u>Primera etapa</u>

Trabajo grupal o individual sobre una serie de problemas de geometría del plano y del espacio. En esta etapa interesa la ubicación de los asistentes en la temática del taller desde la apropiación de los problemas como objeto de estudio, con las connotaciones del significado personal de un docente, tanto desde el campo cognitivo como del didáctico.

Segunda etapa
"Plenario": discusión de las resoluciones generadas en la etapa anterior, con registros de las cuestiones emergentes durante la resolución (dificultades, procedimientos alternativos, valoraciones, etc.). Organización tabulada de tales cuestiones.

Tercera etapa
Uso de la herramienta computacional como medio facilitador de representaciones geométricas y como recurso para agilizar cálculos.

Cuarta etapa
Análisis y reflexión sobre la implementación de problemas del tipo a los tratados en el taller, con el objeto de propiciar no sólo el desarrollo progresivo del uso del software en matemática con las virtudes que señala Bishop, sino además el abordaje de problemas que trasciendan la mera ejercitación, que por lo general requiere la aplicación de un mecanismo aprendido y muchas veces automatizado, en el sentido que proponen Cuicas Avila, Chourio, Cadaei Carniel y Álvarez Vargas (2007).

Algunos problemas propuestos para trabajar en el taller (a modo de ejemplo).
Los problemas que se abordarán en el taller, fueron seleccionados de Alsina (2009), Apostol (1979), Arregui Fernández, Lafuente López, Moralez González y Padilla Garví (1985), Kletenik (1968) y Rey Pastor, Santaló y Balanzat (1959). Presentamos aquí una selección de ellos.

1. Determine las ecuaciones de todas las circunferencias que tengan su centro en $C(3, 1)$ y que sean tangentes a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$.
2. Determine la ecuación del lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a las dos circunferencias de ecuaciones: $c_1 : x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$, $c_2 : x^2 + y^2 = 1$.
3. Dados los puntos $O(0, 0, 0)$ y $A(1, 2, 1)$, hallar el lugar geométrico del tercer vértice para que el triángulo OAB tenga área igual a 4.
4. Si en dos planos paralelos se sitúan, respectivamente, una recta r_1 y una curva c_1, es interesante considerar todas las rectas del espacio que se apoyan en r_1, son perpendiculares a r_1 y se apoyan en la curva c_1. Esto es una superficie reglada que se llama conoide. En el caso particular de que c_1 sea una sinusoide resulta la cubierta de Gaudí.

   Halle una ecuación del conoide tomando como r_1 la recta de ecuaciones $\begin{cases} y = 0, \\ z = 3, \end{cases}$ y

como c_1 a la curva de ecuaciones $\begin{cases} y = 3, \\ z = 3 + \operatorname{sen} x. \end{cases}$

5. Halle una ecuación de la superficie formada por las rectas que se apoyan en un punto A perteneciente a la curva $\Gamma_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 1, \end{cases}$ y en un punto B de la curva $\Gamma_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = -1, \end{cases}$ y tal que la distancia entre A y B sea igual a $\sqrt{8}$.
6. Las ecuaciones

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \ \forall\ t \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = s \ \ \forall\ s \\ z = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = u, \\ y = u \ \ \forall\ u \\ z = 6, \end{cases}$$

representan respectivamente a las rectas alabeadas r_1, r_2 y r_3 que se encuentran en planos paralelos. Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos de las rectas que se interceptan con las tres rectas dadas. Represente gráficamente.

Referencias Bibliográficas

Alsina, C. (2009). *Geometría para turistas*. Barcelona: Ariel.

Apostol, T. (1979). *Calculus*. Volumen I. Barcelona: Reverté.

Arregui Fernández, J., Lafuente López, J., Moralez González, I. y Padilla Garvi, F. (1985). *Matemáticas*. Madrid, España: Edita Magisterio.

Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics 11(1)*, 1-5.

Cuicas Avila, M., Chourio, E., Cadaei Carniel, L. y Alvarez Vargas, Z.(2007). El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoras del aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación" 7 (002)*, 1-34.

Kletenik, D. (1968). *Problemas de geometría analítica*. Volumen I y II. Moscú: MIR.

Rey Pastor, J., Santaló, L. y Balanzat, M. (1959). *Geometría Analítica*. Buenos Aires: Kapelusz.