

## ARGUMENTAÇÃO E PROVA DE PROFESSORES DOS NÍVEIS FUNDAMENTAL E MÉDIO DE MATEMÁTICA

Carlos Augusto Aguilar Junior e Lilian Nasser  
[carlosaugustobolivar@hotmail.com](mailto:carlosaugustobolivar@hotmail.com) - [lnasser@im.ufrj.br](mailto:lnasser@im.ufrj.br)  
SME/RJ (Brasil) - PEMAT/IM-Projeto Fundão/UFRJ (Brasil)

Tema: IV.3 - Prática Profissional del Profesorado de Matemática.

Modalidad: MC (Minicurso)

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: hasta Argumentação, prova, ensino-aprendizagem de Matemática, formação de professores de Matemática

### Resumo

*Um dos objetivos do ensino da Matemática na Educação Básica é o desenvolvimento do raciocínio lógico. Verifica-se, entretanto, que em nossas aulas não há, de forma geral, uma atenção especial para o tema e tampouco a propositura de atividades e/ou sequências didáticas que explorem e fomentem o exercício de argumentar e provar em Matemática. Para isto, iremos propor a professores dos ensinos fundamental e médio questões em que será demandado deles que argumentem e/ou provem as proposições colocadas. Dessa forma, tomando como modelo metodológico o trabalho de Hoyles (1997) e com o suporte teórico de Balacheff (1988), iremos levantar e discutir com os participantes os tipos de prova presentes nas respostas apresentadas, ressaltando a importância do conhecimento do assunto para desenvolvê-lo em aula. Também apresentaremos resultados de pesquisas similares realizadas com alunos no ensino fundamental e professores.*

### Introdução

Nos tempos atuais, torna-se cada vez maior a responsabilidade de ensinar Matemática em nossas salas de aula. Criar as competências e habilidades sugeridas pelos planos educativos e parâmetros curriculares é imperativo num mundo que demanda por conhecimento. E uma das mais importantes habilidades a ser construída com nossos estudantes é aquela relativa ao desenvolvimento do raciocínio lógico.

Quando falamos em raciocínio lógico, referimo-nos à possibilidade de nosso estudante ser capaz de ler o problema proposto, interpretá-lo e resolvê-lo seguindo critérios minuciosos, garantindo a sua resposta, de modo convincente e irrefutável. Nesse sentido, no Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1997) priorizam como papel do ensino de Matemática na Educação Básica a “estruturação do pensamento e do raciocínio lógico” (p. 24).

Para isto, os mesmos PCN nos sugerem criar possibilidades em sala de aula que permitam aos estudantes argumentar e justificar matematicamente seus resultados, de

sorte a imbuir neste educando a habilidade de encontrar argumentos convincentes e irrefutáveis àquilo que defende, sendo esta habilidade não somente importante à Matemática, mas também ao cidadão crítico que a Escola ajuda a construir.

Contudo, percebemos que esta capacidade de argumentar e justificar, importante tanto para o desenvolvimento em Matemática quanto para a formação do cidadão crítico, como falamos anteriormente, não é suficientemente tratada e debatida pelos professores em suas aulas de Matemática. Em geral, ao professor, cabe o papel de transmitir conhecimentos, apresentar ou “informar” (Imenes, 1987, p. 57) os resultados e, ao final, aplicar e corrigir uma série de exercícios sobre o tema abordado; aos alunos, cabe acumular as “informações” prestadas pelos professores e realizar as tarefas aplicadas.

Este modelo de ensino-aprendizagem causa a falsa impressão de que o aluno sabe Matemática. Porém, verifica-se que não cumpre seu papel de desenvolver no aluno o raciocínio lógico-dedutivo, que é um dos objetivos para o ensino de Matemática, como se destaca dos PCN (Brasil, 1997):

(...) desenvolvimento no educando da capacidade/habilidade de comprovação, argumentação e justificação, com vistas à formação do cidadão crítico, além de propiciar que a Matemática seja encarada pelo estudante como um conhecimento que possibilita o desenvolvimento de seu raciocínio e de sua capacidade expressiva. (p. 26)

Para desenvolver este raciocínio, é importante que o professor compreenda e aceite diversos níveis de argumentação e justificação que os alunos possam vir a apresentar para comprovar um dado resultado, compreender os elementos cognitivos presentes na faixa etária do educando e os conhecimentos adquiridos até a presente fase escolar. Além disso, é importante, também, que o professor tenha conhecimento sobre a estruturação, os tipos e as funções da prova matemática.

Em nosso minicurso, iremos apresentar algumas questões de Matemática em que os professores participantes deverão provar as afirmações apresentadas e dessa forma iremos mapear o nível/tipo de prova que estes professores produzem. Também serão apresentados aos participantes resultados de nossa pesquisa de mestrado, em que os professores envolvidos avaliaram os tipos de prova de estudantes do ensino fundamental encontradas na resolução de problemas matemáticos (Aguilar Júnior, 2012).

## **Metodologia de Trabalho**

Neste minicurso, em que queremos identificar os tipos de prova que os professores apresentam, focamos o olhar teórico em: a) mapear os tipos de prova dos professores; b) analisar a visão do professor sobre prova matemática e a influência/contribuição da sua formação acadêmica para a construção desta visão.

Inicialmente, serão apresentados os diversos níveis de prova e argumentação sugeridos por Hanna (1990) e Ballacheff (1988). Também apresentaremos os dados que coletamos em nossa pesquisa inicial (Aguilar Junior e Nasser, 2012), onde são tratados os tipos de prova encontrados na intervenção realizada junto a alunos do ensino fundamental, no Brasil.

Inspirados no modelo investigativo do trabalho de Hoyles (1997), os professores participantes deverão registrar suas demonstrações acerca das questões que iremos lhes propor. No segundo momento, em que os dados estarão analisados e tabulados, utilizando a técnica do discurso do sujeito coletivo (Lefrève, 2000), iremos discutir com os participantes as possibilidades didáticas que podem ser elaboradas para introduzir em suas salas de aula atividades em que sejam exploradas a argumentação e a prova matemática, com o objetivo de desenvolver essas habilidades nos seus alunos.

## **Referencial Teórico**

As pesquisas realizadas por Hanna (1990, 1995), Knuth (2002), Healy, Jahn e Pitta Coelho (2007) e Jones (1997) nos ensinam que, ao se debruçar sobre a questão do ensino-aprendizagem de prova matemática, o pesquisador deve voltar o olhar para o trabalho didático-pedagógico do professor em relação à prova matemática, além de se debruçar sobre o estudo da formação acadêmica do professor, levantando informações que possibilitem obter uma visão deste processo formador.

O trabalho de Healy et al. (2007) traz um panorama teórico, citando pesquisas internacionais, revelando as concepções de alunos sobre a prova, como fazem, por exemplo, Sowder e Harel (1998) e Balacheff (1988).

Em Boavida (2005), vemos a preocupação com o desenvolvimento da habilidade de argumentação e justificação em Matemática, importante para o educando aprender a raciocinar lógica e dedutivamente. Ela defende o encorajamento dos alunos, levando-os a se defrontarem com este tipo de atividade, apesar da reconhecida dificuldade e complexidade desta postura didático-pedagógica, mas destaca a necessidade de uma postura metodológica que crie a “cultura de argumentação”.

Holyes (1997), em sua pesquisa, também procura identificar, através da aplicação de formulários contendo questões exigindo uma justificativa matemática, os níveis de argumentação e a existência de concepções de prova de alunos britânicos. Em seu levantamento, que se deu em duas etapas, a pesquisadora indagava dos participantes suas concepções sobre “prova matemática”, buscando verificar se as competências elencadas no currículo britânico com respeito à prova se faziam presentes na formação acadêmica dos alunos, além de constatar, junto aos professores, suas próprias concepções de prova matemática e como se dava o seu processo de ensino-aprendizagem.

A forma de demonstrar na academia, através do rigoroso método axiomático-dedutivo, não estabelece diálogo com a Escola Básica, lugar onde irá atuar o professor. Desse modo, Knuth (2002) afirma que, ao se avaliar as concepções de prova dos professores, deve-se levar em conta o currículo e o nível de ensino em que lecionam. Em seu trabalho, o autor relata estudo realizado com 17 professores atuantes no ensino médio, nos Estados Unidos. Na visão desses professores, a reforma curricular daquele país, que previa o ensino-aprendizagem de prova matemática para todos os alunos da rede de ensino, não seria uma tarefa simples de ser implementada. Os resultados de sua intervenção junto a estes indivíduos sugerem, ainda, que a visão do tema “prova matemática” é a de um assunto/matéria da grade curricular a ser ensinado, e não como uma forma de comunicar e estudar Matemática.

Para identificar e tabular os tipos de prova que os professores virão a apresentar, iremos nos basear em Balacheff (1988), que desenvolveu pesquisa com estudantes da França, identificando dois tipos básicos de prova: o tipo pragmático e o tipo conceitual. Segundo Balacheff (1988, p. 217), prova pragmática é aquela que recorre a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar um determinado resultado, denominados pelo autor como “recursos de ação”, enquanto que a prova

conceitual não recorre a tais recursos no momento de formular as propriedades envolvidas e as possíveis relações entre elas. O que diferencia estas duas “classes” de prova são as estruturas cognitivas, os conhecimentos e a linguagem utilizados.

A prova conceitual, traduzida em Gravina (2001) por prova intelectual, remete-nos às ideias de Jean Piaget, se estabelecermos os estágios de evolução cognitiva dos seres humanos (estágios pré-operatório, operatório concreto e operatório formal) como um paradigma para o movimento de evolução da prova pragmática à prova conceitual, pois neste tipo de prova reside um nível de experiência mental mais avançado, onde o estudante consegue reconhecer padrões, estabelecer generalizações, analisar propriedades do objeto em questão e utilizar a linguagem escrita para apresentar e construir seus argumentos.

Para melhor compreendermos os tipos de prova, vamos considerar a proposição “A soma de dois números pares resulta um número par” e identificar possíveis exemplos de raciocínios em cada um dos tipos de prova acima elencados, conforme a tabela a seguir:

Tabela 1: os tipos de prova de Balacheff e suas descrições e exemplos

TIPOS DE PROVA (BALACHEFF, 1988)	DESCRIÇÃO	EXEMPLOS
Empirismo Natural (naive empiricism)	Define-se empirismo natural o exercício de argumentação em que o aluno tira suas conclusões a partir de um pequeno número de “testes” e “experimentos” que realiza.	Os alunos verificam a validade da afirmativa testando vários exemplos: $12 + 26 = 38$ ; $16 + 20 = 36$
Experimento Crucial (crucial experiment)	Neste tipo de prova, verifica-se a realização de um experimento bastante particular e forte, ou seja, consiste em generalizar o problema e resolvê-lo mediante àquele experimento particular.	Os alunos julgam que, mostrando que a proposição vale com números muito grandes, valerá para todos os demais exemplos possíveis.  Ex: $824 + 632 = 1456$ ; $1890 + 2020 = 3910$
Exemplo Genérico (generic example)	O exemplo genérico, como o termo sugere, é o tipo de prova em que o aluno elege um exemplo como representante da classe de todos os exemplos possíveis que atendem à proposição. Da manipulação deste exemplo tomado, são concluídas propriedades e estruturas.	Ex: $24 + 36 = 2(12 + 18) = 2 \times 30 = 60$ ; $128 + 26 = 2(64 + 13) = 2 \times 77 = 154$ .
Experimento Mental (thought experiment)	Segundo Balacheff (1998, p. 219), o experimento mental “evoca a ação, internalizando-a e desligando-se de uma representação particular”.	Se $p$ e $q$ são números pares, então existem números naturais $m$ e $n$ tais que $p = 2m$ e $q = 2n$ . Então: $p + q = 2m + 2n = 2(m + n)$ , com $p$ e $q$ números naturais. Logo, $p + q$ é par

### Questões a serem ministradas no curso

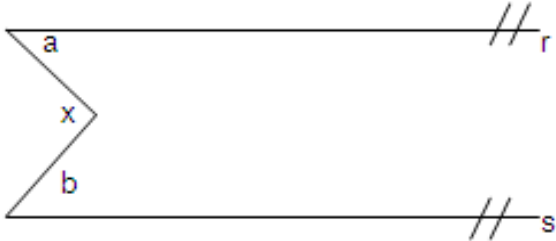
No minicurso, como já destacado anteriormente, iremos levantar, para análise e discussão com os participantes, os tipos de prova que eles apresentam, a partir de respostas que serão dadas a algumas questões.

Em nossa pesquisa (Aguilar Júnior e Nasser, 2012), apresentamos aos professores respostas que alunos deram a estas duas questões:

1) “Verifique se a afirmativa a seguir é falsa ou verdadeira, justificando sua resposta: “A soma de três números consecutivos é um múltiplo de 3””.

Figura 1: questão aplicada a alunos do ensino fundamental e colocada no formulário dos professores.

2) “Na figura que se segue, as retas  $r$  e  $s$  são **paralelas**:



Com base nestas informações, expresse o valor do ângulo  $x$ , em função de  $a$  e  $b$ , justificando sua resposta.”

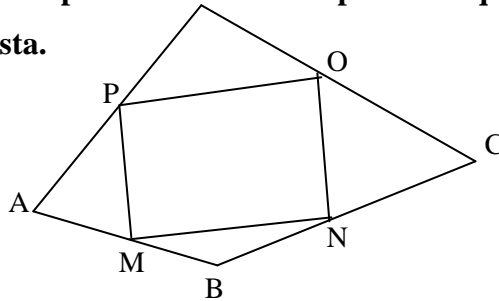
Figura 2: questão aplicada a alunos do ensino fundamental e colocada no formulário dos professores.

Se propusermos estas questões aos participantes, não é arriscado inferir que em sua grande maioria, os professores deverão apresentar, em suas respostas, o tipo de prova conceitual, mais especificamente o experimento mental (Balacheff, 1988). Dessa forma, para que tenhamos um cabedal de respostas, é importante oferecermos aos professores questões com um nível de dificuldade maior.

Assim, iremos aplicar estas duas questões a seguir.

1) **Todo número quadrado perfeito  $A$  é soma dos  $n$  ímpares menores que  $A$ ? Justifique sua resposta.**

2) Seja um quadrilátero qualquer  $ABCD$ . Trace sobre seus lados seus pontos médios  $M$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $P$ . O que se pode afirmar a respeito do quadrilátero  $MNOP$ ? Justifique sua resposta.



Para a questão 1, é possível apresentar um esquema que justifica a afirmativa e a questão 2 se adéqua muito bem a uma exploração com algum software de geometria dinâmica, em que modificando-se o quadrilátero  $ABCD$ , é possível observar que o quadrilátero  $MNOP$  mantém suas propriedades.

### Resultados Esperados

O objetivo geral desta oficina é despertar no professor a necessidade de explorar em suas aulas atividades que visem ao desenvolvimento do raciocínio lógico e da habilidade de argumentar e justificar. Mais especificamente, o objetivo é levantar se os professores levam em consideração os diversos níveis de argumentação apresentados por seus alunos, e os tipos de prova que os próprios professores apresentam. Além disso, estes resultados apresentados serão discutidos com os participantes, assim como sua influência em seu trabalho docente.

Esperamos encontrar, por se tratar o público de professores, uma maior concentração de respostas centradas no tipo de prova conceitual, seja no experimento crucial ou experimento mental.

A longo prazo, esperamos influenciar os participantes no sentido de considerar os diversos níveis de prova apresentados por seus alunos e explorar em sua prática



pedagógica atividades que levem ao desenvolvimento da habilidade de argumentação e raciocínio dedutivo.

### Referencias bibliográficas

- Aguilar Junior, C. A. (2012): *Postura De Docentes Quanto aos Tipos de Argumentação e Prova Matemática apresentados por alunos do Ensino Fundamental*. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Aguilar Junior, C. A. e Nasser, L. (2012): *Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental*. Revista Vydia, vol 32, n. 2, p.133-147. Santa Maria (RS), Brasil.
- Balacheff, N. (1988): *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics*. In: PIMM, D. (ed.), *Mathematics, teachers and children*, pp. 216-235, Hodder & Stoughton, Londres, Inglaterra.
- Boavida, A. M. R. (2005) *A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor*. In: AMRB: XVI SIEM, Lisboa, Portugal.
- Brasil (1997): *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. 88f. Secretaria de Ensino Fundamental – SEF/MEC – Brasília, Brasil.
- Gravina, M. A. (2001): *Os ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético Dedutivo*. 277f. Tese (Doutorado em Informática na Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.
- Hanna, G. (1990): *Some Pedagogical Aspects of Proof*. Interchange (The Ontario Institute for Studies in Education), vol 21, nº 1, pp 6-13, Ontario, Canadá.
- Healy, L., Jahn, A. P., Pitta Coelho, S. (2007) *Concepções de Professores de Matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa*. 24f, In: Anais da 30ª Reunião Anual da ANPEd: 30 anos de pesquisa e compromisso social, Caxambu, Brasil.
- Hoyles, C. (1997): *The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof*. For the Learning of Mathematics 17, 1, pp. 7 – 15, FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada.
- Imenes, L. M. (1987): *A Geometria no primeiro grau: experimental ou dedutiva?*. Revista de Ensino de Ciências (USP), nº 19, pp. 55-61, São Paulo, Brasil.
- Knuth, E. J. (2002) *Teacher's conceptions of Proof in the context of secondary school mathematics*. Journal of Mathematics Teacher Education, 5, 61-88, Holanda.
- Lefrève, F., Lefèvre, A. M. C., Teixeira, J. J. V. (2000). *O discurso do sujeito coletivo: uma nova abordagem metodológica em pesquisa qualitativa*. 138 p., EDUCS, Caxias do Sul/RS, Brasil.