Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática
ISBN: 978-980-7464-17-8

MATEMATIZACIÓN EN LA SIMULACIÓN CON GEOGEBRA

Luis Andrés Castillo B.[1] y **Juan Luis Prieto G.**[1,2]
[1]Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática; [2]LUZ
luiscastleb@gmail.com, juanl.prietog@gmail.com
Matemática y Realidad. Educación Media

RESUMEN

En las últimas décadas, lograr que los estudiantes establezcan vínculos entre la matemática y la realidad representa una cuestión de gran interés para profesores e investigadores en Educación Matemática. Por lo cual, que los estudiantes modelen matemáticamente situaciones problemáticas contextualizadas se ha convertido en una demanda educativa y social. En este sentido, la simulación con GeoGebra representa una oportunidad en la cual los estudiantes puedan establecer dichos vínculos. Vale destacar que en la simulación los estudiantes trascurren por diversos procesos, uno de éstos es la matematización, con el propósito a representar matemáticamente un fenómeno de la realidad o algún aspecto de éste. La matematización en la simulación con GeoGebra da pie a determinar modelos matemáticos con los cuales se representan una realidad o alguna cuestión de ésta. Por esta razón emerge la necesidad comprender este proceso a mayor profundidad. Por lo cual en este trabajo se caracteriza uno de estos tipos, la matematización horizontal en una experiencia concreta de simulación con el GeoGebra en al cual participa un estudiante-liceísta junto a un estudiante para profesor de matemática el cual funge como promotor del aprendizaje. Consideramos que esta primera caracterización de éste procese puede ser de ayuda para promover en los estudiantes cada vez más mate matizaciones horizontales de mayor calidad con los cuales se consigan modelos matemáticos que representen a los fenómenos lo más fiel posible.

Palabras clave: matematización, simulación con GeoGebra, dibujo dinámico, Club GeoGebra.

INTRODUCCIÓN

El auge que en estos últimos años ha tenido la modelación en el ámbito educativo ha traído como consecuencia un creciente interés de los profesores e investigadores de la Educación Matemática por las situaciones problemáticas contextualizadas, consideradas como medios idóneos para conectar la realidad con la enseñanza y el aprendizaje matemático (Font, 2006). Además de generar una conciencia sobre la utilidad de esta ciencia para dotar de sentido a lo cotidiano (De Lange, 1996), la vinculación de la matemática escolar con la realidad se ha convertido en una demanda de la sociedad en general y en todos los niveles educativos (Parra, 2015; Serres, 2015). Aunado a esto, Vasco (2006) manifiesta que las tecnologías digitales agregan potencial a los procesos de modelación matemática debido a las facilidades que éstas ofrecen para la visualización, manipulación y dinamismo en el estudio de fenómenos de la realidad. En este sentido, la modelación de la realidad se asume como un asunto necesario para hacer emerger nuevas matemáticas o reconceptualizar las ya existentes.

Desde el año 2013, el Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática promueve la conformación de Clubes GeoGebra1 en instituciones oficiales de Educación Media de la región Zuliana. Estos clubes se conciben como espacios educativos no convencionales cuya actividad central es la simulación de fenómenos de la realidad. A través de esta actividad se busca que los estudiantes potencien su conocimiento y habilidades matemáticas a lo largo de sus experiencias de simulación. Los simuladores son elaborados mediante el uso del software GeoGebra, una herramienta tecnológica que permite a los usuarios ver y relacionar objetos matemáticos a través de sus diferentes registros de representación (algebraico, geométrico, entre otros), todo en una misma interfaz (Fioriti, 2012; Hohenwarter, 2006). Además, las herramientas y funcionalidades dinámicas del GeoGebra facilitan la creación de modelos computacionales de objetos provenientes de la realidad u otras fuentes (Bu, Spector & Haciomeroglu, 2011).

En la simulación con GeoGebra, los estudiantes interpretan el fenómeno o algún aspecto de éste en términos matemáticos; específicamente, establecen relaciones entre las características espaciales y objetos o propiedades del dominio de la geometría euclidiana y así generando los modelos matemáticos, en este caso geométricos, con los cuales los estudiantes representan su fenómeno en particular. Por lo anterior, consideramos que los estudiantes en experiencias de simulación con GeoGebra transitan por procesos de matematización. Sin embargo, poco se conoce sobre cómo este proceso tiene lugar en experiencia de simulación y, por ende, se requiere comprender la matematización a mayor profundidad. En este sentido, el presente trabajo tiene como objetivo caracterizar la matematización llevada a cabo en experiencias concretas de simulación con GeoGebra en la cual estudiantes liceístas representan en el software un Escape de Áncora y un Péndulo (partes de un reloj de péndulo).

SIMULACIÓN CON GEOGEBRA

La simulación con GeoGebra tiene por fin representar un fenómeno (o un aspecto de éste) por medio del uso del GeoGebra, obteniéndose así un modelo computacional (Bu, Spector & Haciomeroglu, 2011; Rubio, Prieto y Ortiz, 2015). Dadas las características del medio en el que se produce, esta clase de modelo se corresponde con un *dibujo dinámico*, esto es, un dibujo elaborado en un entorno de geometría dinámica y que mantiene invariantes las propiedades y relaciones geométricas que han sido declaradas en su construcción, tras ser arrastrado por alguno de sus elementos libres (Laborde, 1997). Si consideramos la complejidad de las formas y figuras inherentes a todo fenómeno de una simulación, entonces es necesario tener en cuenta que esta clase de dibujos modelan un conjunto de objetos geométricos que se construyen en la *vista gráfica* del GeoGebra, utilizando para ello

1 Para mayor información visite la siguiente página web: www.aprenderenred.com.ve/clubgeogebra

ISBN: 978-980-7464-17-8

las distintas herramientas y funcionalidades dinámicas del software, así como la teoría geométrica encapsulada en éstas.

Vale destacar que los fenómenos a los que nos referimos aquí son sistemas "no-matemáticos" que, por lo general, toman la forma de mecanismos o artefactos cuyo funcionamiento es objeto de simulación por parte de los estudiantes. Algunos ejemplos concretos de estos fenómenos se muestran en Prieto y Gutiérrez (2015). Por todo lo anterior, consideramos a la simulación con GeoGebra como una actividad consistente en la construcción de dibujos dinámicos representativos de fenómenos de la realidad o algunos de sus aspectos constitutivos. La elaboración de estos dibujos se produce por etapas que contemplan la *formulación* y *resolución* de tareas de simulación. Así, cada tarea simulación (asociada a la representación de un aspecto particular del fenómeno) es *formulada* a partir del conocimiento de la realidad y las capacidades de visualización de los sujetos involucrados en el proceso. La *resolución* de estas tareas con el GeoGebra supone construir el dibujo dinámico asociado con aquella parte declarada en su enunciado. Al final de la experiencia, estos sujetos resuelven tantas tareas de simulación como partes del fenómeno son capaces de identificar.

Para resolver una tarea de simulación con GeoGebra los sujetos llevan a cabo un conjunto de acciones, entre las cuales resaltan: (i) la elaboración de un "boceto" de la parte del fenómeno a simular, que facilita una mejor apreciación de las formas y figuras que componen al dibujo de la pieza; (ii) la interpretación de las formas y figuras presentes en el boceto desde el punto de vista matemático de los involucrados; y (iii) la representación de estos objetos geométricos en la vista gráfica del GeoGebra. En relación a lo segundo, la interpretación de las formas y figuras se realiza mediante la traducción de las propiedades espaciales del boceto en objetos o propiedades geométricas. Es aquí en donde se pone de manifiesto un proceso de matematización de la realidad (el fenómeno) que tratamos de conceptualizar en el siguiente apartado.

MATEMATIZACIÓN Y SIMULACIÓN CON GEOGEBRA

Blum y Borromeo (2009) consideran la matematización como un proceso mediante el cual un modelo real se trasforma en un modelo matemático, por lo general, de corte algebraico. Para Hershkowitz (2001) la matematización es un proceso de organización a través del cual los elementos de una situación de contexto son transformados en objetos matemáticos. Una característica común entre estas perspectivas es que mediante la matematización se generan *modelos matemáticos* que representan a la realidad. Otros autores dan cuenta de dos maneras de matematización bien diferenciadas: *horizontal* y *vertical*. (Bu, Spector & Selcuk, 2011; Freudenthal, 1991; Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014; Mason, 2014; Treffers, 1987). Pese a que ambas formas de matematización ocurren durante una misma experiencia de simulación con GeoGebra, en este trabajo el interés es colocado sobre la matematización horizontal, por considerarla una componente esencial de la actividad, ya que en este proceso emergen modelos matemáticos que representan al fenómeno. Sin embargo, la calidad de estos modelos esta en relación directa a promover en los estudiantes procesos de matematización horizontal cada vez más refinados. Por lo anterior, consideramos que este tipo de matematización debe ser comprendido a mayor profundidad.

Heuvel-Panhuizen & Drijvers (2014) consideran a la matematización horizontal como un proceso en el cual la matemática es usada para organizar y estructurar situaciones contextualizadas. De esta manera, los sujetos transitan por dos mundos: el de la realidad del problema contextualizado y el de los símbolos matemáticos. En síntesis, la matematización horizontal se entiende como el mecanismo a través del cual los sujetos interpretan un problema contextualizado (de la realidad) en términos matemáticos. En la simulación con GeoGebra, el proceso de matematización horizontal se pone de manifiesto cuando los sujetos interpretan matemáticamente un boceto alusivo, en principio, a un aspecto particular del fenómeno. Este cambio de interpretación se basa en el manejo de la teoría geométrica por parte de los involucrados, quienes se dan a la tarea de vincular las propiedades espaciales de las formas y figuras presentes en el boceto, con objetos y/o propiedades geométricas que permiten modelar tales formas y figuras en la vista gráfica del GeoGebra.

Con la intensión de ilustrar mejor estas ideas, seguidamente se describe una experiencia concreta de matematización horizontal llevada a cabo durante la simulación con GeoGebra del escape de Áncora y el péndulo que componen al mecanismo de un reloj de péndulo.

EXPERIENCIAS DE MATEMATIZACIÓN HORIZONTAL

La experiencia que se describe a continuación proviene de una sesión de trabajo del Club GeoGebra "Leonor de Fernández", localizado en el municipio Mara del estado Zulia (Venezuela). La sesión se llevó a cabo durante el mes de abril del año 2016 y en ella participaron un estudiante liceísta y un estudiante para profesor de Matemática y Física que actuó como promotor de los aprendizajes. El proyecto abordado en la sesión tuvo el propósito de simular con GeoGebra algunas de las partes que componen a un reloj de péndulo. Durante los 40 minutos de duración de la sesión, los participantes elaboraron y compartieron bocetos del escape de Áncora y el péndulo (las partes del reloj de péndulo) y, posteriormente, asociaron objetos geométricos a las formas y figuras presentes en tales bocetos. Para atender a lo anterior, el estudiante contaba con una imagen2 de referencia en formato GIF en la cual se observa tanto la forma como el movimiento de las piezas que se trabajaban en ese momento (ver Figura 1a), y una imagen estática, editada a partir de la

2 La imagen GIF se muestra en: http://eltamiz.com/images/2010/March/escape-ancora.gif

ISBN: 978-980-7464-17-8

anterior, la cual había sido insertada en la vista gráfica del GeoGebra (ver Figura 1b). Vale destacar que, en esta experiencia, la matematización horizontal se dio tanto en la representación del escape de Áncora como en la del péndulo, por lo que se decidió estructurar esta descripción por apartados.

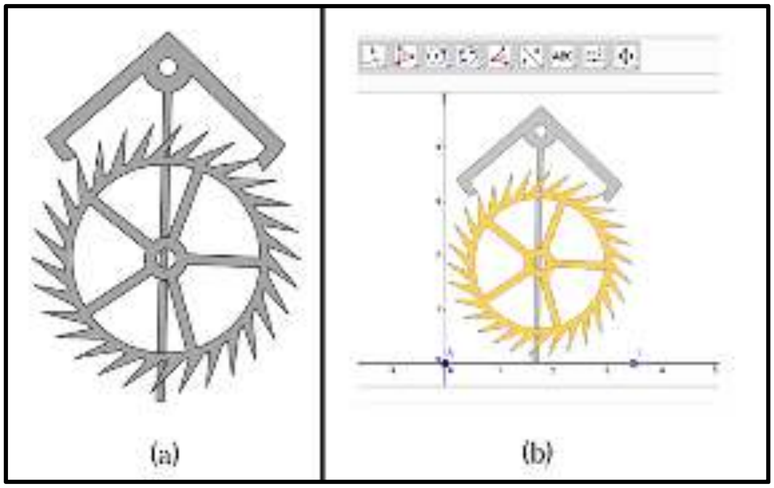

Figura 1. Imágenes de referencia usadas durante la simulación

Matematización asociada a la representación del escape de Áncora

Al inicio de la sesión, el estudiante mostró el boceto del escape de Áncora que previamente había dibujado en su cuaderno de apuntes durante un encuentro anterior (ver Figura 2a). A un lado de este dibujo, el estudiante también contaba con un boceto adicional de la pieza en la que se señalan los objetos geométricos que este sujeto asoció a las formas y figuras que componen al dibujo del escape de Áncora (ver Figura 2b).

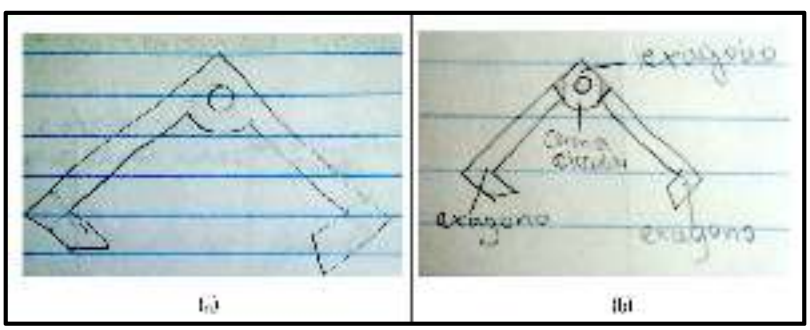
Figura 2. Bocetos del escape de Áncora elaborados por el estudiante

Tras observar la figura 2b, el promotor identificó inconsistencias en la interpretación geométrica de las formas presentes en el boceto, específicamente en lo que respecta a lo señalado como un hexágono en la parte superior del boceto. Al respecto, en el dibujo no se muestra una figura poligonal cerrada, sino cuatro (04) trazos rectos que, para el estudiante, eran lados del polígono. Ante este hecho, el promotor pidió al estudiante realizar el boceto de esta pieza en el pizarrón (ver Figura 3). Este último boceto se diferenció del anterior debido a que en su parte superior se apreciaba una línea poligonal cerrada de cinco (05) lados. Sin embargo, el estudiante aun asociaba esta figura con un hexágono. Frente a esto, el promotor inició el siguiente diálogo con el estudiante:

> Promotor: _¿Cuántos lados tiene esta figura [señalando la forma en la parte superior]?_
> Estudiante: _Uno, dos, tres, cuatro y cinco lados, profesor._
> Promotor: _Ahora, ¿cuántos lados tienen las figuras que señalas como hexágono [señalando las formas en la parte inferior]?_
> Estudiante: _Uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis lados._
> Promotor: _¿Entonces la figura que tiene cinco lados también sería un hexágono?_
> Estudiante: _No profesor, los hexágonos tienen seis lados y esta forma tiene cinco lados. Entonces [el polígono] sería un pentágono._

El diálogo anterior revela cómo el estudiante "refina" su modelo geométrico de la parte del dibujo del escape de Áncora, haciendo un cambio en la interpretación del boceto que comienza a ser visto en razón a un objeto geométrico (pentágono) diferente al anterior (hexágono). En este caso el estudiante, con la ayuda del promotor, transitó desde el mundo de la realidad del mecanismo al mundo matemático de la representación gráfica. Como consecuencia de esta discusión el estudiante generó un nuevo boceto que le permitiría proseguir con la simulación (ver Figura 3).

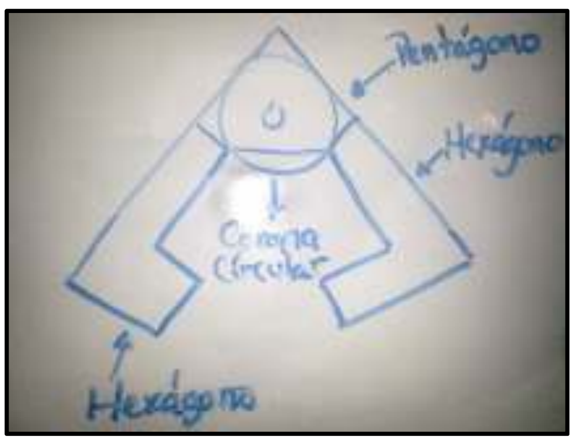

Figura 3. Boceto del escape de Áncora con objetos geométricos señalados

Matematización asociada a la representación del péndulo

La sesión dio inicio cuando el estudiante comparte el boceto del péndulo que había sido dibujado en su cuaderno durante una sesión previa, destacando el movimiento de la pieza mediante flechas (ver Figura 4a). A un lado de este boceto, se mostraba un dibujo del péndulo en el que se señalan los objetos geométricos asociados por el estudiante a las formas y figuras en este dibujo (ver Figura 4b). Ambos gráficos reflejan las conclusiones a las que llegó el estudiante al interpretar el dibujo del péndulo en términos matemáticos.

ISBN: 978-980-7464-17-8

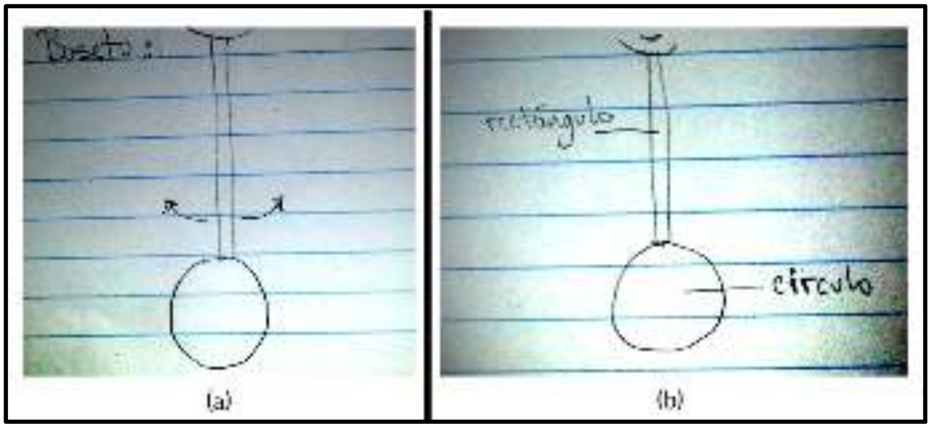

Figura 4. Bocetos del péndulo elaborados por el estudiante

Para ahondar un poco más en la matematización horizontal realizada por el estudiante, el promotor planteó una serie de preguntas referidas a los objetos geométricos identificados y señalados en el boceto, primeramente, considerando el rectángulo y luego el circulo. Tales preguntas se muestran en el siguiente diálogo:

Promotor: *¿Por qué decides representar la forma de la parte superior del péndulo con un rectángulo?*

Estudiante: *Porque el rectángulo es una figura que tiene dos lados más cortos que los otros. […] entonces, yo pensé que esta parte [señalando la parte superior del péndulo] debía ser un rectángulo.*

En el diálogo anterior, el estudiante establece una relación entre las propiedades espaciales de la parte superior del péndulo y el rectángulo, objeto geométrico que "encaja" mejor con la forma de la pieza desde su perspectiva. La matematización horizontal de la parte inferior del péndulo se hace a partir de una pregunta hecha por el promotor:

Promotor: *Y con respecto a la otra figura, ¿por qué la relacionas con un círculo?*

Estudiante: *Porque en la mayoría de las imágenes de referencia a relojes de péndulo que miré, el péndulo tiene forma circular y, pues, la figura geométrica con el que podía construirlo era un círculo.*

En la respuesta del estudiante se pone de manifiesto como éste vincula las propiedades espaciales de la parte inferior del péndulo con un círculo, objeto geométrico que mejor representa la forma de la pieza desde su perspectiva.

CONCLUSIONES

Este trabajo representa un primer intento por caracterizar la matematización horizontal en la simulación con GeoGebra. En la experiencia concreta de simulación expuesta, el estudiante hace un cambio en su interpretación del boceto al representar la realidad desde un punto de vista más matemático. En este sentido, el estudiante recompone las formas y figuras presentes en el boceto, asociándoles un conjunto de objetos geométricos que le eran familiares e ideales para representar las piezas trabajadas. Además, se pudo notar que la emergencia de los modelos geométricos asociados a la pieza dependió, en gran medida, de la teoría geométrica conocida por el estudiante y de la mediación del promotor de aprendizajes, quien en esta experiencia cumplió diversos roles, uno de estos fue el de validar los modelos matemáticos y el de guiar al estudiante (mediante preguntas puntuales) para promover en éste un proceso de matematización horizontal de mayor robustez.

Otra característica de la matematización horizontal es que de ésta emergen *tipos de modelos geométricos*. Debido a que, por un lado, en esta experiencia se evidenció la emergencia de un modelo "compuesto", es decir, un modelo matemático compuesto por más de un objeto geométrico a la vez. Al respecto, este tipo de modelo se puso de manifiesto en la interpretación del boceto asociado al escape de Áncora, cuando el estudiante evocó los objetos pentágono y hexágono para su representación en la vista gráfica del GeoGebra. Y, por otro lado, otras experiencias de matematización dan cuenta de la emergencia de modelos "únicos" o "singulares", esto es, modelos que surgen de la identificación de un único objeto geométrico capaz de representar la totalidad del dibujo en el boceto. Vale destacar que este último no se evidenció en la experiencia presentada en este trabajo.

En la experiencia descrita se destacan indicios de que la simulación con GeoGebra es una actividad apoyada en la matematización horizontal. Sin embargo, una característica fundamental de la simulación es reproducir los movimientos característicos de los fenómenos tratados. Dado que en las experiencias comentadas en este trabajo no se evidencia esta cuestión, consideramos necesario profundizar en el estudio de la matematización horizontal en los momentos en que se aborde la simulación del movimiento del fenómeno, atendiendo a interrogantes como: ¿Con la matematización horizontal solo se da pie a emerger modelos matemáticos para representar forma del fenómeno?, ¿Generar modelos matemáticos para simular los posibles movimientos de un fenómeno es propio de la matematización vertical?

REFERENCIAS

Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application,* 1(1), pp. 45-58.

Bu, L., Spector, J. M. & Haciomeroglu, E. S. (2011). Toward model-centered mathematics learning and instruction using GeoGebra: A theoretical framework for learning mathematics with understanding. En L. Bu y R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra*. (pp. 13-40). Netherlands: Sense Publishers.

De Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in education. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education.* Vol. 1 (pp. 49-97). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Fioriti, G. (2012). Prólogo. En R. Ferragina (Ed.), *GeoGebra entra al aula de matemática*. Buenos Aires: Miño y Davila.

Font, V. (2006). Problemas en un contexto cotidiano. *Cuadernos de pedagogía*, 355, 52-54.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hershkowitz, R (2001). *Acerca del razonamiento en geometría.* Recuperado de http://www.euclides.org/menu/articles/article104.htm

Heuvel-Panhuizen, M. & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Dordrecht: Springer

Hohenwarter, M. (2006). *Dynamic investigation of functions using GeoGebra*. Trabajo presentado en el Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education, Julio, Dresden.

Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig. (Ed.), *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática* (pp.33-48). México: Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Mason, J. (2014). Questioning in Mathematics Education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 513-519). Dordrecht: Springer.

Parra, H. (2015). El necesario pero difícil diálogo entre la matemática escolar y la realidad de los estudiantes. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 28, (pp. 137-144). Distrito Federal, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Prieto, J.L. & Gutiérrez, R.E. (2015). *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo: A. C. Aprender en Red.

Serres, Y. (2015). Perspectivas de la educación matemática en Venezuela para el siglo XXI. En X. Martínez & P. Camarena (Eds.), *La educación matemática en el siglo XXI*. (pp. 297-318). Mexico: Coordinación Editorial de la Secretaría Académica, Unidad Profesional "Adolfo López Mateos".

Rubio, L., Prieto, J.L. & Ortiz, J. (2016). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI)*, 2, 90-111.

Treffers, A. (Ed.). (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco (Ed.), *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos*. (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.