



Construcción de entornos para analizar funciones trigonométricas con GeoGebra

Óscar Alexi **Ocampo** Guillén
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Honduras

Oscar.ocampo@upnfm.edu.hn

Dania María **Orellana** López
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Honduras

dm.orellana@upnfm.edu.hn

Resumen

El uso de recursos digitales, concretamente de software educativo para la comprensión de conceptos matemáticos cada día gana más importancia y necesidad en el quehacer educativo. Lo que resulta una motivación y a la vez una exigencia para generar espacios que fortalezcan su incorporación en las aulas de clase, y poder trascender el mero uso para dar paso a redefinir la forma de aprender y enseñar matemáticas. El objetivo de este taller es promover habilidades, tanto para el uso como para la creación de entornos virtuales, que potencien el análisis de las funciones trigonométricas seno y coseno mediante el uso de diferentes registros de representación que ofrece el software educativo GeoGebra. De esta forma se facilita la visualización de las relaciones o cambios producidos por los parámetros que actúan sobre estas funciones, afianzando de mejor forma la comprensión del concepto matemático en estudio.

Palabras clave: Funciones trigonométricas, GeoGebra, construcción de entornos, análisis de parámetros, educación matemática.

Recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas

Las tendencias actuales en la enseñanza y aprendizaje de la matemática han destacado la importancia del uso de la tecnología como un medio que permite al estudiante construir, conjeturar, modelar, visualizar conceptos matemáticos con mayor facilidad y de forma muy versátil. Es así que se han generado cambios sustanciales en la forma de cómo los estudiantes aprenden matemáticas con cada uno de los ambientes virtuales que pueden emplearse, ya que proporcionan condiciones para que los estudiantes identifiquen, investiguen y comuniquen

distintas ideas matemáticas. Barrera y Santos (citados en Gamboa, 2007) sostienen que el uso de la tecnología puede llegar a ser una poderosa herramienta para que los educandos logren crear diferentes representaciones de ciertas tareas y sirve como un medio para que formulen sus propias preguntas o problemas, constituyendo así un importante aspecto en el aprendizaje de las matemáticas.

Con la incorporación de tecnología en la práctica educativa, es de pensar que las estrategias didácticas se han diversificado según los propósitos y recursos definidos, por lo que los docentes son llamados de forma ineludible a la incorporación de tecnologías que potencien el aprendizaje. En este sentido, González (2013) apunta que el fortalecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes es indispensable, pues las nuevas generaciones exigen nuevos métodos de enseñanza y aprendizaje, razón por la cual los docentes deben responder a esas necesidades. Por su parte, Gómez (1997) sostiene que los docentes deben aprovechar la tecnología para crear espacios en los que el estudiante pueda construir un conocimiento matemático más amplio y con mayor solidez que el logrado con medios convencionales, como el lápiz y el papel. Sin embargo, las experiencias matemáticas serán productivas siempre que se tenga en cuenta la complejidad del contenido matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas, y desde luego las dificultades y las necesidades de los estudiantes.

A pesar de ello, una realidad es hablar del analfabetismo tecnológico existente entre los docentes, en un alto porcentaje, esto como derivado del cambio generacional y digital, lo que requiere una serie de propuestas que ayuden a solucionar o amortiguar esta brecha. En tal sentido, se considera que el reto primordial de la innovación tecnológica consiste en un cambio en la mentalidad del docente, tanto en su área laboral como en su ámbito personal, de acuerdo a las exigencias de la sociedad. El principal problema de los docentes de la generación digital, es que la sociedad actual cambia muy rápidamente, ante esto Gros y Silva (2005) señalan que los profesores están en desventaja porque se han formado y se están formando con una cultura y una visión del significado de su profesión que ya ha cambiado.

Valles (2012) en su investigación “Aceptación y/o rechazo al uso de las tecnologías en el aula. Caso: profesor de matemática” plantea que los docentes muestran rechazo al uso de las tecnologías debido a que la mayoría tienen avanzada edad, y poseen muchos años trabajando con el mismo programa didáctico; por otro lado el uso de tecnología implica dedicar mayor tiempo para el aprendizaje y preparación de sus contenidos didácticos; sumada la inexperiencia o falta de seguridad en la utilización de las nuevas tecnologías. Sin embargo, existen docentes con pocos años en las universidades y de menor edad a los cuales, simplemente, no les gusta utilizar las nuevas tecnologías aunque sepan manejarlas; en contraste otros docentes están de acuerdo que los contenidos matemáticos se tornarían más dinámicos y amigables con el uso de las tecnologías (software, programas, paquetes matemáticos), y por consiguiente su aprendizaje sería muy significativo.

En cualquier escenario que se posicionen los docentes requieren de conocimientos pedagógicos sobre el uso de las tecnologías. En la actualidad, estas tecnologías representan una fuente de influencia y generación de modelos, patrones sociales y valores que nos hacen necesariamente reflexionar en los procesos de aprendizaje y los procesos de enseñanza. Existe consenso hoy en día de que se necesitan más y mejores docentes para

responder a las demandas que plantea la era del conocimiento. Los docentes, ya sea aquellos que están en ejercicio como los que recién ingresan al campo laboral, deben estar en condiciones de aprovechar los diferentes recursos tecnológicos para incorporarlos en forma efectiva en su práctica y desarrollo profesional. Es por eso que se han diseñado estándares que permitan un mejor ejercicio de las TIC en la educación (Silva, Gros, Garrido & Rodríguez, 2006).

Aunque se le ha dado un gran impulso a las nuevas tecnologías, aún muchos profesores rechazan el uso de computadoras, inclusive de calculadoras, porque creen que su uso inhibirá otras habilidades. Por su parte Hitt (1998b) señala que el profesor de matemáticas sentirá la necesidad del cambio cuando se le presenten materiales y estudios que muestren la efectividad de la tecnología en el aula, en donde se muestre un concepto inmerso en una situación problema y donde se busque el adecuado sistema de representación para visualizarlo. El principal aporte de la tecnología consiste en que la interacción entre ella, el profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico.

El surgimiento de diferentes recursos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas y su incorporación en el salón de clases, exige que sea el propio profesor de matemáticas quien introduzca conceptos de las matemáticas apoyándose en estos recursos tecnológicos. Según Arcavi y Hadas (citados en Gamboa, 2007), indican que la existencia de los recursos tecnológicos plantea a los profesores de matemáticas el reto de diseñar actividades innovadoras que tomen ventaja de aquellas características con potencial para apoyar nuevos caminos de aprendizaje.

La inclusión de estrategias innovadoras, que involucren recursos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas, es un tema que ha tomado mucha importancia con los principios que atañe el Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM, 2000), los cuales son: Equidad, Currículo, Enseñanza, Aprendizaje, Evaluación y Tecnología. Este último en su sentido más amplio, resulta esencial en la enseñanza y el aprendizaje, ya que influye en las matemáticas que se enseñan y mejora del proceso de aprendizaje de los estudiantes. Las tecnologías específicas como, por ejemplo, las electrónicas (calculadoras y computadoras) son herramientas muy útiles para enseñar, aprender y hacer matemáticas. De igual manera, ofrecen representaciones de instrucciones basadas en axiomas, teoremas y leyes matemáticas, facilitan la organización y análisis de los datos y permiten que se hagan modelaciones y cálculos de manera eficiente y exacta.

En general, debe tenerse presente que la inserción de la tecnología en la educación proporciona a los docentes muchas posibilidades de enseñanza variada y dinámica que facilitara en gran medida el aprendizaje de los estudiantes. Lindo y Gómez (2010) evocan que:

La incorporación de las TIC en los procesos educativos, abre un abanico de posibilidades y horizontes para ofrecer otros modelos educativos en donde las tecnologías pueden ser concebidas como apoyo o complemento a la educación, trayendo consigo las posibilidades de crear otras metodologías de enseñanza, potenciar modalidades de aprendizaje, estructurar nuevos sistemas organizacionales, viabilizar la ampliación de cobertura, ofrecer gran diversidad de recursos, enriquecer los procesos de interacción, lograr innovaciones en la práctica educativa, entre otros. (p. 2)

Es probable que la escuela deba entender que se requieren nuevos modelos de educación para que el docente pueda incorporar las TIC, no solo para realizar con mayor eficiencia tareas habituales sino para llevar a cabo procesos nuevos e innovadores que permitan explorar otras

formas de pensar y hacer educación. “El conocimiento tecnológico es condición necesaria para avanzar en la integración de las TIC, pero no resulta suficiente para innovar”. (Vaillant, 2013, p. 7)

Con lo dicho hasta ahora parece que es imparable la modificación continua en la forma de enseñar las matemáticas usando las TIC. Arrieta (2013, p.17) afirma que el uso de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas tiene valiosas influencias positivas en el aprendizaje de los alumnos, las cuales deben considerarse, entre las que se encuentran:

- Posibilitan que los estudiantes interactúen con las matemáticas, facilitando su comprensión y mejora en sus aprendizajes.
- La observación de conceptos matemáticos a través de una imagen que puede ser manipulada y que reacciona a las acciones del alumnado ayuda en su comprensión.
- Mejora la capacidad del alumnado en tareas como organizar y analizar datos, así como en la realización de cálculos de forma eficaz.
- Aumentan la capacidad del alumnado para tomar decisiones y comenzar a resolver problemas.
- Potencian el desarrollo de la capacidad de razonamiento, la elaboración de modelos y, sobre todo, la preparación para llegar a resolver problemas de mayor complejidad.

El Consejo Nacional de Profesores de Matemática expresa que “cuando las herramientas tecnológicas están disponibles, los estudiantes pueden concentrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas” (NCTM, 2000, p. 25). Además, permiten a los estudiantes con pocas destrezas simbólicas y numéricas desarrollar estrategias para poder resolver situaciones problemáticas, utilizando diversas herramientas que les proporcionan un mejor entendimiento. El integrar recursos tecnológicos a las clases de matemáticas es más que usar un recurso o herramienta, implica redefinir la forma de aprender y enseñar matemáticas.

En este sentido, se hace alusión al abordaje teórico de Duval (1998), quien sostiene que la comprensión de conceptos matemáticos se ve favorecida por actividades que involucran conversiones o transformaciones entre diferentes registros de representación de un mismo objeto. Es así que, las actividades propuestas por los profesores deben estar orientadas al uso de la visualización, entendida esta, como la capacidad de relacionar distintas representaciones de un mismo objeto matemático. Siguiendo a Duval, las representaciones son notaciones verbales, simbólicas o gráficas mediante las cuales se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, como también sus características y propiedades.

Los recursos tecnológicos, especialmente el software educativo, propician una variedad de representaciones de objetos matemáticos que ayudan al estudiante a visualizar las relaciones matemáticas o conversiones de un registro a otro (gráfico, algebraico, tabular). Además, estas herramientas informáticas cada vez mejoran visualmente las formas de representación con el uso de animaciones, así como la interactividad que permiten al usuario al manipular virtualmente el objeto matemático. En esta línea, el taller persigue generar un espacio de descubrimiento y construcción en el análisis de las funciones trigonométricas de seno y coseno, mediante diferentes actividades que orientan la articulación de los registros gráficos y algebraicos por medio de la manipulación por

parámetros desde GeoGebra con casillas de entrada, lo que potencia las actividades hechas con solo papel y pizarra.

GeoGebra y las funciones trigonométricas

Desde casi cualquier perspectiva científica, el estudio de las funciones trigonométricas es una necesidad. En la mayoría de los casos los primeros encuentros con este tipo de función, se produce en los últimos años del nivel secundario, en los grados de 10° a 12° que constituyen el bachillerato. Este acercamiento a las funciones trigonométricas se realiza desde las asignaturas de Matemáticas y Física, sin duda su estudio y análisis se extiende al nivel superior o terciario en áreas en las que existen fenómenos cuyo comportamiento posee características periódicas a saber: la Biología, Química, Física, entre otras. Es así que los estudiantes deben apoderarse o interiorizar de la mejor forma la comprensión de estas funciones para su futura aplicación. Por lo que se ha considerado de gran importancia preparar a los maestros que imparten dicha temática, de manera que puedan potenciar el estudio de las funciones trigonométricas con la ayuda del software GeoGebra.

El software GeoGebra es un recurso tecnológico, de gran alcance si se sabe aprovechar, ofrece muchas ventajas para facilitar la enseñanza de la matemática y desde luego su comprensión o aprendizaje. Geo que enuncia a la Geometría y Gebra al Álgebra, sin embargo ha evidenciado más áreas para su aplicación como la estadística, ecuaciones diferenciales, análisis numérico, entre otras. Pone a la disposición de sus usuarios la oportunidad de dinamizar las matemáticas mediante diferentes formas de representación, visualización y simulación, trasciende su uso al permitir crear objetos de aprendizaje incorporando botones, deslizadores y casillas de entrada. Sumado a esto tiene la fortaleza de funcionar en varios sistemas operativos lo que le permite llegar a más usuarios, es de acceso libre y de constantes actualizaciones lo que le hace aún más llamativa en escuelas, colegios e inclusive en universidades.

Considerando la importancia del uso de las tecnologías para la enseñanza de las matemáticas y el potencial que encierra GeoGebra, se ha considerado el desarrollo de este taller que guíe la creación y uso del recurso tecnológico para el análisis de funciones seno y coseno, facilitando la visualización de sus registros de representación, relaciones, propiedades y características, usando para ello la metodología de laboratorio.

El taller pretende que los participantes construyan el entorno necesario para el análisis de las funciones seno y coseno, de esta manera ofrece la oportunidad de ir más allá del sencillo uso del recurso, ya que incluye la construcción de elementos que facilitan la visualización de los cambios producidos por los parámetros que actúan sobre estas funciones, así como la visualización de sus registros de representación gráfica y algebraica. Para ello el taller cuenta con una secuencia de actividades, paso a paso de cómo desarrollar este entorno y poder después estudiar el efecto que produce los diferentes parámetros sobre las funciones trigonométricas. Estas actividades son acompañadas de una guía de laboratorio, que requiere de respuestas sobre las relaciones y conversiones de las funciones realizadas en el transcurso del taller, con el objetivo de reforzar o profundizar sobre el concepto de parámetros, de esta forma, los docentes contarán con un recurso didáctico para aprovecharlo con sus estudiantes de forma inmediata. El taller comprende cuatro actividades mayores, brevemente se exponen a continuación:

Actividad 1. Familiarización con el interface: Durante aproximadamente 10 minutos, se hará un reconocimiento de las diferentes ventanas que posee el software; vista gráfica, vista algebraica, barra de entrada, entre otros, manipulando algunos de los botones y dibujando ciertas

figuras en la vista gráfica principal, con el objetivo de que los maestros puedan familiarizarse con el software.

Actividad 2. Deslizadores y puntos: Con el objetivo de seguir adaptándose al software, se representará en la vista gráfica la función $f(x) = 3 * \exp(-0.5 * x) * \cos(3 * x)$, se ha decidido utilizar esta combinación de funciones por la agradable forma que tiene su gráfica, luego se creará un punto con coordenadas $(x, f(x))$, esto permitirá mantener el punto sobre la gráfica de la función. Con la ayuda de la herramienta deslizadores y dejar rastro se podrá utilizar la opción animación para que el punto se mueva sobre la gráfica y dibuje ésta en el intervalo que se disponga. También se utilizará la opción lugar geométrico para dibujar $f(x)$, con la idea de comparar ventajas y desventajas entre la opción rastro y lugar geométrico. En este momento del taller el maestro habrá tenido la oportunidad de manipular, durante 20 minutos, herramientas de gran utilidad para el desarrollo de las subsiguientes actividades.

Actividad 3. Construcción del entorno para el análisis de funciones trigonométricas: En esta actividad se crearan casillas de entrada que permitirán cambiar los valores de los parámetros y la función trigonométrica que se desee estudiar, también se introducirá texto inteligente con la idea de observar con claridad el parámetro que se está haciendo variar y los valores que se le asignan. Crear este entorno, dará un aspecto agradable al interface, favoreciendo el estudio posterior de las funciones, esta actividad requiere de unos 30 minutos para una elaboración exitosa.

Actividad 4. Análisis de las funciones seno y coseno: Con el entorno creado en la actividad III, con pequeñas adaptaciones, se podrá estudiar una buena cantidad de funciones, aunque éstas no sean trigonométricas. Pero en esta actividad, se dedicaran los 50 minutos restantes a estudiar especialmente las funciones trigonométricas seno y coseno. En primer lugar se harán cambios sobre los parámetros de la función $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ para poder observar los efectos que tienen algunos valores sobre ésta función, tales como; desplazamientos horizontales, desplazamientos verticales, amplitud y periodo. En el comienzo de la actividad se pedirá a los participantes que contesten algunas preguntas de la guía de laboratorio dada en papel para que puedan comparar sus ideas con los resultados de las pruebas en el software. Durante el desarrollo de la actividad se notará cómo cambian los valores del periodo, frecuencia angular e interceptos.

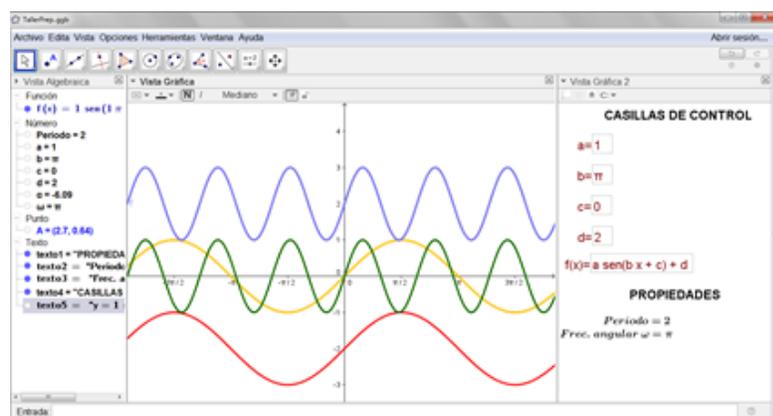


Figura 1. Muestra de pantalla final de la función seno.

Después de haber realizado una inspección a detalle de la función seno, se pedirá a los participantes que hagan un estudio de la función coseno, pero esta vez de forma independiente con la observación del instructor del taller y al finalizar se pedirán conclusiones sobre las observaciones realizadas.

Dada su naturaleza interactiva, el taller conlleva un esencial aporte para el estudio de las funciones trigonométricas de seno y coseno. Se espera que el uso de GeoGebra como recurso educativo genere nuevas formas y espacios en las aulas de clase, haciendo que los estudiantes desarrollen una alta comprensión del efecto que los parámetros ejercen en estas funciones. Así mismo, se espera que la motivación por el uso de tecnología sea el elemento clave que impulse su constante uso en el quehacer del docente de matemáticas. Particularmente, en Honduras, está en proceso la elaboración de los libros de texto oficiales de décimo y undécimo grados, se considera que el taller es una estrategia que vendría a potenciar las ideas que están siendo plasmadas en los textos de matemáticas.

Bibliografía y referencias

- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamericana. (pp.173-201) Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. México.
- Hitt, F. (1998a). *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (Ed.) Grupo Editorial Iberoamericana. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. México.
- Hitt, F. (1998b). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista Educación Matemática*, 10 (1), 23-45
- Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática 2007*, 2 (3), 11-44. Recuperado de <http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6890/6576>
- Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa UNIANDES - LIDIE*, 10(1), 93-111. Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/articles-112562_archivo.pdf
- González, C. A. (2013). *Cartilla TIC para la enseñanza de las matemáticas*. I CEMACYT. Recuperado de <http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/50-415-1-DR-C.pdf>
- Gros B. & Silva J. (2005). La formación del profesorado como docente en los espacios virtuales de aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1(36), 1-12. Recuperado de <http://www.rieoei.org/deloslectores/959Gros.PDF>
- Lindo, M. & Gómez, M. (2010). *La formación docente al incorporar las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Una propuesta para la Universidad Tecnológica de Pereira*. Recuperado de http://revistaraes.net/revistas/raes9_art11.pdf
- NCTM. (2000). *Executive Summary Principles and Standards for School Mathematics*. Recuperado de http://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0CC0QFjAB&url=http%3A%2F%2Fwww.nctm.org%2FuploadedFiles%2FMath_Standards%2F127

[52_exec_pssm.pdf&ei=Sy1_VJy4BYedygTF5IHgCQ&usg=AFQjCNHrgv1d4nw8aJTT3Wc0TA2kB0oKDw](#)

- Silva, J., Gros, B., Garrido, J., & Rodríguez, J. (2006). Estándares en tecnologías de la información y la comunicación para la formación inicial docente: situación actual y el caso chileno. *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(3), 1-16. Recuperado de <http://rieoei.org/deloslectores/1391Silva.pdf>
- Vaillant, D. (2013). *Integración de TIC en los sistemas de formación docente inicial y continua para la Educación Básica en América Latina*. Recuperado de http://www.unicef.org/argentina/spanish/educacion_Integracion_TIC_sistemas_formacion_docente.pdf
- Valles, R. (2012). Aceptación y/o rechazo al uso de las tecnologías en el aula. Caso: profesor de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 1247-1252. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/4427/>