

Sistemas lineales planos de ecuaciones diferenciales y en diferencias:**Un estudio comparativo**

Ana Emilia Ferrazzi de Bressan, Juan Carlos Bressan

ESEADE- Facultad de Farmacia y Bioquímica, UBA

anaferrazzibressan@gmail.com, jbressan@mybfiyb.ffyb.uba.ar

Nivel: Universitario y Capacitación docente

1.- Introducción

Este trabajo tiene como **propuesta de enseñanza** relacionar dos temas que habitualmente se tratan por separado. Nos estamos refiriendo a los sistemas lineales planos de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en diferencias finitas. Ambos sistemas resultan de fundamental importancia en el modelado de diversas ramas de la ciencia y en ciertos aspectos admiten un desarrollo en paralelo donde pueden destacarse las similitudes y las diferencias entre ambos. En tal sentido el estudio se centrará a partir de la transformación lineal inversible que define el sistema, considerando únicamente el caso en que los autovalores de la matriz de dicha transformación sean reales distintos y no nulos. Los autovalores y autovectores de esa transformación lineal serán el nodo cognitivo a partir del cual desarrollaremos el estudio cuantitativo y cualitativo de las soluciones de los sistemas autónomos de primer orden de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en diferencias.

Las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales estarán dadas por funciones vectoriales con dominio R mientras que las de ecuaciones en diferencias, por funciones vectoriales con dominio $N \cup \{0\}$. De allí que mientras la representación gráfica de cada solución en el plano, en el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales será una curva, en cambio en el caso de los sistemas de ecuaciones en diferencias estará dada por una sucesión de puntos del plano los cuales pertenecerán a una curva que llamaremos *curva soporte o sostén*. En ambos casos juegan un rol fundamental las soluciones de línea recta que estarán determinadas por cualquiera de los autovectores correspondientes a cada autovalor.

La transformación lineal del sistema en la base canónica $E = \{I, J\}$ se expresará mediante la

matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ que, por lo dicho anteriormente, tendrá determinante no nulo y

autovalores λ_1, λ_2 reales distintos y no nulos. En este caso escribiremos, $T_E(X) = A X$ indicando como subíndice la base E , en la cual estamos expresando la transformación lineal. Las expresiones como sistema, en forma matricial y mediante la transformación lineal en la base canónica $E = \{I, J\}$ están dadas, para ambos sistemas de ecuaciones, en el siguiente cuadro.

Sistemas de ecuaciones diferenciales:	Sistemas de ecuaciones en diferencias:
$t \in R$	$k \in N \cup \{0\}$
$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) \\ x_2'(t) = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) \end{cases}$	$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11} x_1(k) + a_{12} x_2(k) \\ x_2(k+1) = a_{21} x_1(k) + a_{22} x_2(k) \end{cases}$
Expresiones	Expresiones
matricial y mediante la transformación T_E :	matricial y mediante la transformación T_E :
$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$
$X'(t) = A X(t)$, $X'(t) = T_E(X(t))$,	$X(k+1) = A X(k)$, $X(k+1) = T_E(X(k))$
donde	donde
$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$	$X(k+1) = \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix}, X(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}.$

Resolver los sistemas anteriores utilizando directamente la matriz A resulta en general complicado por cuanto dicha matriz puede no ser diagonal. La idea consiste en encontrar una matriz diagonal B semejante a la A , de tal forma de obtener un sistema equivalente más sencillo de resolver. Esta misma idea es válida para sistemas de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en diferencias.

2.- Matrices semejantes y sistemas equivalentes

Para facilitar la lectura recordaremos algunas nociones que usaremos en este trabajo. Utilizaremos *transformaciones lineales* $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, es decir funciones que satisfacen que si $U, V \in \mathbb{R}^2$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $T(aU + bV) = aT(U) + bT(V)$. Para cada base de \mathbb{R}^2 existe una matriz de orden 2, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, que permite expresar la transformación lineal en dicha base. Así si trabajamos con la llamada *base canónica* $E = \{I, J\}$ cuyos vectores son $I = (1; 0)$ y $J = (0; 1)$, la transformación lineal quedará expresada para todo $X \in \mathbb{R}^2$ mediante $T_E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde $T_E(X) = Z = A X$ y tanto X como $T_E(X)$ estarán expresados en la base E , es decir $X = (x_1; x_2) = x_1 I + x_2 J$, $Z = (z_1; z_2) = z_1 I + z_2 J$. En forma matricial:

$$T_E(X) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas de los vectores en la base E están dadas por determinados pares ordenados. Si consideramos una nueva base E' , en general serán distintos los pares ordenados que definirán el mismo vector, es decir, cada vector tendrá otras coordenadas. Si queremos expresar en la base E un vector cuyas coordenadas $(y_1; y_2)$ están dadas en la nueva base E' utilizaremos una matriz de paso P para efectuar el cambio de coordenadas. Si un vector $V \in \mathbb{R}^2$ se expresa en la base E con $X = (x_1; x_2)$ y en la base E' con $Y = (y_1; y_2)$, entonces $X = P Y$. Como P es una matriz de cambio de coordenadas, tendrá inversa P^{-1} resultando $Y = P^{-1} X$ mediante la cual se podrá pasar de las coordenadas $X = (x_1; x_2)$ a las $Y = (y_1; y_2)$. Una transformación lineal que en la base E se expresa utilizando la matriz A , en la nueva base E' se expresará mediante una matriz B . Las coordenadas $(x_1; x_2)$ en la base E de un determinado vector se convertirán en $(y_1; y_2)$ en la base E' . Los pares ordenados $(x_1; x_2)$ y $(y_1; y_2)$ representarán el mismo vector pero en distintas bases.

La transformación lineal $T_E(X) = A X$, donde el dominio y el codominio se expresan en la base E , tomará en la base E' la forma $T_{E'}(Y) = B Y$. Estas matrices que representan la misma transformación lineal pero en diferentes bases se llaman *matrices semejantes*.

En efecto, por definición dos matrices A y B del mismo orden son *semejantes* si existe una matriz inversible P , llamada *matriz de paso*, tal que $A = P B P^{-1}$. La expresión anterior es equivalente a $A P = P B$ y a $B = P^{-1} A P$, multiplicando según corresponda por P^{-1} o P .

En nuestro caso, si A tiene autovalores reales distintos y no nulos λ_1, λ_2 , entonces la matriz

B que consideraremos será $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, que resulta ser semejante a la A , tomando la

matriz de paso $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ cuyas columnas $P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ y $P_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ son autovectores de

los autovalores λ_1 y λ_2 , respectivamente. Esto puede verse fácilmente calculando los productos $A P$ y $P B$, con lo que se observa que $A P_1 = \lambda_1 P_1$ y $A P_2 = \lambda_2 P_2$.

Los autovectores P_1 y P_2 son linealmente independientes y en consecuencia forman una nueva base del espacio vectorial R^2 . De esta forma, la misma transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2$ podrá expresarse en dos bases distintas mediante las matrices semejantes A y B , obteniéndose las expresiones $T_E(X) = A X$ en la base canónica E y $T_{E'}(Y) = B Y$ en la base $E' = \{P_1, P_2\}$. La matriz de paso P es la que nos va a permitir realizar el cambio de coordenadas de la base E' a la base canónica E . En efecto, sabemos que $Y = P^{-1}X$. En consecuencia, como $T_{E'}(Y) = B Y$, resulta $P T_{E'}(Y) = P B Y = P B P^{-1}X$, pero $P T_{E'}(Y) = T_E(X)$, en consecuencia $P B P^{-1} = A$, lo cual justifica la definición de matrices semejantes.

Aplicaremos las nociones de Álgebra Lineal que hemos dado a los sistemas de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en diferencias. Para esto veamos primero cual es el significado del transformado en cada uno de los casos.

En los sistemas de ecuaciones diferenciales:

(1) $X'(t) = A X(t)$ es equivalente a $X'(t) = T_E(X(t))$, donde $t \in R$.

(2) $Y'(t) = B Y(t)$ es equivalente a $Y'(t) = T_{E'}(Y(t))$, donde $t \in R$.

En los sistemas de ecuaciones en diferencias

(i) $X(k+1) = A X(k)$ es equivalente a $X(k+1) = T_E(X(k))$, con $k \in N \cup \{0\}$

(ii) $Y(k+1) = B Y(k)$ es equivalente a $Y(k+1) = T_{E'}(Y(k))$, con $k \in N \cup \{0\}$.

Utilizando las nociones antes dadas abordaremos un desarrollo en paralelo de los sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias destacando las similitudes y las diferencias entre ellos.

Sistemas de ecuaciones diferenciales

$$t \in R$$

(1) $X'(t) = A X(t)$ sistema original.

(2) $Y'(t) = B Y(t)$, sistema *estandarizado*.

Los sistemas (1) y (2) son equivalentes. Consideremos que $Y(t)$ satisface la ecuación

(2) y veamos que $X(t) = P Y(t)$ satisface la ecuación (1). En efecto, si $Y(t)$ es solución de (2), por linealidad de la derivación es

$$X'(t) = P Y'(t) = P B Y(t) = P B (P^{-1}X(t))$$

Puesto que $A = P B P^{-1}$, resulta

$$X'(t) = (P B P^{-1}) X(t) = A X(t).$$

Luego, $X(t) = P Y(t)$ es solución de (1).

En consecuencia, para resolver el sistema (1) alcanza con resolver el (2) cuya expresión matricial y como sistema en la base E' está dada respectivamente por:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \end{cases}.$$

Resolvemos la ecuación $y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t)$. Si

$y_1(t)$ no se anula, resulta $\int \frac{y_1'(t)}{y_1(t)} dt = \int \lambda_1 dt$.

Sistemas de ecuaciones en diferencias

$$k \in N \cup \{0\}$$

(i) $X(k+1) = A X(k)$ sistema original.

(ii) $Y(k+1) = B Y(k)$ sistema *estandarizado*.

Los sistemas (i) y (ii) son equivalentes. Consideremos que $Y(k)$ satisface la ecuación

(ii) y veamos que $X(k) = P Y(k)$ satisface la ecuación (i).

Puesto que para todo $k \in N \cup \{0\}$ vale $X(k) = P Y(k)$, así como $k+1 \in N \cup \{0\}$,

resulta $X(k+1) = P Y(k+1)$. Luego,

$$X(k+1) = P B Y(k) = P B (P^{-1}X(k))$$

Como $A = P B P^{-1}$, se obtiene

$$X(k+1) = (P B P^{-1})X(k) = A X(k).$$

Así, $X(k) = P Y(k)$ es solución de (i).

En consecuencia, para resolver el sistema (i) alcanza con resolver el (ii) cuya expresión matricial y como sistema en la base E' está dada respectivamente por:

$$\begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} y_1(k+1) = \lambda_1 y_1(k) \\ y_2(k+1) = \lambda_2 y_2(k) \end{cases}.$$

Resolvemos la ecuación $y_1(k+1) = \lambda_1 y_1(k)$.

Así, $\ln |y_1(t)| = \lambda_1 t + h_1$, y $|y_1(t)| = e^{h_1} e^{\lambda_1 t}$, es decir, $|y_1(t)| = k_1 e^{\lambda_1 t}$ con $e^{h_1} = k_1 > 0$. Luego, $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ con $c_1 \neq 0$. Por otra parte, $y_1(t) \equiv 0$ también verifica la ecuación. Luego, su solución general es $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ con $c_1 \in \mathbb{R}$, siendo $c_1 = y_1(0)$. Análogamente, $y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t)$, tendrá por solución general $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$ con $c_2 \in \mathbb{R}$. En consecuencia,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Puesto que $X(t) = P Y(t)$, resultará

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

o como sistema

$$\begin{cases} x_1(t) = p_{11} c_1 e^{\lambda_1 t} + p_{12} c_2 e^{\lambda_2 t} \\ x_2(t) = p_{21} c_1 e^{\lambda_1 t} + p_{22} c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

o también

$$X(t) = P_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + P_2 c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

donde $P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ son, respectivamente, autovectores de λ_1 y λ_2

3.- Análisis cualitativo de los sistemas estandarizados

En el estudio cualitativo de los sistemas anteriores juegan un papel fundamental los autovalores λ_1, λ_2 , reales distintos y no nulos, de la matriz A y sus autovectores. Dicho estudio se ve simplificado si trabajamos con los sistemas estandarizados dados por la matriz equivalente B de los autovalores. El pasaje a los sistemas originales consistirá en aplicar la matriz de paso P .

A continuación efectuaremos el estudio en paralelo de los sistemas estandarizados de ecuaciones diferenciales y en diferencias, caracterizando el tipo de punto de equilibrio a partir de las soluciones de línea recta, que en este caso estarán dadas por los ejes coordenados y_1, y_2 .

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales estandarizado dado en (2) cuya expresión matricial es $Y'(t) = B Y(t)$.

Vimos que su solución general es

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \text{ donde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

El *punto de equilibrio* es aquél que satisface la ecuación vectorial $Y'(t) \equiv \vec{0}$.

Si partimos de $y_1(0) = c_1$, obtenemos

$$y_1(1) = \lambda_1 y_1(0) = \lambda_1 c_1,$$

$$y_1(2) = \lambda_1 y_1(1) = \lambda_1 (\lambda_1 c_1) = \lambda_1^2 c_1.$$

Si suponemos $y_1(n) = c_1 \lambda_1^n$, obtenemos

$$y_1(n+1) = \lambda_1 y_1(n) = \lambda_1 (c_1 \lambda_1^n) = c_1 \lambda_1^{n+1}.$$

Así, queda probado por inducción que

$$y_1(k) = c_1 \lambda_1^k, \text{ donde } c_1 = y_1(0).$$

Si $y_1(0) = 0$, entonces $y_1(k) \equiv 0$.

Análogamente, $y_2(k+1) = \lambda_2 y_2(k)$, tendrá

por solución general $y_2(k) = c_2 \lambda_2^k$ con $y_2(0) = c_2 \in \mathbb{R}$. En consecuencia,

$$Y(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1^k \\ c_2 \lambda_2^k \end{pmatrix}.$$

Puesto que $X(k) = P Y(k)$, resultará

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1^k \\ c_2 \lambda_2^k \end{pmatrix} \text{ o}$$

$$\begin{cases} x_1(k) = p_{11} c_1 \lambda_1^k + p_{12} c_2 \lambda_2^k \\ x_2(k) = p_{21} c_1 \lambda_1^k + p_{22} c_2 \lambda_2^k \end{cases} \text{ o bien,}$$

$$X(k) = P_1 c_1 \lambda_1^k + P_2 c_2 \lambda_2^k.$$

Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias estandarizado dado en (ii) cuya expresión matricial es $Y(k+1) = B Y(k)$.

Vimos que su solución general es

$$\begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1^k \\ c_2 \lambda_2^k \end{pmatrix}, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

El *punto de equilibrio* es aquél que satisface la ecuación vectorial $Y(k+1) \equiv \vec{0}$.

Dicha solución se obtiene si tomamos $c_1 = c_2 = 0$, en cuyo caso su trayectoria u órbita se reduce al conjunto unitario $\{\vec{0}\} = \{(0;0)\}$.

Las *soluciones de línea recta* son aquellas cuyas trayectorias están contenidas en una recta. Evidentemente, tomando $c_1 \neq 0$ y $c_2 = 0$, obtendremos las soluciones cuyas trayectorias u órbitas están sobre el eje y_1 . Análogamente, si $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$, tendremos que las soluciones cuyas trayectorias u órbitas estarán sobre el eje y_2 .

Para los sistemas de ecuaciones diferenciales obtendremos las *soluciones de línea recta*:

$$(S_I) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ si } c_1 \neq 0 \text{ y } c_2 = 0.$$

$$(S_{II}) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \text{ si } c_1 = 0 \text{ y } c_2 \neq 0.$$

Para los sistemas de ecuaciones en diferencias obtendremos las *soluciones de línea recta*:

$$(S_I) \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1^k \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ si } c_1 \neq 0 \text{ y } c_2 = 0.$$

$$(S_{II}) \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \lambda_2^k \end{pmatrix}, \text{ si } c_1 = 0 \text{ y } c_2 \neq 0.$$

El comportamiento de las soluciones de línea recta difiere esencialmente para los sistemas de ecuaciones diferenciales y los de ecuaciones en diferencias. En ambos casos haremos nuestro estudio, en paralelo, sobre las soluciones de línea recta cuyas trayectorias u órbitas están sobre el eje y_1 ya que el comportamiento para las soluciones cuyas trayectorias u órbitas están sobre el eje y_2 es análogo.

Para los sistemas de ecuaciones diferenciales, las soluciones de línea recta (S_I) tienen por trayectorias semirrectas abiertas del eje y_1 , con origen en (0;0).

El sentido de recorrido de la trayectoria, acercándose al origen o alejándose de él, cuando $t \rightarrow +\infty$, estará dado por el signo de λ_1 . En efecto,

$$\text{Si } \lambda_1 > 0, \lim_{t \rightarrow -\infty} c_1 e^{\lambda_1 t} = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} c_1 e^{\lambda_1 t} = \infty$$

$$\text{pues, } \lim_{t \rightarrow +\infty} c_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{cases} +\infty & \text{si } c_1 > 0 \\ -\infty & \text{si } c_1 < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Si } \lambda_1 < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} c_1 e^{\lambda_1 t} = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow -\infty} c_1 e^{\lambda_1 t} = \infty$$

$$\text{pues, } \lim_{t \rightarrow -\infty} c_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{cases} +\infty & \text{si } c_1 > 0 \\ -\infty & \text{si } c_1 < 0 \end{cases}.$$

Observaciones:

Si $\lambda_1 = 0$, entonces $y_1(t) \equiv c_1$ y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = c_1.$$

Para los sistemas de ecuaciones en diferencias, las soluciones de línea recta (S_I) tienen por órbitas subconjuntos del eje y_1 , finitos o infinitos numerables. Estas órbitas están contenidas en un único semieje, si $\lambda_1 > 0$. Pero si $\lambda_1 < 0$, entonces los puntos de la órbita correspondientes a k par estarán en un semieje y los correspondientes a k impar en el semieje opuesto.

Cuando $k \rightarrow +\infty$, los puntos de la solución se acercarán al origen o se alejarán de él, según sea $|\lambda_1| \neq 1$.

En efecto,

$$\text{Si } |\lambda_1| > 1, \text{ entonces } \lim_{k \rightarrow +\infty} c_1 \lambda_1^k = \infty.$$

$$\text{Si } |\lambda_1| < 1, \text{ entonces } \lim_{k \rightarrow +\infty} c_1 \lambda_1^k = 0.$$

Observaciones:

Si $\lambda_1 = 1$, $y_1(k) \equiv c_1$ y $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_1(k) = c_1$.

Si $\lambda_1 = -1$, $|y_1(k)| \equiv |c_1|$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} |y_1(k)| = |c_1|$.

En el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales o de ecuaciones en diferencias, es importante conocer el comportamiento del punto de equilibrio $\vec{0} = (0;0)$ a partir de las soluciones de línea recta cuyas trayectorias están en el eje y_1 o en el eje y_2 . Utilizando la

información correspondiente a ambos ejes podremos clasificar el tipo de punto de equilibrio en el plano. Para cada recta, diremos que el punto de equilibrio se comporta como un *sumidero* si al tender la variable independiente (t o k) a más infinito, entonces los valores de la función tienden al punto de equilibrio $\bar{0} = (0;0)$. Por otra parte, cuando los valores de la función tienden a infinito diremos que el punto de equilibrio se comporta para dicha recta como una *fuelle*. Lo antedicho vale tanto para las soluciones de línea recta del eje y_1 como del y_2 . Evidentemente, de acuerdo a los valores de λ_1 y de λ_2 se pueden presentar distintas situaciones que permiten clasificar el punto de equilibrio del sistema. En efecto, si en ambos ejes y_1, y_2 el punto de equilibrio se comporta como un sumidero, entonces el punto de equilibrio es un *sumidero o nodo estable* del sistema. Si en ambos ejes el punto de equilibrio se comporta como una fuente, entonces el punto de equilibrio es una *fuelle o nodo inestable* del sistema. Por otra parte, si en un eje el punto de equilibrio se comporta como un sumidero y en el otro como una fuente entonces el punto de equilibrio es un *punto de silla* del sistema. De acuerdo al análisis hecho para ambos sistemas sobre el tipo de soluciones de línea recta, podremos establecer el siguiente paralelo.

Para los sistemas de ecuaciones diferenciales: Si $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$, entonces el punto de equilibrio $(0;0)$ es un sumidero o nodo estable. Si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, entonces el punto de equilibrio $(0;0)$ es una fuente o nodo inestable. Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, o si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, entonces el $(0;0)$ es un punto de silla.	Para los sistemas de ecuaciones en diferencias Si $ \lambda_1 < 1$ y $ \lambda_2 < 1$, entonces el punto de equilibrio $(0;0)$ es un sumidero o nodo estable. Si $ \lambda_1 > 1$ y $ \lambda_2 > 1$, entonces el punto de equilibrio $(0;0)$ es una fuente o nodo inestable. Si $ \lambda_1 < 1 < \lambda_2 $, o si $ \lambda_2 < 1 < \lambda_1 $, entonces el $(0;0)$ es un punto de silla.
--	--

Como vemos en el estudio anterior, para algunos valores de λ_1 y λ_2 tenemos el mismo tipo de punto de equilibrio para los sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias. Denotaremos con λ_i a λ_1 o a λ_2 . Las condiciones $\lambda_i < 0$ y $|\lambda_i| < 1$ se cumplen simultáneamente únicamente para $-1 < \lambda_i < 0$. Por otra parte, $\lambda_i > 0$ y $|\lambda_i| > 1$ se cumplen para $\lambda_i > 1$. Con esta información podemos afirmar:

Si $-1 < \lambda_1 < 0$ y $-1 < \lambda_2 < 0$, entonces el punto de equilibrio de los sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias será un sumidero o nodo estable.

Si $\lambda_1 > 1$ y $\lambda_2 > 1$, entonces el punto de equilibrio de los sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias será una fuente o nodo inestable.

Si $-1 < \lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 1$ o si $\lambda_1 > 1$ y $-1 < \lambda_2 < 0$, entonces el punto de equilibrio de los sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias será un punto de silla.

En los demás casos el tipo de punto de equilibrio correspondiente a los sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias no coincide; por ejemplo, si $\lambda_1 < -1$ y $\lambda_2 < -1$, entonces el punto de equilibrio de los sistemas de ecuaciones diferenciales es un sumidero, mientras que para las ecuaciones en diferencias será una fuente ya que $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| > 1$.

4.- Análisis cuantitativo y cualitativo de los sistemas estandarizados y originales

Ilustraremos con ejemplos los diversos comportamientos para distintos valores de λ_1 y λ_2 , destacando las diferencias entre los sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias.

En estos ejemplos veremos el comportamiento de las soluciones analíticamente y mediante sus representaciones gráficas. Esto se hará, tanto para los sistemas estandarizados representados en las coordenadas y_1, y_2 , como para los sistemas originales representados en las coordenadas x_1, x_2 . Para los fines de la mejor comprensión del tema y a fin de no reiterar en cada caso el comportamiento de las curvas al pasar del sistema de ecuaciones estandarizado al original propuesto en cada ejemplo, haremos algunas aclaraciones sobre la transformación de las representaciones gráficas al pasar mediante la matriz de paso P del sistema de coordenadas y_1, y_2 al sistema x_1, x_2 .

Si $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, su transformado por P es $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = P_1$.

Si $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, su transformado por P es $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = P_2$.

Si $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, su transformado por P es $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 p_{11} + b_2 p_{12} \\ b_1 p_{21} + b_2 p_{22} \end{pmatrix}$.

En el sistema de coordenadas x_1, x_2 , el semieje positivo y_1 se transforma en el semieje positivo del autovector P_1 . Análogamente, el semieje positivo y_2 se transforma en el semieje positivo del autovector P_2 . De esta forma, los puntos de cada solución del sistema estandarizado ubicados en el cuadrante determinado por los semiejes positivos y_1, y_2 se encontrarán en el cuadrante determinado por los autovalores P_1 y P_2 en el sistema x_1, x_2 . Esto sigue siendo válido para todos los cuadrantes. Dichos puntos del sistema x_1, x_2 corresponderán a puntos de cada solución del sistema original.

Ejemplo 1. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \frac{8}{3}x_1(t) - \frac{1}{3}x_2(t) \\ x_2'(t) = -\frac{2}{3}x_1(t) + \frac{7}{3}x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -1/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Si hallamos los autovalores de la matriz del sistema vemos que son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Así la forma estandarizada de dicho sistema, en la base de los autovectores, y su solución general en la cual $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, son:

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2 y_1(t) \\ y_2'(t) = 3 y_2(t) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{2t} \\ y_2(t) = c_2 e^{3t} \end{cases}$$

Puesto que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, el punto de equilibrio es una fuente o nodo inestable. Las trayectorias de las soluciones de línea recta son las semirrectas abiertas con origen $(0,0)$ determinadas por los cuatro semiejes coordenados. El sentido de recorrido de las

Ejemplo I. Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{8}{3}x_1(k) - \frac{1}{3}x_2(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{2}{3}x_1(k) + \frac{7}{3}x_2(k) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -1/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

Si hallamos los autovalores de la matriz del sistema vemos que son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Así la forma estandarizada de dicho sistema, en la base de los autovectores, y su solución general en la cual $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ son

$$\begin{cases} y_1(k+1) = 2 y_1(k) \\ y_2(k+1) = 3 y_2(k) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(k) = c_1 2^k \\ y_2(k) = c_2 3^k \end{cases}$$

Puesto que $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| > 1$, el punto de equilibrio es una fuente o nodo inestable. La órbita de cada solución de línea recta es una sucesión que tiende a infinito. Como $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, esta sucesión está formada por puntos

mismas es del origen hacia infinito. Cada trayectoria recorre toda la curva por cuanto $-\infty < t < +\infty$.

Si consideramos la curva $(c_1 e^{2t}; c_2 e^{3t})$ correspondiente a la solución con condición inicial $(c_1; c_2)$ para $t=0$, cada punto $(C_1; C_2) = (c_1 e^{2u}; c_2 e^{3u})$ de dicha curva corresponde a una nueva condición inicial, cuya solución $(C_1 e^{2t}; C_2 e^{3t})$ tendrá la misma trayectoria.

Por el contrario, si no existe un $u \in R$ tal que $(C_1; C_2) = (c_1 e^{2u}; c_2 e^{3u})$ dichas condiciones iniciales pertenecerán a otra trayectoria.

Puesto que cualquier solución del sistema es de la forma $(c_1 e^{2t}; c_2 e^{3t})$ resultará que cada trayectoria será una curva contenida en uno de los cuadrantes abiertos y su sentido de recorrido será alejándose del origen pues coincide con el sentido de las dos soluciones de línea recta que la generan. En la Figura 1 se muestran algunas de las trayectorias de las soluciones.

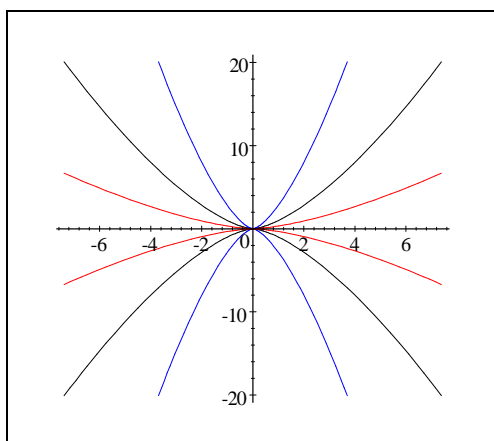


Figura 1.

Ahora obtendremos la solución del sistema original, en la base canónica, determinando la matriz de paso.

Como $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son respectivamente autovectores de $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$, tomamos como matriz de paso $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. En consecuencia, la solución general del sistema del Ejemplo 1 es

pertenecientes a un único semieje abierto de los ejes coordenados. El valor que toma la sucesión para $k=0$ es el más cercano al origen de coordenadas. Cada condición inicial determina una sucesión de puntos que se van alejando cada vez más del origen.

Consideremos una curva soporte $(c_1 2^t; c_2 3^t)$ con $t \in R$, que estará contenida en un único cuadrante abierto. Sobre esta curva se encuentran los puntos correspondientes a la condición inicial $(c_1; c_2)$, para $k=0$ de la solución $(c_1 2^k; c_2 3^k)$. Cada punto $(C_1; C_2) = (c_1 e^{2u}; c_2 e^{3u})$ de la curva soporte corresponde a una nueva condición inicial, cuya solución será $(C_1 2^k; C_2 3^k)$ que tendrá la misma curva soporte. Si no existe un $u \in R$ tal que $(C_1; C_2) = (c_1 e^{2u}; c_2 e^{3u})$ dichas condiciones iniciales pertenecerán a otra curva soporte.

En la Figura I se muestran algunas curvas soporte de las soluciones.

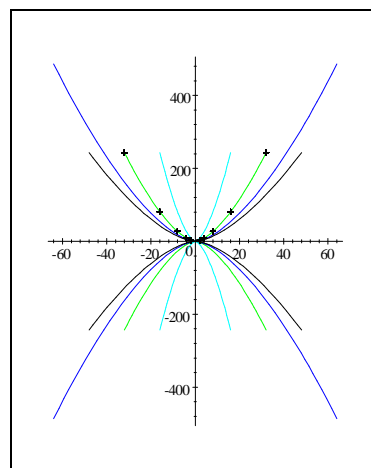


Figura I.

Ahora obtendremos la solución del sistema original, en la base canónica, determinando la matriz de paso.

Como $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son respectivamente autovectores de $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$, tomamos como matriz de paso $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. En consecuencia, la solución general del sistema del Ejemplo I es

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

o como sistema

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{3t} \\ x_2(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \end{cases}$$

En la Figura 2 se encuentra la representación gráfica de algunas trayectorias, entre ellas las de línea recta, para diversos valores de las condiciones iniciales. En consecuencia, teniendo en cuenta la transformación por la matriz de paso P de los ejes del sistema de ecuaciones estandarizado a las coordenadas canónicas del sistema de ecuaciones original, todas las observaciones hechas anteriormente son también válidas en este caso.

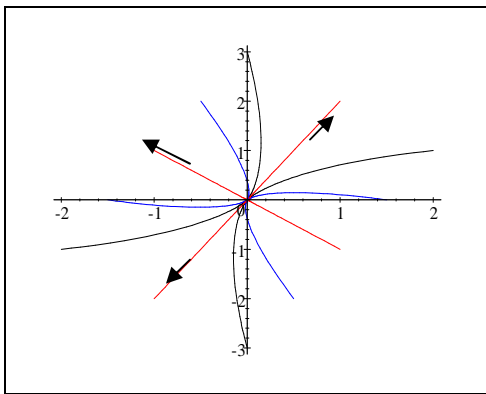


Figura 2.

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 2^k \\ c_2 3^k \end{pmatrix}$$

o como sistema

$$\begin{cases} x_1(k) = c_1 2^k - c_2 3^k \\ x_2(k) = 2c_1 2^k + c_2 3^k \end{cases}$$

En la Figura II se encuentra la representación gráfica, para diversas condiciones iniciales de algunas curvas soporte, entre ellas las de línea recta. Las órbitas de cada solución están formadas por puntos de una de estas curvas. Así, teniendo en cuenta la transformación por la matriz de paso P de los ejes coordenados del sistema estandarizado a las coordenadas canónicas del sistema de ecuaciones original, todas las observaciones hechas anteriormente son también válidas en este caso.

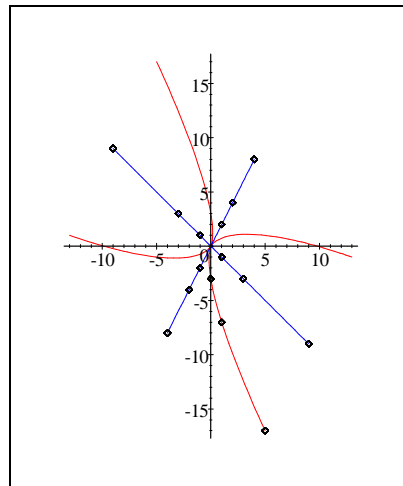


Figura II.

Para poder destacar las diferencias entre los sistemas de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en diferencias, vamos a determinar otros sistemas elegidos adrede para que tengan la misma matriz de paso P ya considerada anteriormente y autovalores arbitrariamente elegidos por su utilidad para nuestra ejemplificación. En todos los casos el punto de equilibrio de los sistemas de ecuaciones será $\vec{0} = (0;0)$, dependiendo de los autovalores su designación como sumidero, fuente o punto de silla.

A continuación ejemplificaremos el procedimiento a seguir para la obtención de los sistemas de los Ejemplos 2 y II. Por lo antedicho, al utilizar como matriz de paso P , resulta como matriz inversa $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. Los autovalores elegidos para nuestro propósito son $\lambda_1 = -2$,

$\lambda_2 = 3$. Además sabemos que $A = PBP^{-1}$, entonces, obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/3 \\ -10/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

En todos los casos que trataremos seguiremos el mismo procedimiento.

Ejemplo 2. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \frac{4}{3}x_1(t) - \frac{5}{3}x_2(t) \\ x_2'(t) = -\frac{10}{3}x_1(t) - \frac{1}{3}x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/3 \\ -10/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Los autovalores de la matriz del sistema son $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$. Así la forma estandarizada del sistema y su solución general en la cual $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, son respectivamente:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2 y_1(t) \\ y_2'(t) = 3 y_2(t) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-2t} \\ y_2(t) = c_2 e^{3t} \end{cases}$$

En la Figura 3 se encuentran dibujadas algunas trayectorias del sistema estandarizado tomando como ejes coordenados y_1, y_2 .

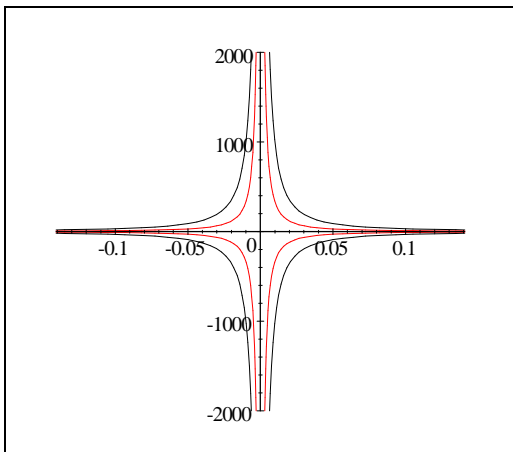


Figura 3

Para $y_1(t)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = 0$. Para $y_2(t)$, si $c_2 > 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = +\infty$ y si $c_2 < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = -\infty$.

En consecuencia, el origen es un punto de silla tal que las curvas cuando $t \rightarrow +\infty$ se acercan al origen por el eje de abscisas y_1 y se alejan del origen por el eje de ordenadas y_2 . Cada trayectoria está en un solo cuadrante abierto. Su forma se asemeja a la de una rama de una hipérbola que tenga como asíntotas los ejes coordenados.

Ahora obtendremos la solución del sistema original, en la base canónica, utilizando la matriz de paso P , con P_1 y P_2 , autovectores

Ejemplo II. Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{4}{3}x_1(k) - \frac{5}{3}x_2(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{10}{3}x_1(k) - \frac{1}{3}x_2(k) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/3 \\ -10/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

Los autovalores de la matriz del sistema son $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$. Así la forma estandarizada de dicho sistema y su solución general en la cual $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, son respectivamente:

$$\begin{cases} y_1(k+1) = -2 y_1(k) \\ y_2(k+1) = 3 y_2(k) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(k) = c_1 (-2)^k \\ y_2(k) = c_2 3^k \end{cases}$$

En este caso, como en el Ejemplo I, puesto que $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| > 1$, el punto de equilibrio es una fuente o nodo inestable.

Los valores orbitales de cada solución de línea recta son una sucesión que tiende a infinito. Como $\lambda_1 < 0$, $y_1(k) = c_1 (-2)^k$ tendrá puntos en ambos semiejes abiertos de abscisas, dependiendo de la paridad de k que estén en uno de los semiejes o en el opuesto. Puesto que $\lambda_2 > 0$, esta sucesión está formada por puntos pertenecientes a un único semieje abierto del eje de ordenadas y_2 . El valor que toma la sucesión para $k = 0$ es el más cercano al origen de coordenadas. Cada condición inicial determina una sucesión de puntos que se van alejando cada vez más del origen.

Como cualquier solución del sistema es de la forma $(c_1 (-2)^k; c_2 3^k)$, donde $(c_1; c_2)$ es la condición inicial para $k = 0$, resultará que dicha solución estará formada por una sucesión de puntos pertenecientes a las curvas sostenidas de expresión paramétrica $(c_1 2^t; c_2 3^t)$ y $(-c_1 2^t; c_2 3^t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Dichas curvas sobre las que están los valores de la sucesión son simétricas con respecto al eje y_2 . Si $c_2 > 0$ los puntos de la solución estarán en los cuadrantes 1ro. y 2do. y estarán en el 3ro. y 4to. si $c_2 < 0$. La Figura I también permite visualizar el comportamiento de las soluciones.

respectivamente de $\lambda_1 = -2$, y $\lambda_2 = 3$. La solución general del sistema del Ejemplo 2 es

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

o como sistema

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-2t} - c_2 e^{3t} \\ x_2(t) = 2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t} \end{cases}$$

o bien, destacando los autovectores

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

En la Figura 4 se encuentra la representación gráfica de algunas trayectorias, en el sistema de coordenadas x_1, x_2 . Entre las cuales se hallan las de línea recta. Si t crece estas trayectorias se acercan al origen por la recta generada por el autovector $P_1 = (1;2)$ y se alejan del origen por la generada por $P_2 = (-1;1)$. Cada trayectoria estará en un único cuadrante de los determinados por las rectas generadas por $P_1 = (1;2)$ y $P_2 = (-1;1)$.

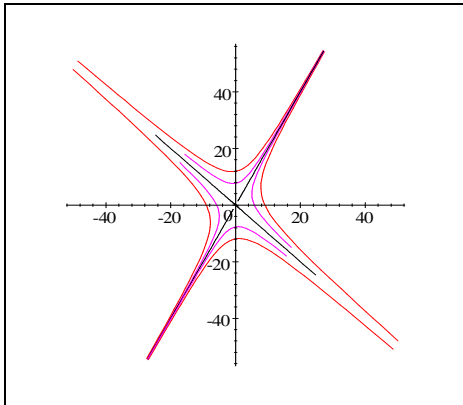


Figura 4

Ejemplo 3. Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\frac{4}{3}x_1(t) + \frac{5}{3}x_2(t) \\ x_2'(t) = \frac{10}{3}x_1(t) + \frac{1}{3}x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 & 5/3 \\ 10/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz del sistema son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, observamos que en módulo coinciden con los del Ejemplo 2, teniendo los signos invertidos en relación a los anteriores.

Consideremos el par de curvas soporte $(c_1 2^t; c_2 3^t)$ y $(-c_1 2^t; c_2 3^t)$ con $t \in \mathbb{R}$, sobre las que se encuentran los puntos correspondientes a la condición inicial $(c_1; c_2)$, para $k=0$ de la solución $(c_1 (-2)^k; c_2 3^k)$. Para nuevas condiciones iniciales $(C_1; C_2) = (c_1 2^u; c_2 3^u)$ o bien $(C_1; C_2) = (-c_1 2^u; c_2 3^u)$ para algún $u \in \mathbb{R}$, los puntos de la solución $(C_1 (-2)^k; C_2 3^k)$ estarán sobre el mismo par de curvas soporte.

Si $(C_1; C_2)$ no cumplen las condiciones anteriores, los puntos de la solución pertenecerán a otro par de curvas soporte.

Ahora obtendremos la solución del sistema original, en el sistema de coordenadas $x_1; x_2$, utilizando la matriz de paso P , con P_1 y P_2 , autovectores respectivamente de $\lambda_1 = -2$, y $\lambda_2 = 3$. La solución general del sistema del Ejemplo II es

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 (-2)^k \\ c_2 3^k \end{pmatrix},$$

o como sistema

$$\begin{cases} x_1(k) = c_1 (-2)^k - c_2 3^k \\ x_2(k) = 2c_1 (-2)^k + c_2 3^k \end{cases}$$

O bien, destacando los autovectores

$$X(k) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (-2)^k + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} 3^k$$

En los cuadrantes abiertos, determinados por $P_1; P_2$, los puntos de cada solución tendrán un comportamiento análogo a los del sistema de ecuaciones estandarizado.

Ejemplo III. Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -\frac{4}{3}x_1(k) + \frac{5}{3}x_2(k) \\ x_2(k+1) = \frac{10}{3}x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 & 5/3 \\ 10/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz del sistema son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, que en módulo coinciden con los del Ejemplo II, teniendo los signos invertidos en relación a los anteriores. Como

Luego, el origen sigue siendo un punto de silla y la forma canónica del sistema y su solución general en la cual $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, son respectivamente:

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2 y_1(t) \\ y_2'(t) = -3 y_2(t) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{2t} \\ y_2(t) = c_2 e^{-3t} \end{cases}.$$

Por lo dicho, para este sistema se conservan las representaciones gráficas del Ejemplo 2 invirtiendo tan sólo el sentido de recorrido de las trayectorias.

Como la matriz de paso es nuevamente P , la solución general del sistema del Ejemplo 3 es

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{-3t} \end{pmatrix}, \text{ o} \\ \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-3t} \\ x_2(t) = 2 c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} \end{cases}, \text{ o bien,} \\ X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

Ejemplo 4. Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\frac{8}{3} x_1(t) + \frac{1}{3} x_2(t) \\ x_2'(t) = \frac{2}{3} x_1(t) - \frac{7}{3} x_2(t) \end{cases} \\ \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & 1/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$. El sistema estandarizado y su solución general con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, son:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2 y_1(t) \\ y_2'(t) = -3 y_2(t) \end{cases}; \quad \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-2t} \\ y_2(t) = c_2 e^{-3t} \end{cases}.$$

Puesto que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$, el punto de equilibrio es un sumidero o nodo estable. Las trayectorias de la Figura 1 coinciden con las de este ejemplo pero su sentido de recorrido cuando $t \rightarrow +\infty$ es acercándose al origen. Cada trayectoria se encuentra en un solo cuadrante abierto. Como la matriz de paso es P , obtenemos como solución general del sistema original:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 e^{-3t} \end{pmatrix},$$

los autovalores son en módulo mayores que 1, el origen es una fuente o nodo inestable. La forma del sistema estandarizado y su solución general con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, son respectivamente:

$$\begin{cases} y_1(k+1) = 2 y_1(k) \\ y_2(k+1) = -3 y_2(k) \end{cases}; \quad \begin{cases} y_1(k) = c_1 2^k \\ y_2(k) = c_2 (-3)^k \end{cases}.$$

Las curvas soporte sobre las que están los valores de la sucesión son simétricas con respecto al eje y_1 . Independientemente del signo de $c_2 \neq 0$; si $c_1 > 0$ los puntos de la solución estarán en los cuadrantes 1ro. y 4to. y estarán en el 2do. y 3ro. si $c_1 < 0$. La Figura I exhibe puntos de soluciones sobre alguna curva soporte. Para la matriz de paso P , la solución del Ejemplo III es

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 2^k \\ c_2 (-3)^k \end{pmatrix}, \text{ o bien,} \\ \begin{cases} x_1(k) = c_1 2^k - c_2 (-3)^k \\ x_2(k) = 2 c_1 2^k + c_2 (-3)^k \end{cases}.$$

Ejemplo IV. Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -\frac{8}{3} x_1(k) + \frac{1}{3} x_2(k) \\ x_2(k+1) = \frac{2}{3} x_1(k) - \frac{7}{3} x_2(k) \end{cases} \\ \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & 1/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$. El sistema estandarizado y su solución general con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, son:

$$\begin{cases} y_1(k+1) = -2 y_1(k) \\ y_2(k+1) = -3 y_2(k) \end{cases}; \quad \begin{cases} y_1(k) = c_1 (-2)^k \\ y_2(k) = c_2 (-3)^k \end{cases}.$$

Por ser $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| > 1$ el punto de equilibrio es una fuente o nodo inestable. Puesto que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$, en todos los casos los puntos de la sucesión solución se encuentran en pares de ramas de curvas soporte simétricas respecto del origen, ramas que se ven en la Figura I. Así, cada solución tendrá sus puntos en el 1ro. y 3er. cuadrantes, o bien, en el 2do. y 4to. Como la matriz de paso es P , la solución general del sistema original es:

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 (-2)^k \\ c_2 (-3)^k \end{pmatrix},$$

o como sistema,

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-3t} \\ x_2(t) = 2 c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} \end{cases};$$

Las curvas de la Figura 2 también son trayectorias de este sistema, pero siendo su recorrido hacia el origen, ya que el $\vec{0} = (0;0)$ es un sumidero.

o bien, con sistema

$$\begin{cases} x_1(k) = c_1 (-2)^k - c_2 (-3)^k \\ x_2(k) = 2 c_1 (-2)^k + c_2 (-3)^k \end{cases}.$$

Los pares de curvas soporte de la Figura II, ilustran las soluciones del sistema original. También en este caso las soluciones son puntos de curvas sostén simétricas con respecto al origen.

En los cuatro pares de ejemplos anteriores, mientras en los sistemas de ecuaciones en diferencias el $\vec{0} = (0;0)$ siempre es una fuente, en los sistemas de ecuaciones diferenciales dicho punto es una fuente, sumidero o punto de silla. Ahora desarrollaremos en sendos ejemplos casos en que uno solo o ambos autovalores no son enteros.

Ejemplo 5. Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + \frac{1}{2} x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + \frac{3}{2} x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1/2$. El sistema estandarizado y su solución general con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, son:

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2 y_1(t) \\ y_2'(t) = \frac{1}{2} y_2(t) \end{cases}; \quad \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{2t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\frac{1}{2}t} \end{cases}.$$

Puesto que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, el punto de equilibrio es una fuente o nodo inestable. Las trayectorias de la Figura 5 tienen su sentido de recorrido, cuando $t \rightarrow +\infty$, alejándose del origen. Cada trayectoria se encuentra en un solo cuadrante abierto.

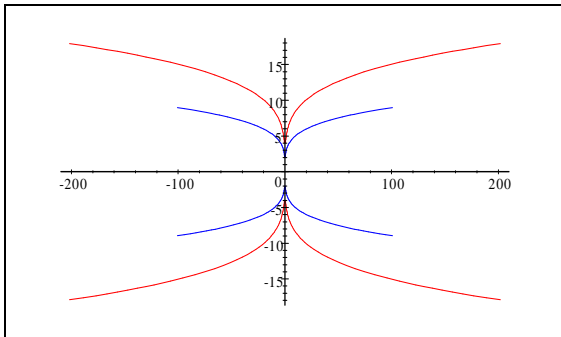


Figura 5

Mediante la matriz de paso P , resulta que la solución general del sistema original es:

Ejemplo V. Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \frac{1}{2} x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + \frac{3}{2} x_2(k) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1/2$. El sistema estandarizado y su solución general con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, son:

$$\begin{cases} y_1(k+1) = 2 y_1(k) \\ y_2(k+1) = \frac{1}{2} y_2(k) \end{cases}; \quad \begin{cases} y_1(k) = c_1 2^k \\ y_2(k) = c_2 (1/2)^k \end{cases}.$$

Por ser $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| < 1$, el $(0;0)$ es punto de silla y como $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, las órbitas de cada solución están en una curva soporte de un cuadrante abierto (Ver Figura V).

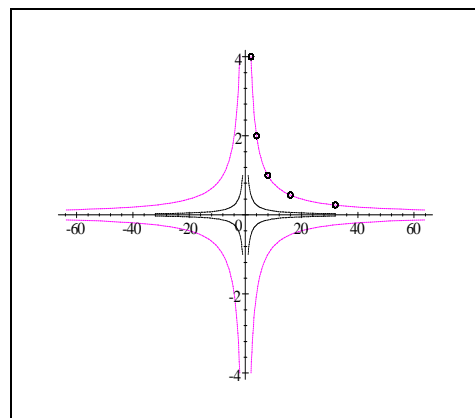


Figura V

Mediante la matriz de paso P , resulta que la solución general del sistema original es:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix}, \text{ o bien}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{\frac{1}{2}t} \\ x_2(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{\frac{1}{2}t} \end{cases}$$

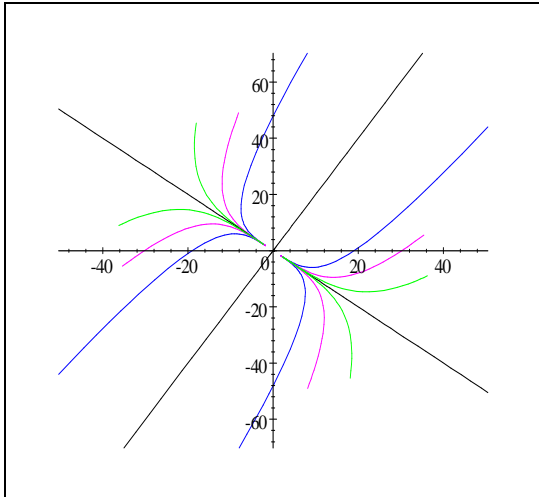


Figura 6

Las trayectorias de este sistema, de la Figura 6, se recorren alejándose del origen cuando $t \rightarrow +\infty$, siendo el (0;0) una fuente.

Ejemplo 6. Sea el sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = \frac{4}{9}x_1(t) - \frac{1}{18}x_2(t) \\ x_2'(t) = -\frac{1}{9}x_1(t) + \frac{7}{18}x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & -1/18 \\ -1/9 & 7/18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 1/2$. Luego, el sistema estandarizado y su solución general con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, son:

$$\begin{cases} y_1'(t) = \frac{1}{3}y_1(t) \\ y_2'(t) = \frac{1}{2}y_2(t) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\frac{1}{3}t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\frac{1}{2}t} \end{cases}$$

Puesto que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, el punto de equilibrio es una fuente o nodo inestable. Las trayectorias de la Figura 7 tienen su sentido de recorrido, cuando $t \rightarrow +\infty$, alejándose del origen. Cada trayectoria se encuentra en un solo cuadrante abierto.

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k \\ (1/2)^k \end{pmatrix}, \text{ o bien}$$

$$\begin{cases} x_1(k) = c_1 2^k - c_2 (1/2)^k \\ x_2(k) = 2c_1 2^k + c_2 (1/2)^k \end{cases}$$

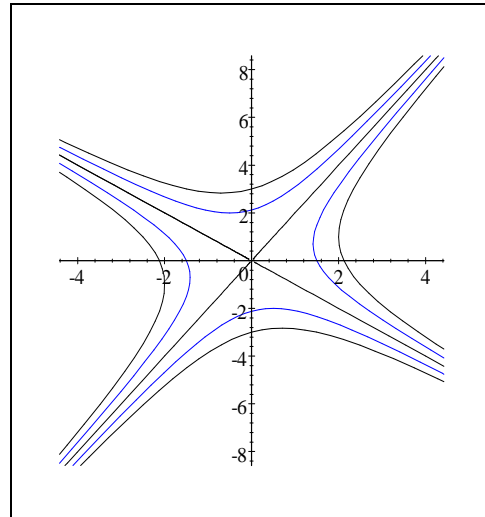


Figura VI

Las órbitas de cada solución están formadas por puntos de una de estas curvas soporte, como ocurre en el sistema estandarizado.

Ejemplo VI. Sea el sistema

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{4}{9}x_1(k) - \frac{1}{18}x_2(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{9}x_1(k) + \frac{7}{18}x_2(k) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & -1/18 \\ -1/9 & 7/18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

Los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 1/2$. Luego, el sistema estandarizado y su solución general con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, son:

$$\begin{cases} y_1(k+1) = \frac{1}{3}y_1(k) \\ y_2(k+1) = \frac{1}{2}y_2(k) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(k) = c_1 (1/3)^k \\ y_2(k) = c_2 (1/2)^k \end{cases}$$

Por ser $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$ el (0;0) es un sumidero o nodo estable. Como $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, en todos los casos los puntos de la sucesión solución se encuentran en una curva soporte contenida en un único cuadrante abierto, como se exhibe en la Figura VII.

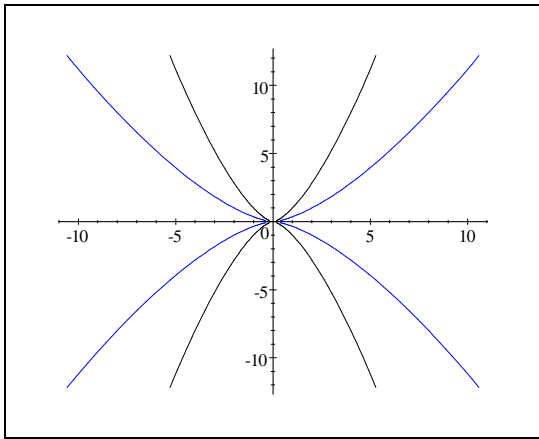


Figura 7

Como la matriz de paso es P , obtenemos la solución general del sistema original

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{\frac{1}{3}t} \\ c_2 e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix}, \text{ o bien}$$

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{\frac{1}{3}t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t}$$

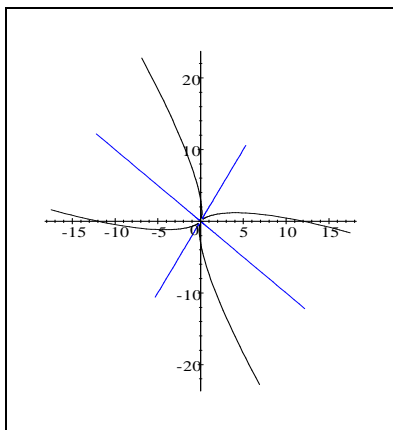


Figura 8

Las trayectorias de este sistema, visualizadas en la Figura 8, son recorridas alejándose del origen cuando $t \rightarrow +\infty$, siendo el $\vec{0} = (0;0)$ una fuente.

Vamos a resumir las características del punto de equilibrio de los sistemas considerados en los seis pares de ejemplos anteriores

Sistemas de ecuaciones diferenciales:

- Ejemplo 1: (0;0) es una fuente.
- Ejemplo 2: (0;0) es un punto de silla.
- Ejemplo 3: (0;0) es un punto de silla
- Ejemplo 4: (0;0) es un sumidero.
- Ejemplo 5: (0;0) es una fuente.
- Ejemplo 6: (0;0) es una fuente.

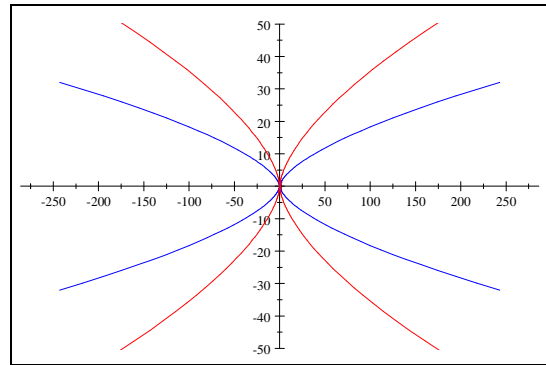


Figura VII

Como la matriz de paso es P , obtenemos la solución general del sistema original

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1/3)^k \\ (1/2)^k \end{pmatrix}, \text{ o bien}$$

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1/3)^k + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1/2)^k .$$

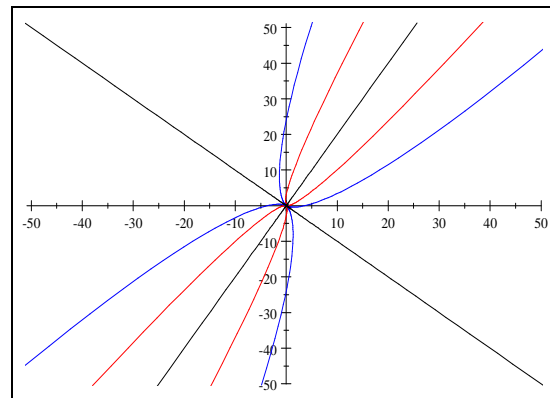


Figura VIII

Las órbitas de cada solución están formadas por puntos de una de estas curvas soporte, como ocurre en el sistema estandarizado.

Como ya se dijo para el sistema estandarizado, ahora también (0;0) es un sumidero o nodo estable.

Sistemas de ecuaciones en diferencias:

- Ejemplo I: (0;0) es una fuente.
- Ejemplo II: (0;0) es una fuente.
- Ejemplo III: (0;0) es una fuente.
- Ejemplo IV: (0;0) es una fuente.
- Ejemplo V: (0;0) un punto de silla.
- Ejemplo VI: (0;0) es un sumidero.

Podemos observar que según los valores de λ_1 y λ_2 tenemos el mismo tipo de punto de equilibrio, mientras que en otros difiere según se trate de sistemas de ecuaciones diferenciales o en diferencias.

Recordemos que a partir del par de ejemplos 1, I, hemos construido los tres siguientes pares de ejemplos para los sistemas de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en diferencias tomando la misma matriz de paso P y construyendo la matriz $A = PBP^{-1}$, donde en todos los casos B era la matriz de los autovalores considerada en cada caso. Así, manteniendo los valores absolutos de los mismos y efectuando los cambios de signo obtuvimos esos ejemplos. Evidentemente, un trabajo análogo podría hacerse con los ejemplos 5, V y 6, VI. En el siguiente cuadro resumimos las características del punto de equilibrio en esos casos.

Autovalores	Sistema de ecuaciones diferenciales	Sistema de ecuaciones en diferencias
$\lambda_1 = -2; \lambda_2 = 1/2$	(0;0) es punto de silla.	(0;0) es punto de silla.
$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -1/2$	(0;0) es punto de silla.	(0;0) es punto de silla.
$\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -1/2$	(0;0) es sumidero.	(0;0) es punto de silla.
$\lambda_1 = -1/3; \lambda_2 = 1/2$	(0;0) es punto de silla.	(0;0) es sumidero.
$\lambda_1 = 1/3; \lambda_2 = -1/2$	(0;0) es punto de silla.	(0;0) es sumidero.
$\lambda_1 = -1/3; \lambda_2 = -1/2$	(0;0) es sumidero.	(0;0) es sumidero.

5.-Conclusiones

Con esta presentación del tema aspiramos a que los alumnos que ya tengan nociones básicas sobre sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias:

- i) Puedan interrelacionar conceptos fundamentales de Álgebra Lineal, Análisis Matemático y Geometría, con el objetivo de no ver ciertas disciplinas matemáticas como compartimientos estancos.
- ii) Logren una mejor integración con temas estudiados anteriormente
- iii) Puedan alcanzar una mejor profundización en la fundamentación y desarrollo del tema.
- iv) Para las asignaturas que lo necesiten resulte más sencillo la aplicación al análisis de la estabilidad del sistema que modela el fenómeno.

A nuestros colegas docentes les sugerimos, que toda vez que un tema lo permita, puede ser útil su desarrollo alrededor de un nodo cognitivo como se ha ejemplificado en este caso.

Bibliografía

Blanchard, P.; Devaney, R. L.; Hall, G. R.: *Ecuaciones diferenciales*, International Thomson Editores, México, 1999.

Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Limusa Noriega Editores, México 1996.

Derrick, W. R.; Grossman, S. I.: *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, Fondo Educativo Interamericano, México, 1984.

Fernández Pérez, C.; Vázquez Hernández, F. J.; Vegas Montaner: *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*, Thomson Editores, Madrid, 2003.

James, Glyn; *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, 2da. Edición, Pearson Educación, Mexico 2002.

Novo, S.; Obaya, R.; Rojo, J.: *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, McGraw Hill, Madrid, 1995.