



## **Influencia de los elementos matemáticos como avance conceptual en la interpretación de los estudiantes para maestro de la comprensión de la magnitud longitud y su medida en educación infantil**

Mar **Moreno** Moreno

Facultad de Educación, Universidad de Alicante

España

[mmoreno@ua.es](mailto:mmoreno@ua.es)

Gloria **Sánchez-Matamoros** García

Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Sevilla

España

[gsanchezmatamoros@us.es](mailto:gsanchezmatamoros@us.es)

Julia **Valls** González

Facultad de Educación, Universidad de Alicante

España

[julia.valls@ua.es](mailto:julia.valls@ua.es)

Patricia **Pérez-Tyteca**

Facultad de Educación, Universidad de Alicante

España

[patricia.perez@ua.es](mailto:patricia.perez@ua.es)

### **Resumen**

El objetivo de esta investigación es identificar los elementos claves de una trayectoria de aprendizaje sobre la magnitud longitud y su medida en educación infantil que son considerados como un avance conceptual por los estudiantes para maestros. La manera en la que los estudiantes para maestro consideraban los elementos de la trayectoria de aprendizaje nos ha permitido identificar cuatro características. Estas características muestran la dificultad que tienen los estudiantes para maestro en instrumentalizar los elementos de una trayectoria de aprendizaje sobre magnitud y medida.

*Palabras clave:* Avance conceptual, trayectoria de aprendizaje, estudiante para maestro de Educación Infantil, magnitud y medida de longitud

### **Marco Teórico**

Un aspecto importante en la formación de los maestros es que deben aprender a interpretar la comprensión de los estudiantes. La adquisición y el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” es un objetivo de los programas de formación y una línea de investigación en Didáctica de la Matemática en los últimos años. Jacobs, Lamb y Philipp (2010) caracterizan esta competencia docente mediante tres destrezas interrelacionadas: (a) identificar los elementos relevantes en las respuestas de los estudiantes; (b) interpretar la comprensión de los estudiantes y (c) decidir las acciones a desarrollar en la clase.

Cuando un maestro se encuentra en una determinada situación de enseñanza-aprendizaje es importante que interprete lo que los estudiantes hacen para poder ayudarles a progresar en su aprendizaje (Norton, McCloskey y Hudson, 2011). En este contexto, el constructo *Key Developmental Understanding* (KDU) propuesto por Simon (2006) se puede utilizar para examinar cómo se relacionan el conocimiento especializado del contenido (SCK) y el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS; Ball, Thames y Phelps, 2008) en la interpretación del pensamiento matemático de estos (Llinares, Fernández y Sánchez-Matamoros, 2016). El constructo KDU implica un avance conceptual por parte de los estudiantes, es decir, un cambio en su capacidad para pensar y percibir determinados conceptos matemáticos. Desde esta perspectiva, para reconocer la progresión en el aprendizaje de los estudiantes es necesario conocer aquellos elementos matemáticos cuya comprensión pueda ser considerada un avance conceptual.

Para desarrollar una mirada profesional sobre las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas se han utilizado trayectorias de aprendizaje centradas en distintos conceptos matemáticos (Fernández, Llinares y Valls, 2011, para los problemas aditivos y proporcionales; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015, para la derivada; Schack et al., 2013, para el estudio de la aritmética temprana; Wilson, Mojica y Confrey, 2013, para la equipartición), pero en menor medida en relación a la magnitud longitud y su medida en educación infantil. Estos estudios han mostrado el potencial que tienen las trayectorias de aprendizaje, en los programas de formación de maestros, para desarrollar las tres destrezas de la mirada profesional en diferentes situaciones de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos.

Sarama y Clements (2009) han descrito una trayectoria de aprendizaje sobre la magnitud longitud y su medida para los primeros años que consta de: (a) un objetivo de aprendizaje; (b) la progresión en el aprendizaje descrita a partir de los elementos relevantes sobre la magnitud longitud (reconocimiento de la longitud, conservación y transitividad) y la medida de la longitud (equipartición, unidad de medida, unicidad, iteración, acumulación, universalidad de la medida y relación entre el número y la unidad de medida); y (c) actividades instruccionales a lo largo de la secuencia.

El desarrollo de una mirada estructurada sobre las situaciones de enseñanza-aprendizaje abarca: la identificación de los elementos claves, la interpretación de la comprensión de estos elementos en el marco de la progresión en el aprendizaje (KDU) y, por último, la toma de decisiones instruccionales de acuerdo con la comprensión inferida. El objetivo de esta investigación es generar información sobre cómo estudiantes para maestro de Educación Infantil (EPMI) consideran los elementos claves de la magnitud longitud y su medida, como un avance conceptual que permite progresar a los niños de infantil en su aprendizaje.

### **Método**

Los participantes fueron 64 EPMI que cursaban la asignatura “Aprendizaje de la Geometría”, en el sexto cuatrimestre de un programa de formación de maestros de Educación Infantil. Uno de los módulos de la asignatura era el estudio de “La magnitud longitud y su medida en Educación Infantil”. A los EPMI se les proporcionó un documento teórico que incluía la descripción de elementos de una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida adaptada de Sarama y Clements (2009) (Tabla 1) y se les plantearon tareas consistentes en analizar situaciones hipotéticas de enseñanza. Para ayudarles a realizar el análisis de la situación se proporcionó a los estudiantes para maestro unas preguntas-guía relacionadas con las tres destrezas de la mirada profesional: identificar los elementos claves, interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los niños y proponer actividades para que los niños avanzasen en su comprensión.

Tabla 1

*Progresión en el aprendizaje de la magnitud longitud (adaptado de Sarama y Clements, 2009)*

Nivel	Progresión del desarrollo
1	<ul style="list-style-type: none"><li>● Reconocen la magnitud longitud:<ul style="list-style-type: none"><li>○ Identifican las cualidades de la magnitud longitud.</li></ul></li><li>● Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva.</li></ul>
2	<ul style="list-style-type: none"><li>● Reconocen la conservación de la longitud:<ul style="list-style-type: none"><li>○ Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos.</li></ul></li></ul>
3	<ul style="list-style-type: none"><li>● Utilizan la propiedad transitiva para realizar:<ul style="list-style-type: none"><li>○ Comparaciones indirectas</li><li>○ Ordenaciones de objetos.</li><li>○ Medidas de longitudes.</li></ul></li></ul>
4	<ul style="list-style-type: none"><li>● Realizan equiparticiones de objetos.</li><li>● Identifican una unidad y realizan iteraciones de la misma:<ul style="list-style-type: none"><li>○ Reconocen la propiedad de acumulación.</li></ul></li></ul>
5	<ul style="list-style-type: none"><li>● Reconocen la universalidad de la unidad de medida.</li><li>● Reconocen la relación entre número y unidad de medida.</li><li>● Comienzan a hacer estimaciones</li></ul>

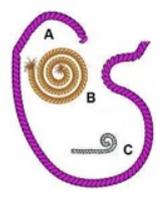
Los resultados presentados en esta comunicación proceden de las respuestas de los estudiantes para maestro del análisis de una situación hipotética de enseñanza en la que los niños de Educación Infantil (3-5 años) hacen collares usando cuerdas de distinta longitud y abalorios de distinto tamaño (Figura 1). Los EPMI debían responder a las siguientes preguntas:

*Cuestión 1. Indica los elementos matemáticos que, desde el punto de vista de la maestra, son necesarios para realizar la tarea.*

*Cuestión 2. ¿En qué nivel de comprensión situarías a cada uno de los niños del diálogo? Razona tu respuesta a partir de las características puesta de manifiesto y justifica usando las intervenciones de los niños.*

*Cuestión 3. Suponiendo que eres Alicia, propón una actividad para seguir profundizando en la comprensión de la longitud y su medida para el niño o niña que consideras está en el nivel más bajo y para el que está en el nivel más alto.*

Alicia es una maestra de infantil de una escuela pública. La edad de sus alumnos se encuentra entre los cinco y seis años. Hace una semana que empezó a introducir la magnitud longitud y su medida. Hoy aprovechando la clase de plástica propone a los niños hacer collares usando diferentes materiales (cuentas de colores y distintos tipos de macarrones) y cordones de varios tamaños (A, B y C):

Accesorios para collares		
		

Una vez que le ha propuesto la actividad, los niños eligen sus cuerdas y accesorios y empiezan a confeccionar los collares. Terminados todos los collares Alicia les pregunta a los niños:

Maestra: *¿Quién ha hecho el collar más largo?*

Mario: *He hecho el collar con la cuerda con forma de bastón [cuerda C] y he usado 13 macarrones [ha utilizado macarrones de varios tipos].*

Almudena: *Seño, yo he hecho un collar con la cuerda rosa [cuerda A] y he usado 15 estrellitas [las estrellitas están muy separadas].*

Luis: *El mío tiene 12 macarrones [ha utilizado todos del mismo tipo] y he cogido la cuerda que tiene forma de ensaimada [cuerda B], pero es más largo que el de Mario porque la cuerda es más larga.*

Elena: *Yo también he utilizado la cuerda rosa [cuerda A] y he usado 20 estrellitas [las estrellitas están todas juntas].*

Almudena: *luego el más largo de todos los collares es el de Elena.*

A partir de las respuestas dadas Alicia, les pregunta a los niños:

Maestra: *¿Estáis de acuerdo?*

Mario: *No seño, yo no estoy de acuerdo con Luis, porque el mío tiene más macarrones.*

Figura 1.

*Situación hipotética de enseñanza con niños de educación infantil (3-5 años)*

Las características de las respuestas de los niños en esta situación se muestran en la tabla 2. Mario y Almudena se sitúan en el nivel bajo de la progresión (nivel 1) y Luis y Elena en el nivel alto (nivel 4) según la trayectoria de aprendizaje usada como referencia (Tabla1)

Los datos de esta comunicación son las respuestas de los EPMI a las dos primeras cuestiones planteadas en la tarea. Mediante un proceso inductivo (Strauss y Corbin 1994) un grupo de cinco investigadores analizaron primero una pequeña muestra a partir de la cual se discutieron las codificaciones y las relaciones de estas con las evidencias, para crear varias categorías. Una vez llegado a un acuerdo, se añadieron nuevos datos con el objetivo de revisar el sistema de categorías creado inicialmente y constatar su validez. Este proceso de análisis se realizó en dos fases. En la primera se analizaron conjuntamente las cuestiones 1 y 2, para identificar qué elementos de la trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida habían sido identificados por los EPMI. En la segunda fase se identificaron qué elementos, de los que los EPMI habían identificado en las respuestas de los niños, eran considerados como un avance conceptual (KDU). Este proceso de análisis generó cuatro grupos que permitieron identificar cuatro características de la manera en la que los EPMI empezaban a desarrollar una mirada estructurada sobre las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas mediante el uso de la información procedente de una trayectoria de aprendizaje.

Tabla 2

*Características de las respuestas de los niños*

Niños	Nivel	Características	Elemento matemático
Mario		Hay evidencias de que <ul style="list-style-type: none"> <li>• NO comprende la <b>conservación</b> de la longitud (magnitud).</li> <li>• NO considera la <b>unicidad</b> de la cantidad que se toma como unidad</li> </ul>	
Almudena	1	Hay evidencias de que <ul style="list-style-type: none"> <li>• NO comprende la <b>conservación</b> de la longitud (magnitud).</li> <li>• SÍ considera la <b>unicidad</b> de la cantidad que se toma como unidad</li> <li>• NO considera la <b>iteración</b> de la unidad de medida</li> </ul>	Conservación
Luis		Hay evidencias de que <ul style="list-style-type: none"> <li>• SÍ comprende la <b>conservación</b> de la longitud (magnitud).</li> <li>• SÍ considera la <b>unicidad</b> de la cantidad que se toma como unidad, la <b>iteración</b> y la <b>acumulación</b>.</li> </ul>	Conservación Unicidad Iteración
Elena	4	Hay evidencias de que <ul style="list-style-type: none"> <li>• SÍ considera la <b>unicidad</b> de la cantidad que se toma como unidad, la <b>iteración</b> y la <b>acumulación</b>.</li> </ul>	Acumulación

**Resultados**

Los resultados se presentan en función de cómo los EPMI consideraban la identificación (o no) de la conservación de la magnitud, la unicidad e iteración de la unidad de medida, y la acumulación como un avance conceptual (KDU) para los niños de infantil en su aprendizaje de la magnitud longitud y su medida (Tabla 3).

Tabla 3

*Cómo los EPMI consideran la comprensión de algunos elementos claves en la trayectoria de aprendizaje sobre la magnitud y su medida como un avance conceptual (KDU)*

Grupos	Características	Nº EPMI
1	• No identifican elementos	17
2	• Identifican elementos y no los consideran KDU	25
3	• Identifican algunos elementos, solo de magnitud o solo de medida, y los consideran como KDU	17
4	• Identifican elementos de magnitud y de medida considerándolos como KDU	5
TOTAL		64

**Grupo 1. No identifican elementos**

17 EPMI no identificaron ninguno de los elementos clave de la trayectoria de aprendizaje de la magnitud y su medida en la situación de enseñanza. Por ejemplo, la estudiante E2-10 al

referirse a la respuesta dada por Almudena hace descripciones generales sin mencionar que Almudena no tiene adquirida la conservación de la longitud, ni la iteración de la unidad de medida, aunque sí la unicidad:

*“Almudena...por una parte no se da cuenta que, aunque Elena y ella han hecho el mismo collar con la misma cuerda, las estrellas no están a la misma distancia en un collar que en otro, por esta razón Elena tiene cinco estrellas más que en su collar. Almudena aún no tiene asimilado el concepto, junto-separado”*

## **Grupo 2. Identifican elementos y no los consideran KDU**

25 EPMI identificaron elementos puestos de manifiesto en la respuesta de los niños, pero no consideraron su comprensión como un avance conceptual (KDU) en el aprendizaje de la magnitud longitud y su medida. Por ejemplo, E1-12 identificó los elementos de medida, unicidad e iteración, pero no fue capaz de considerar su comprensión como un avance conceptual pues solo mencionó la iteración para Elena y no la mencionó para Almudena, que no la tiene adquirida, ni para Luis que sí la tiene. Como consecuencia dice que Almudena y Luis están en el mismo nivel de comprensión. Lo mismo sucedió con el elemento de la unicidad de la unidad en la respuesta de Almudena. Este tipo de comportamiento lo interpretamos en que este estudiante para maestro, E1-12, no consideraba la comprensión de estos elementos clave como un avance conceptual de la medida (KDU):

*“Luis se encuentra en el nivel cuatro ya que es capaz de reconocer la unicidad de la unidad de medida “todos los macarrones iguales”, Mario no es capaz de reconocer la unicidad... Almudena se encuentra en el mismo nivel que Luis ya que realiza comparaciones entre las cuerdas, y Elena en el nivel 4 ya que reconoce la unidad de medida y hace iteraciones sin superponer ni dejar huecos entre los macarrones”*

## **Grupo 3. Identifican algunos elementos, solo de magnitud o solo de medida, y los consideran como KDU**

17 EPMI identificaron solo elementos claves de magnitud o de medida, y consideraron su comprensión como un avance conceptual (KDU). 4 de los 17 EPMI identificaron el elemento conservación, relativo a la magnitud, y consideraron su comprensión como un KDU al tenerlo en cuenta para interpretar la comprensión de cada uno de los niños en la situación de enseñanza. Esto se evidencia en la respuesta del estudiante E1-20, que interpreta solo adecuadamente la comprensión de Mario y Almudena:

*“Mario lo clasificaría en el nivel 1, aún no tiene adquirida la conservación al afirmar que su collar es más largo que el de Luis por utilizar más macarrones que él sin darle importancia a la longitud de la cuerda. Almudena también estaría en el nivel 1, no tiene adquirida la conservación y no llega a comprender que su cuerda y la de Elena son igual de larga independientemente de cuál contenga más o menos estrellitas. Luis como tiene adquirida la conservación, lo situaría en el traspaso del 2 al 3. Elena es muy difícil de clasificar, simplemente ha dicho la cuerda que ha utilizado y cuántas estrellitas”*

Los 13 estudiantes para maestro restantes en este grupo identificaron solo los elementos relativos a la medida. Todos consideraron la comprensión de la unicidad e iteración como un avance conceptual (KDU) y 4 de ellos además consideraron también la comprensión de la acumulación. Por ejemplo, la estudiante E1-22 consideró como KDU la comprensión de la

unicidad, la iteración y la acumulación, lo que le permitió interpretar la comprensión de Luis y Elena:

*“Mario está en el nivel 4, no reconoce la necesidad de usar una unidad de medida única (usa macarrones diferentes) y piensa que el suyo es más largo [refiriéndose al collar] porque la palabra- número [se refiere a la acumulación] es mayor que el de Luis. Almudena en el nivel 3 porque usa la misma unidad de medida y deja espacios entre ellos. No tiene adquirido que las unidades de medida se deben iterar sin saltos ni superposiciones. Luis estaría en el nivel 4 por tener adquirido que la unidad de medida debe ser única, por eso elige macarrones del mismo tipo, los itera y acumula...Elena está en la transición del 3 al 4 pues usa una unidad de medida [refiriéndose a la unicidad] sin superposiciones ni saltos [refiriéndose a la iteración] sabiendo que la palabra-número es el espacio del objeto todo cubierto por las unidades de medida [refiriéndose a la acumulación]”.*

#### **Grupo 4. Identifican elementos de magnitud y de medida, y los consideran como KDU**

5 EPMI identificaron elementos claves de magnitud y medida, conservación, unicidad e iteración, y consideraron su comprensión como un avance conceptual (KDU). Por ejemplo, en la respuesta del estudiante E1-8 se puede constatar que consideró como KDU la conservación, la unicidad y la iteración, y fue capaz de interpretar la comprensión de todos los niños:

*“Se necesita reconocer la magnitud longitud y se necesita saber que hay conservación a la hora de manipular las cuerdas y compararlas. Mario no es capaz de ver que la cuerda C [forma bastón] es claramente la más corta, no posee el elemento conservación por lo que está en el nivel 1. Almudena está en el nivel 1 como Mario pues no realiza comparaciones directas para ver qué collar es más largo. Luis y Elena, están en el nivel 4, utilizan unidades del mismo tipo [refiriéndose a la unicidad de la unidad de la medida, macarrones y estrellitas respectivamente] y las ponen sin superposiciones ni saltos [refiriéndose a la iteración de la unidad de medida] no hay rasgos de la transitividad”*

#### **Conclusiones**

En este estudio presentamos parte de una investigación que tiene como objetivo generar información sobre cómo los EPMI consideran los elementos claves de la magnitud longitud y su medida, organizados a través de una trayectoria de aprendizaje, como un avance conceptual (KDU) en el aprendizaje de los niños de educación infantil. No todos los EPMI que identificaron elementos claves de la progresión en el aprendizaje, consideraron su comprensión como un avance conceptual (KDU), por lo que no reconocieron las relaciones entre identificar los elementos claves de la magnitud y su medida e inferir el nivel de la comprensión de los niños de estos elementos según la trayectoria de aprendizaje. Este resultado indica que la destreza de identificar los elementos claves en las respuestas de los niños es necesaria, pero no suficiente para desarrollar la competencia docente “mirar profesionalmente” la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Barnhart y van Es, 2015; Wilson et al., 2013). Para desarrollar esta competencia es necesario relacionar las tres destrezas que la conforman. Nuestros resultados indican que establecer relaciones entre identificar e interpretar ha sido difícil para la mayoría de los EPMI dado que únicamente 3 de ellos fueron capaces de considerar la comprensión del elemento de magnitud (conservación) y los de medida (iteración, acumulación y unicidad) como un avance conceptual (KDU) lo que les permitió interpretar adecuadamente el nivel de comprensión de todos los niños. Los EPMI (10) que consideraron la comprensión de solo algunos de los elementos

implicados (solo de magnitud o solo de medida) como un avance conceptual (KDU), aunque establecieron relaciones entre ambas destrezas, solo llegaron a interpretar el nivel de comprensión de algunos de los niños. El hecho de que la progresión del aprendizaje que forma parte de la trayectoria de aprendizaje incidiese en elementos, tanto de magnitud como de medida, ha supuesto una dificultad añadida para los EPMI al no ser capaces de considerar el carácter inclusivo de la progresión del aprendizaje de la magnitud longitud y su medida. Estas dificultades pueden deberse a las especificidades de las tareas y a la organización curricular de este concepto en España que incide más en los aspectos de medida de la magnitud.

### **Agradecimientos**

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2014-54526-R del Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España; y del grupo de investigación emergente GV/2014/075 de la Consellería de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

### **Referencias y Bibliografía**

- Balls, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes is special? *Journal for Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Barnhart, T., & van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, 45, 83-89.
- Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2011). Características del desarrollo de una mirada profesional en estudiantes para profesor de matemáticas en un contexto b-learning. *Acta Scientiae*, 13(1), 9-30.
- Jacobs, V.R., Lamb, L.C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Llinares, S., Fernández, C., & Sánchez-Matamoros, G. (2016). How prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(8), 2155-2170. Doi: 10.12973/eurasia.2016.1295a.
- Norton, A., McCloskey, A., & Hudson, R. A. (2011). Prediction assessments: Using video-based predictions to assess prospective teachers' knowledge of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education* 14(4), 305-325.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivate concept. *International Journal of Science and Mathematics Education* 13(6), 1305-1329.
- Sarama J., & Clements D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. London and New York: Routledge.
- Schack et al. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education* 16, 379-397.
- Simon, M. (2006). Key Developmental Understanding in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(4), 359-371.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology. In N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 217-285). Thousand Oaks, Sage Publications.
- Wilson, P.H., Mojica, G., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 103-121.