

## ¿CUÁNTAS HOJAS HAY EN TODOS LOS ÁRBOLES DEL PARQUE NACIONAL NAHUEL HUAPI?

Maria Teresa Juan- Virginia Montoro

[mayte.juan@gmail.com](mailto:mayte.juan@gmail.com) – [vmontoro@gmail.com](mailto:vmontoro@gmail.com)

Universidad Nacional del Comahue. Centro Reg. Universitario Bariloche. Argentina

Tema: Pensamiento Matemático Avanzado

Modalidad: C. B.

Nivel: Medio

Palabras Clave: Infinito- Lexicometría- Matemática

### Resumen

*Reportamos en este trabajo el análisis lexicográfico de las justificaciones dadas a una pregunta realizada a 195 estudiantes de tres colegios secundarios de la Ciudad de San Carlos de Bariloche, con el fin de obtener indicios de sus concepciones sobre el infinito y las posibles relaciones de las ideas manifiestas en estas justificaciones, con sus respuestas a otras preguntas.*

*Encontramos principalmente que los estudiantes que aceptan como posible la construcción de un conjunto que tenga infinitos elementos y los diferencian de conjuntos muy numerosos, asientan básicamente su posición en que estos últimos contienen una cantidad determinada, que tiene límite y un fin. Los estudiantes que dudan en sus respuestas, manifiestan esencialmente dos tipos de justificaciones: una asociada a la posibilidad de contar los elementos y otra asociada al contexto de la pregunta en cuestión. Los estudiantes que identifican un número muy grande con infinito esencialmente sostienen esta posición aludiendo a un proceso que se repite y sigue en el tiempo.*

### Introducción

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación en la línea de pensamiento matemático avanzado y llevado a delante por el grupo de Pensamiento y Educación Matemática, del Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue. Rep. Argentina. (Montoro y Ferrero 2010)

Antes de abordar teorías formalizadas, los seres humanos tenemos una cierta imagen (conceptual) informal; la investigación muestra que tales imágenes conceptuales a menudo persisten mucho después de que las ideas formales son introducidas. (Fischbein et al., 1979). Las imágenes informales personales pueden implicar rasgos esencialmente contradictorios. Por ejemplo, las experiencias informales invariablemente sugieren que "el todo es mayor que la parte", y así resulta, que si a un conjunto le retiramos algunos elementos, el conjunto resultante no podría tener la misma cantidad de elementos que el conjunto de partida,

situación que claramente es verdadera en los conjuntos finitos, pero falsa cuando se trata con conjuntos infinitos.

Monaghan (2001) examinó lo que él llama *concepciones subyacentes* sobre el infinito en estudiantes preuniversitarios entre 16 y 18 años de edad. Encontrando esencialmente que la primera visión de los estudiantes respecto al infinito es como un proceso, *algo que sigue y sigue para siempre*.

En un trabajo previo, estudiamos las concepciones de estudiantes de secundaria sobre el infinito matemático en un contexto de conteo de cantidades infinitas resultantes de posibles combinaciones de finitos elementos.

Entre las ideas presentes en ese estudio (Juan, Montoro y Scheuer, 2012) encontramos en los extremos dos posiciones. Desde la primera posición, las colecciones infinitas no parecen ubicarse siquiera en el espectro de lo pensable o concebible. En cambio, en la posición del otro extremo no sólo es posible pensar en colecciones infinitas, sino que también se captan los mecanismos básicos a partir de los cuales esas colecciones pueden generarse. Entre estas dos concepciones que se sitúan en dos extremos opuestos en cuanto a la posibilidad de generar colecciones infinitas o incluso de pensar en ellas, encontramos algunas otras que dan cuenta de niveles incipientes de problematización respecto de esta cuestión, una de ellas está caracterizada por la inseguridad en la respuesta. Las demás concepciones que revelan un grado intermedio de problematización comparten la relevancia prioritaria dada al número de elementos del conjunto de partida. Es decir, el énfasis está puesto en la cantidad de elementos con los que se cuenta para combinar y no en la posibilidad de repetir o no los elementos en cada combinación. Sobre la base de este principio común, encontramos dos ideas: aquella que expresa que combinando pocos elementos, aunque se puedan repetir, es imposible obtener infinito y por último los que consideran que infinito es un número muy grande. A partir de los resultados obtenidos, pudimos agrupar a los estudiantes considerando sus respuestas cerradas a un cuestionario que indagaba sobre estas cuestiones según las siguientes clases:

- *Acepta infinito*: Puedo tener infinito, muy numeroso es distinto de infinito y en infinito no necesariamente está todo.
- *Duda*: Duda o inseguridad. La respuesta más frecuente es *no sé*.

- *Infinito es un número muy grande.*

- *Es imposible construir una colección infinita.* Si dispongo de pocos elementos de partida para combinar, obtengo pocos; si en cambio, tengo muchos, consigo muchos.

- *No contesta:* No contesta las últimas preguntas.

En este trabajo, que abarca una franja etaria entre 13 y 19 años, continuamos el estudio de las concepciones de estudiantes secundarios. Comunicamos los resultados del análisis del léxico utilizado por los mismos estudiantes participantes del estudio descrito en Juan, Montoro y Scheuer, (2012), para justificar la respuesta dada a la pregunta *La cantidad de hojas de todos los árboles que hay en el Parque Nacional Nahuel Huapi en este momento, ¿Es infinita?*

### **Participantes**

Participaron en este estudio 195 estudiantes que asisten a tres colegios de Bariloche, en la Patagonia argentina, que llamaremos A (con orientación en turismo), B (con orientación en comunicación social) y C (colegio técnico). Los dos primeros tienen planes de estudio de 5 años, y el tercero de 6. Los tres son valorados positivamente en la comunidad educativa de la ciudad.

En cada colegio, participaron los alumnos de un curso de primer año, uno de tercer año y uno del último año (quinto en los colegios A y B, y sexto en el colegio C). Los estudiantes de primer año tenían todos entre 13 y 14 años, los de tercer año entre 15 y 16 y los de quinto o sexto entre 17 y 19 años. Es decir, la edad cronológica coincide en todos los casos con el nivel educativo.

### **Instrumento y procedimiento de indagación**

Se aplicó un cuestionario (Juan, Montoro y Scheuer, 2012) que presenta 12 preguntas cerradas con tres opciones de respuesta cada una, para ser contestadas en forma individual y por escrito en clase. Las primeras 11 preguntas se formulan sobre situaciones hipotéticas, que involucran cantidades infinitas obtenidas de una tarea relacionada con pensamiento combinatorio y la última, de tres ítems (también cerradas y con tres opciones de respuesta cada ítem), se refiere a un contexto cotidiano (cantidad de hojas de los árboles y granos de arena).

En el presente trabajo analizaremos las justificaciones dadas por los estudiantes a la respuesta a la pregunta de opciones cerradas ( si – no – no sé): *La cantidad de hojas de todos los árboles que hay en el Parque Nacional Nahuel Huapi en este momento, ¿Es infinita?*

### **Metodología de análisis**

Construimos una base de datos en la que asociamos a cada estudiante su justificación literal a la respuesta a la pregunta; como así también el colegio al que asiste junto con la edad; la clase en que quedó categorizado según las concepciones antes mencionadas (*Acepta infinito; Duda; Infinito es un número muy grande; infinito no es posible y No Contesta* ) y su respuesta cerrada ( Si – NO – NO SÉ) a la pregunta de la cual se estudia específicamente el léxico utilizado para su justificación ( P12aSI, P12aNo y P12aNosé).

Buscando una metodología que nos permita evidenciar similitudes y diferencias entre las respuestas dadas por los distintos grupos de estudiantes al cuestionario mencionado, y mediante la interpretación del léxico utilizado poner de manifiesto posibles concepciones presentes en distintos grupos de estudiantes.

Comenzamos el tratamiento de los datos realizando un análisis factorial de correspondencias (Crivisqui, 1993) de la tabla léxica que cruza los individuos con las palabras utilizadas. Esto nos permitió identificar ideas diferenciadas y nos brindó un criterio para agrupar a los estudiantes. El criterio que resultó más apropiado fue agrupar a los estudiantes según sus respuestas cerradas a la pregunta de la cual estamos estudiando el léxico (más detalle de estos métodos en Lebart y Salem ,1989; Lebart y Salem, 1994; Lebart, Salem y Bécue Bertaut, 2000).

Es decir, tenemos las respuestas agrupadas en tres grupos: P12aSI, P12aNO y P12aNOSE. Realizamos luego un análisis lexicográfico de la tabla léxica agregada, es decir de la tabla que cruza los grupos de respuestas cerradas (P12aSI, P12aNo y P12aNosé) en las filas y las palabras de las justificaciones en las columnas.

### **Resultados y discusión**

**Análisis lexicográfico de las justificaciones dadas por los participantes sin clasificar a la respuesta a la pregunta: *La cantidad de hojas de todos los árboles que hay en el Parque Nacional Nahuel Huapi en este momento, ¿Es infinita?***

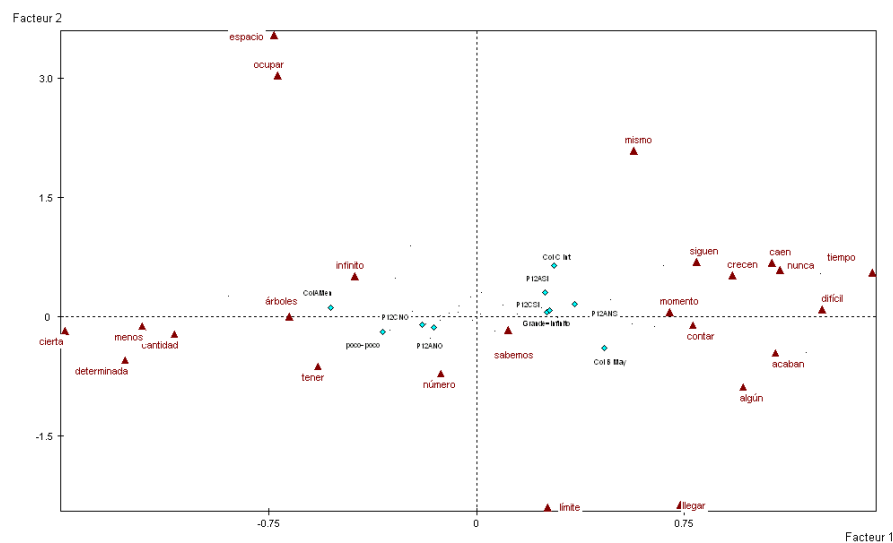
En la periferia del gráfico del análisis factorial de correspondencias de la tabla léxica que cruza los individuos con las palabras utilizadas se encuentran las palabras características de distintos tipos de respuestas; las que están próximas deben interpretarse como presentes en las mismas respuestas; por lo que haciendo un recorrido de la periferia podemos interpretar ideas diferenciadas en las distintas respuestas.

Ideas diferenciadas:

Para determinar si *la cantidad de hojas de todos los árboles que hay en el Parque Nacional Nahuel Huapi en este momento es infinita*, hay que tener en cuenta que:

- Es una **cierta cantidad**, una **cantidad determinada**;
- Depende del **tiempo**, como **nacen**, **crecen**, se **caen** - este proceso **sigue** y sigue - es **difícil** de contar;
- **Ocupan un espacio**
- Llega a un **límite**.

Gráfico 1: Primer plano factorial del análisis de correspondencias de la tabla léxica que cruza los individuos con las palabras utilizadas



Dado que el texto correspondiente a la justificación de cada estudiante es un texto corto en cuanto a la cantidad de palabras utilizadas, hemos considerado agrupar las respuestas en grupos. El análisis factorial de correspondencia nos permitió decidir que es adecuado agrupar las respuestas según las respuestas cerradas: P12aSI, P12aNO, P12aNOSE. (Tabla léxica agregada: Grupos x Formas léxicas).

### Análisis factorial de correspondencia de la tabla léxica agregada

Hemos realizado entonces un análisis factorial de correspondencia de la tabla léxica agregada que es una tabla de contingencia que cruza grupos de individuos (según sus respuestas cerradas a la pregunta) con las formas léxicas utilizadas en las justificaciones.

Para quienes no estén familiarizados con este método y para aportar a la interpretación de estos resultados brevemente mencionaremos que la proximidad entre dos palabras será mayor cuanto más frecuente sea la aparición de esas palabras en los mismos grupos y dos grupos serán más cercanos si utilizan las mismas palabras. Los grupos están en el centro de gravedad de las palabras que a ellos pertenecen (Baccalá y Montoro, 2008).

La siguiente tabla muestra cuáles son los individuos y variables más contributivas a cada uno de los ejes:

Tabla 1: Principales contribuciones a los dos primeros ejes del plano factorial

| Eje    | Individuos activos  | Frecuencias Activas |
|--------|---|---------------------|
| Eje I  | (+) determinada, infinito, límite, número, determinada-cantidad.        | (+) P12aNO          |
|        | (-) caen, crecen, creo, muchas, repetir, siguen, van, muchos-árboles    | (-) P12aSI          |
| Eje II | (+) algún, difícil, nunca, parque, sabemos                              | (+) P12aNOSE        |
|        | (-) muchas, poder, repetir, tiempo, todo, muchos-árboles, poder-contar. |                     |

El primer eje contrapone palabras que refieren a que la cantidad de hojas es un número determinado, que esta cantidad tiene límite (con coordenada (+)); a palabras que explican que esta cantidad es infinita porque caen, crecen, y esto se repite (con coordenada (-)). Este primer eje diferencia el vocabulario utilizado por los estudiantes que consideran que la cantidad de hojas del parque nacional es infinita de los que consideran que no lo es.

Por otro lado, el segundo eje está principalmente conformado por la respuesta cerrada P12aNOSE y asociada a esta, palabras que justifican esta respuesta cerrada con palabras como difícil, parque, nunca, sabemos; y opuestas a estas, palabras que describen que son muchas, repetir, todo, muchos-árboles y poder -contar.

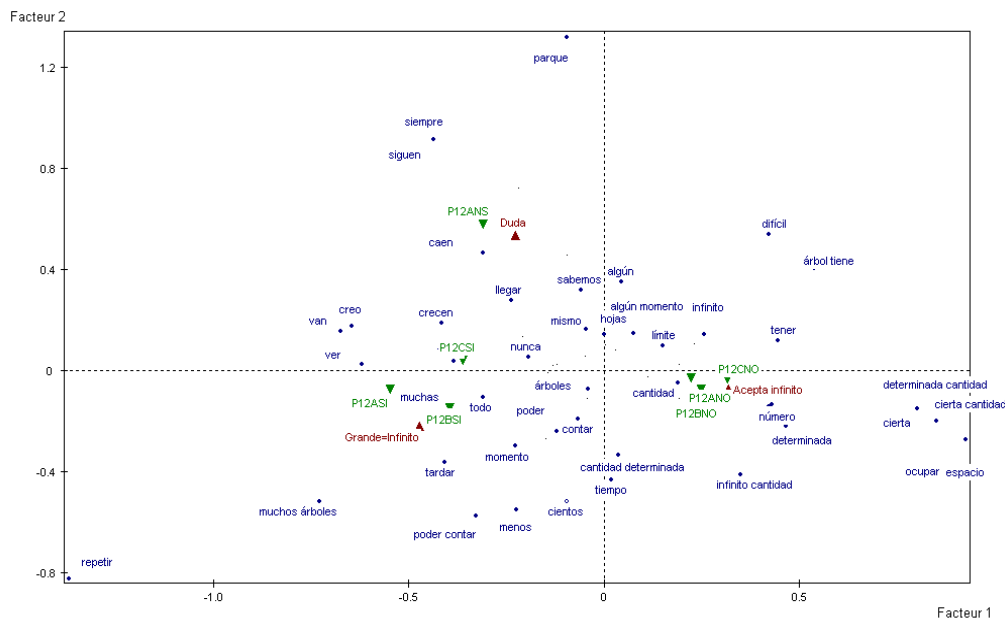
Si bien las anteriores son las palabras más contributivas a los ejes, recordemos que todas están bien representadas en el primer plano, por lo tanto, se pueden interpretar en él.

Del análisis de este plano se puede observar que:

Los estudiantes que responden que la cantidad de hojas es infinita, lo justifican haciendo referencia a que son muchas, que hay muchos árboles; en la dificultad de poder contarlas, en

el tiempo que transcurriría si se intentara contarlas y en cómo se iría modificando esa cantidad en el proceso de contarlas (nacen, crecen, mueren, caen...), se encuentra bien representada y cercana a estas palabras la frecuencia ilustrativa correspondiente a los estudiantes que presentaban la concepción que asume que un número muy grande es infinito (*Grande = Infinito*).

Gráfico 2: Primer plano factorial del AFC de la tabla léxica agregada



La idea recién expuesta acerca de cómo se va modificando la cantidad que se está considerando con el transcurso del tiempo, está compartida con los estudiantes cuya respuesta cerrada es *no sé*.

Por otro lado, los estudiantes que aseguran que la cantidad de hojas en un momento determinado no es infinita, justifican su respuesta basándose en que esta cantidad es una cantidad determinada, un número determinado, que es una cantidad que tiene límite y que esa cantidad se está considerando en un momento determinado (actual). Se encuentra bien representada y cercana a este grupo de respuestas la modalidad ilustrativa: *Acepta Infinito*, que corresponde a la concepción encontrada en nuestros estudiantes de aceptación de la posibilidad de construcción de un conjunto infinito, diferenciación de que un conjunto puede ser muy numeroso y no infinito y también que un conjunto infinito no tiene por qué contener todos los elementos.

### A modo de cierre...

La lexicometría se presentó como una metodología adecuada para identificar concepciones a través del léxico utilizado.

Estos resultados nos están mostrando que los estudiantes que aceptan como posible la construcción de una colección que tenga infinitos elementos y las diferencian de colecciones muy numerosas, asientan básicamente su posición en que estos últimos contienen una cantidad determinada (finita), que tiene límite y un fin. Es decir que pueden identificar colecciones finitas aunque muy numerosas diferenciándolas claramente de las infinitas.

Los estudiantes que responden no sé a la pregunta comparten con los estudiantes que contestan que son infinitas la justificación que alude a un proceso que se repite y sigue en el tiempo, concepción compatible con la de infinito potencial. Algunos de los estudiantes que contestan infinitas, hacen referencia además, a que siendo muchas, sería muy difícil contarlas. A este grupo la modalidad infinito es un número muy grande número muy grande

### Bibliografía:

- Baccalá N. y Montoro, V. (2008). Introducción al Análisis Multivariado. *Cuaderno Universitario n° 51. Centro Regional Universitario Bariloche*. Universidad Nacional del Comahue. Secretaría de Investigación y Extensión. CRUB . UNC.
- Crivisqui, E. (1993). Análisis Factorial de Correspondencias. Un Instrumento de investigación en ciencias sociales. Edición del laboratorio de Informática Social del la Universidad Católica de Asunción. Paraguay
- Fischbein, E., Tirosh, D. y Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 3-40.
- Juan, M. T. , Montoro, V. y Scheuer, N. ( 2012) Colecciones infinitas. Ideas de estudiantes de escuelas secundarias. *Educación Matemática*, 24, ( 2). México.
- Lebart L. y Salem A. (1989). *Analyse Statistique des Données Textuelles*. Paris. Dunod.
- Lebart L. y Salem A. (1994). *Statistique Textuelles*. Paris. Dunod
- Lebart L., Salem A. y Bécue Bertaut M. (2000). *Análisis estadístico de textos*. Milenio.
- Monaghan, J. (2001). Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2/3), 239-258.
- Montoro, V. y Ferrero, M: (2010) Proyecto de investigación B159: *Comprensión del número real por parte de estudiantes de los últimos años de secundaria e ingresantes a la universidad*. Secretaría de investigación de la UNComahue. Argentina. Dirigido por V. Montoro y codirigido por M. Ferrero; otros integrantes del mismo son los docentes: M. T. Juan; M. Cifuentes; F. Santamaría.