

SISTEMAS DE ECUACIONES: TRATAMIENTO DE LA SOLUCIÓN EN LIBROS DE TEXTO DE LA ESCUELA SECUNDARIA

Daniela Bruno, Florencia Rivas

Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”. Argentina

brunodaniela6@gmail.com, florenciasoledadrivas@gmail.com

Nivel Medio

Palabras clave: Sistemas de ecuaciones. Solución. Libro de texto.

Resumen

En este trabajo, se pretende analizar el tratamiento que se le da a la solución dentro del tema de “Sistemas de ecuaciones” en los libros de texto de la escuela secundaria. Resulta fundamental analizar las causas que originan las dificultades que presentan los alumnos respecto a la resolución de sistemas de ecuaciones. Para comprender dichas dificultades consideramos necesario analizar los libros de texto de la escuela media ya que forman parte de las fuentes de saber consultadas por la mayoría de los docentes y de los alumnos. Luego del análisis de los textos, concluimos que el tratamiento que le dan a la solución es inexistente y que le dan mucha importancia al proceso algorítmico que no lleva a comprender el significado de la solución.

Introducción

La problemática a abordar en este trabajo es el análisis de las dificultades que presentan los alumnos respecto a la resolución de sistemas de ecuaciones, centrándonos en el significado que posee la solución en la resolución del sistema.

Aunque existen diversas maneras de trabajar el tema, se puede decir que los alumnos resuelven los sistemas únicamente de forma algorítmica, sin darse cuenta qué es lo que resuelven y a qué quieren llegar. Según Caronia (2008)

Tan pronto los estudiantes de álgebra aprenden a manejar un método formal de resolución de ecuaciones tienden a abandonar el uso de la sustitución para la verificación. Este tipo de error otros autores lo consideran como: “falta de verificación en la solución”. (P 29)

Esta idea presentada en el párrafo anterior, se justifica en el desarrollo de este trabajo, analizando algunos libros de texto utilizados en la escuela media. Consideramos que, en general, se propicia el trabajo algorítmico, obligando a los alumnos a resolver los sistemas por un método en particular, sin que ellos decidan cuál es el más conveniente y sin dar mayor relevancia a la solución.

Los estudiantes, en general, no comprenden la solución del sistema: no verifican si es correcto o no el resultado obtenido, o si la solución corresponde a la respuesta del problema que genera el sistema. Una de las propuestas que podrían revertir esta situación es

...pensar en actividades significativas que no estén orientadas exclusivamente a la resolución del algoritmo y que, por el contrario, atiendan y apoyen los procesos comprensivos que deberían sustentar esas resoluciones. (Caronia, 2008,p 34)

En base a esto, el objetivo de la investigación es reflexionar acerca del tratamiento que se le da al tema de sistemas de ecuaciones en la escuela secundaria. A partir de ello, se tratará de hipotetizar cuál es la forma más viable de presentar este tema para que los alumnos lo comprendan en su totalidad sin centrarse solamente en el proceso algorítmico.

Referentes teóricos

Este artículo se ha desarrollado bajo la noción del discurso matemático escolar ya que se analiza la presentación del concepto de sistemas de ecuaciones lineales en libros de textos de la escuela secundaria.

Tal como explica Reséndiz (2006): “el discurso es el vehículo que transporta la mayoría de los aprendizajes surgidos en el salón de clases, ya que sus aspectos están poblados de diferentes lenguajes que unos emiten y otros intentan interpretar correctamente” (p 443), se considera que el discurso matemático resulta de suma importancia para entender las dificultades presentes en los alumnos en el proceso de sus aprendizajes.

Los libros de texto escolares son una herramienta importante para analizar el discurso ya que ellos aportan un conocimiento socialmente aceptado por docentes y alumnos. Además, se considera que:

El libro de texto en el ámbito escolar cumple, entre otras funciones, la de fuente de consulta del saber que se estudia, así como la de organizador en la creación de programas de estudio, estructuración de cursos y seminarios, o de situaciones específicas en la preparación de clases, elaboración de problemarios, guías de estudio o exámenes. Con una mirada más profunda, se puede advertir una doble naturaleza en las obras de texto: como una obra de texto, referida a los elementos de estructura y organización, y a aquellos tocantes a su contenido, es decir, al discurso que contiene. (Castañeda, 2006, p 254)

Al analizar el tratamiento que realizan los libros de textos de la escuela secundaria acerca del concepto de sistema de ecuaciones, se observa que cada autor presenta el contenido desde su perspectiva e ideología. Ello se refleja en la presentación del tema, la ejercitación propuesta y los temas seleccionados según las exigencias sociales del contexto (Castañeda, 2006).

Si bien el discurso matemático escolar constituye el espacio donde se construyen, negocian e interpretan los significados en la interacción social que se realiza en la escuela, por lo tanto construir conocimiento en interacción requiere del lenguaje utilizado socialmente (Reséndiz, 2006), se observa que en la realidad esto no ocurre. Los libros de texto utilizan un lenguaje propio de la Matemática despersonalizado en el que no se evidencia que los

conceptos fueron construidos socialmente sino que, se lo presenta como un saber finamente construido.

Análisis de los libros de texto

Texto 1 analizado: (2009). *Logonautas Matemática 3*. Buenos Aires: Puerto de Palos.

Presentación del tema

“Sistemas de ecuaciones” se encuentra dentro del cuarto capítulo del libro, llamado “Funciones”, de un total de ocho capítulos. Dentro de este capítulo, en la tercera unidad, luego de los conceptos de Función, Función Lineal y Función Cuadrática, se introduce el concepto analizado.

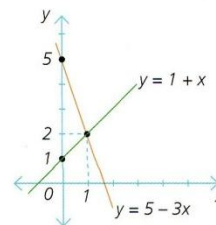
Se presenta una definición no del todo correcta acerca de sistema de ecuaciones: “Dos ecuaciones de primer grado, con dos incógnitas cada una, determinan un sistema de ecuaciones cuando la solución del sistema está formado por los valores de x e y que verifican las dos ecuaciones simultáneamente”. Luego presenta un ejemplo y a continuación, de manera sintética, se presentan tres métodos de resolución (igualación, sustitución y reducción por sumas y restas) con sus correspondientes pasos, tomando como modelo el mismo sistema de ecuaciones.

Asimismo se presenta la solución gráfica de los sistemas de ecuaciones con el ejemplo trabajado anteriormente.

28. RESOLUCIÓN GRÁFICA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

Cada ecuación de un sistema representa gráficamente una recta.

$$\begin{cases} 3x + y = 5 & \text{entonces } y = 5 - 3x \\ -x + y = 1 & \text{entonces } y = 1 + x \end{cases}$$



Las rectas se intersecan en el punto $x = 1, y = 2$.

Tipo de ejercitación

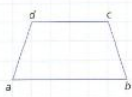
La ejercitación contenida en el libro comienza con un ejercicio de opción múltiple sobre las posibles soluciones de un sistema. Luego, se presentan seis sistemas indicando el método que se debe aplicar para su resolución con su correspondiente verificación. A continuación se presentan otros seis sistemas para resolver por el método que el alumno considere más conveniente.

La siguiente actividad plantea la resolución de dos problemas matemáticos y tres de la vida cotidiana mediante el planteo del correspondiente sistema de ecuaciones. Otro ejercicio propuesto consiste en la resolución de dos problemas geométricos, en los que se pide calcular el perímetro o las medidas de los ángulos interiores de dos figuras geométricas cuyos datos se presentan para que los alumnos formen el correspondiente sistema.

38. Tengan en cuenta los datos y resuelvan.

a) Calculen la medida de los ángulos interiores del trapecio.

abcd trapecio isósceles.

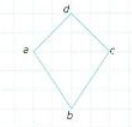


$\hat{d} = 3x + 45^\circ$

$\hat{c} = \frac{1}{2}y + 126^\circ$

$\hat{a} = \frac{4}{3}y - 45^\circ$

b) Calculen el perímetro del romboide.



$\overline{ab} = \frac{6}{5}\overline{ad} + 3,2 \text{ cm}$

$2\overline{cd} = \overline{ab} + 2 \text{ cm}$

Registros de representación

Las representaciones gráficas del libro son escasas y no aportan a las explicaciones dadas.

Aportes teóricos

El libro presenta la teoría del tema con explicaciones reducidas y no del todo correctas. Las mismas no conducen a un aprendizaje significativo y muchas de las actividades planteadas resultan complejas para los alumnos de acuerdo a los conceptos y ejemplos presentados. Asimismo se les presenta como actividad el planteo del sistema correspondiente a un problema sin haberlo trabajado anteriormente con un ejemplo.

27 SISTEMAS DE ECUACIONES

Dos ecuaciones de primer grado, con dos incógnitas cada una, determinan un **sistema de ecuaciones** cuando la solución del sistema está formada por los valores de x e y que verifican las dos ecuaciones simultáneamente.

$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ Este es un sistema de dos ecuaciones. Se escribe una llave al principio para indicar que los valores de x e y deben verificar las dos ecuaciones simultáneamente.

Tratamiento de la solución

La clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales por el número de soluciones aparece al principio de una actividad, con una definición muy abreviada sin ejemplificarlas y a continuación, se pretende que los alumnos, a través de siete ejercicios, clasifiquen el sistema de acuerdo a la solución hallada.

La siguiente actividad consiste en que, dada la representación gráfica de dos rectas secantes, los estudiantes encuentren el sistema compatible a ella. Luego se solicita, dada una de las ecuaciones que conforman un sistema, que se encuentre la otra solución para que cumplan ciertas condiciones acerca de compatibilidad o incompatibilidad. La actividad que

continúa consiste en responder acerca de la verdad o falsedad de ciertas afirmaciones dado un sistema de ecuaciones. Por último, las actividades consisten en trabajar sobre el valor que debe tomar el coeficiente de una de las ecuaciones del sistema para que sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Para finalizar el tema se presenta cuatro actividades de integración de los contenidos vistos.

42. Escriban una ecuación para que el sistema cumpla con la condición pedida en cada caso.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

a) Sistema compatible determinado.

b) Sistema compatible indeterminado.

c) Sistema incompatible.

43. Escriban V (Verdadero) o F (Falso). Expliquen las respuestas.

Dado el sistema: $\begin{cases} x - 3 = y \\ -x + y = a \end{cases}$

a) Si $a = 3$, el sistema es incompatible.

b) Si $a = 2$, el sistema tiene infinitas soluciones.

c) Si $a = -3$, el sistema es compatible indeterminado.

d) Si $a = 4$, el sistema es compatible determinado.

Texto 2 analizado: (1998). *Matemática 8 E.G.B.* Buenos Aires: Nuevas Propuestas S.R.L.

Presentación del tema

El contenido de “Sistemas de ecuaciones lineales” se encuentra en la unidad n° 10 de un total de 16 unidades. Al comenzar la unidad titulada “Sistema de ecuaciones” se presenta un problema de la vida cotidiana y luego se plantea de forma algebraica el enunciado. A continuación, se proponen distintas soluciones que verifican la primera ecuación del sistema pero no la otra. De esta manera, se quiere explicar que la solución del sistema debe verificar simultáneamente a las dos ecuaciones que conforman el sistema de ecuaciones.

El libro explica tres métodos de resolución: sustitución, igualación y reducción por sumas y restas.

Para explicar cada método se presenta un sistema para resolver. A medida que se resuelve el sistema se enumeran los pasos que los alumnos deben aplicar. Luego de haber llegado a una solución, se verifica si los valores de “x” y de “y” satisfacen a los dos ecuaciones que conforman el sistema. Este procedimiento solamente se realiza en el primer método, es decir que no se prioriza la verificación del sistema.

En cada método se resuelve un sistema diferente al método anterior.

Otro ejemplo:
$$\begin{cases} 3x - y = -11 \\ x + 4y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 3x - y = -11 \\ 3x = -11 + y \\ x = \frac{-11 + y}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 4y = 18 \\ x = 18 - 4y \end{array}$$

Se igualan

$$\begin{array}{l} \frac{-11 + y}{3} = 18 - 4y \\ -11 + y = (18 - 4y) \cdot 3 \\ -11 + y = 54 - 12y \\ y + 12y = 54 + 11 \\ 13y = 65 \\ y = 65 : 13 \\ y = 5 \end{array}$$

Se reemplaza en una de las ecuaciones del sistema.

$$\begin{array}{l} x + 4y = 18 \\ x + 4 \cdot 5 = 18 \\ x + 20 = 18 \\ x = 18 - 20 \\ x = (-2) \end{array}$$

Solución:
$$\begin{cases} x = (-2) \\ y = 5 \end{cases}$$

Tipo de ejercitación

Al finalizar cada método, se presentan seis sistemas de ecuaciones y problemas para plantear y resolver.

El libro indica el método que el alumno debe aplicar y, además, los sistemas están planteados de la misma manera.

En la última página del capítulo, el libro presenta seis sistemas para resolver analítica y gráficamente, pero no indica el método a que el alumno debe aplicar.

225 Resuelve aplicando el método por reducción.

a)
$$\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2x + 2y = 14 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - y = (-6) \\ 2x - 4y = (-26) \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x - 3y = (-7) \\ 2x - 2y = (-2) \end{cases}$$

226 Plantea las ecuaciones y resuelve por reducción los sistemas resultantes.

a) Un negocio tiene a la venta bicicletas y triciclos. Dispone de 46 unidades. En total se contaron 105 ruedas. ¿Cuántas bicicletas y cuántos triciclos hay en ese local?

b) En una empresa de gaseosas se colocan botellas en cajones de 6 ó 10 unidades. Cierta mañana se despacharon 205 cajones con un total de 1 850 botellas. ¿Cuántos eran de 6 y cuántos de 10 botellas?

c) Durante cierto tiempo, en una mueblería, se fabricaron roperos de 4 y 5 puertas. En total fueron 26 de esos muebles y se utilizaron 116 puertas. ¿Cuántos roperos tenían 4 puertas y cuántos 5?

d) Un medicamento se comercializa en frascos de 20 ó 30 unidades. Una farmacia hizo un pedido de 42 frascos al laboratorio. En total se entregaron 1 090 unidades. ¿Cuántos frascos de 20 y cuántos de 30 unidades recibió la farmacia?



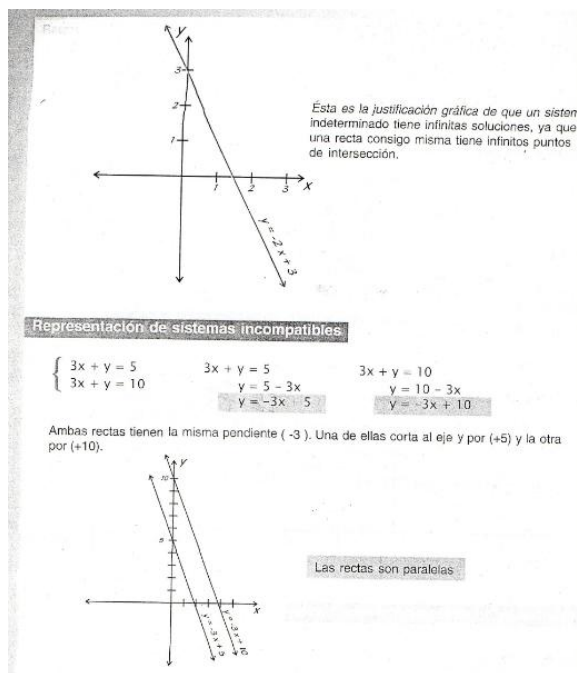
Registros de representación

Se presenta un sistema de ecuaciones y se explica que, si es necesario, se debe despejar la ecuación para que resulte la fórmula de una función lineal ($y = ax+b$).

Se resuelve con el método de igualación y luego se representan las rectas. A continuación, se presenta otro ejemplo y además, se grafican sistemas indeterminados e incompatibles.

Aportes teóricos

La clasificación de los sistemas de ecuaciones según la cantidad de soluciones se explica resolviendo dos sistemas de ecuaciones para presentar los sistemas indeterminados e incompatibles. Los sistemas compatibles determinados no se explica, pero se describe lo siguiente: “Todos los sistemas que hemos tratado hasta ahora con compatibles determinados pues tienen una única solución”.



Conclusiones

Del análisis de los dos libros de texto se puede concluir que el concepto de sistemas de ecuaciones se presenta de formas completamente distintas aunque en ninguno de los libros se focaliza el tratamiento de la solución. Los libros le dan suma importancia al proceso algorítmico de resolución, presentando extensa ejercitación.

Asimismo, dentro de la importancia que los textos brindan a los métodos de resolución, se puede observar que la explicación es estructurada. De esta manera, no facilitan que los alumnos puedan lograr un aprendizaje significativo del tema.

Además, las dificultades observadas en las aulas también pueden atribuirse a las elecciones didácticas en base a las cuales el docente trata este concepto, como así también de la elección de los libros de texto en lo que se apoyan. Si un docente basa sus clases en la

repetición de lo que plantean alguno de estos libros, entonces estará perdiendo (y estará haciendo perder a sus alumnos) de una de las características más determinantes de un sistema de ecuaciones: la existencia de una solución que simultáneamente verifica dos igualdades.

Referencias Bibliográficas

- Berio, A., Dumón, L., Mastucci, S., Prandini, M., Quirós, N., Sciotti, F., Tajés, G. y Vázquez, S. (2009). Logonautas Matemática 3. Buenos Aires: Puerto de Palos.
- Caronía, S., Zoppi, A., Polasek, M., Rivero, M. y Operuk, R. (2008). Un análisis desde la didáctica de la matemática sobre algunos errores en el álgebra. *Premisa 10* (39), 27-35.
- Catañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9* (2), 253-265.
- Jesé, F. (1998). Matemática 8 E.G.B. Buenos Aires: Nuevas Propuestas S.R.L.
- Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9* (3), 435-458.