
Propuestas para la enseñanza de las Matemáticas

JUEGOS DE INGENIO EN EL AULA

Irene Zapico, Teresa Fernández

Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González” – CABA , I.S.F.D. y T. 39 –

Vicente López - Argentina

izapico@gmail.com, terfer@gmail.com

Niveles Primario y Medio

Resumen

Este taller se propone mostrar que los acertijos y juegos de ingenio son una herramienta útil en las clases de matemática.

No sólo las harán más amenas, también contribuirán para que los chicos piensen, enfrenten desafíos, busquen nuevas respuestas.

Es un fenómeno conocido el que muchas personas, que dicen “odiar” la matemática, se interesan en este tipo de problemas... como si no tuvieran nada que ver con la matemática.

En el primer encuentro relataremos, muy brevemente, las opiniones de Miguel de Guzmán sobre el tema. Luego, entregaremos a los asistentes una serie de problemas de ingenio para que los resuelvan trabajando individualmente o en grupos (como prefieran).

Hemos elegido, para esta instancia, dos grupos de enunciados de reconocidos autores: Yakov Perelman y Jean Pierre Alem.

Una vez que los hayan resuelto, se compararán los resultados y reflexionaremos sobre cuáles son los contenidos de escuela media que aparecen en estos problemas y cómo llevarlos al aula.

En el segundo encuentro, propondremos un Torneo. Se deberán formar equipos y les iremos dando de a un problema, cuando entregan la solución de uno se les facilita el enunciado del siguiente. Iremos corrigiendo las respuestas y habrá un equipo ganador, cuentan las respuestas correctas y el tiempo empleado.

Para esta segunda instancia hemos elegido problemas de Martin Gardner y de Raymond Smullyan.

El propósito de este “Torneo” es que los profesores se diviertan, que experimenten ese lado ameno que mencionábamos, que piensen, que enfrenten desafíos y busquen nuevas respuestas.

Palabras clave: juegos- ingenio- problemas- equipos

Introducción

¿Qué relación existe entre la matemática y el juego?

Tomamos este párrafo de Miguel de Guzmán, de su artículo “Juegos matemáticos en la enseñanza”:

...¿Dónde termina el juego y dónde comienza la matemática seria? Una pregunta capciosa que admite múltiples respuestas. Para muchos de los que ven la matemática desde fuera ésta, mortalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego. En cambio, para los más de entre los matemáticos, la matemática nunca deja totalmente de ser un juego, aunque además de ello pueda ser otras muchas cosas.

Luego el autor enuncia que esta concepción de la matemática, como un juego, presenta el mismo tipo de estímulos y sugiere actividades similares a los que se dan en los juegos intelectuales.

Uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales, experimentando en partidas sencillas, observa a fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas,

tratando de asimilar sus procedimientos para usarlos en condiciones parecidas, trata finalmente de participar más activamente enfrentándose a los problemas nuevos que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, o a los problemas viejos aún abiertos esperando que alguna idea feliz le lleve a ensamblar de modo original y útil herramientas ya existentes o a crear alguna herramienta nueva que conduzca a la solución del problema. Las preguntas que nos hacemos son: ¿Se pueden utilizar juegos en la enseñanza? ¿Qué tipo de juegos? ¿De qué manera incluirlos? ¿Con qué objetivos?

Como los juegos son, básicamente, para divertir y entretener, existen quienes no comparten la idea de llevarlos al aula; temiendo que se distraiga la atención y no se cumplan los verdaderos objetivos. Pero creemos, por el contrario, que esas características de diversión y entretenimiento son muy efectivas para despertar el interés de nuestros alumnos, la clase será más dinámica y... ¿por qué no?... más divertida; variarían, favorablemente, hasta nuestras relaciones con ellos.

Guzmán afirma que es un hecho frecuente que muchas personas que se declaran incapaces de toda la vida para la matemática, disfrutan intensamente con puzzles y juegos cuya estructura en poco difiere de la matemática.

Es notable que esta misma idea la exprese Raymond Smullyan en el prólogo de su libro “¿La dama o el tigre?”: *...esto ilustra un fenómeno que, si bien común, es de lo más curioso: mucha gente que he conocido afirma odiar las matemáticas y, sin embargo, se muestran enormemente intrigados por cualquier problema de matemáticas o de lógica que les planteo, siempre y cuando se lo presente en forma de acertijo. No me sorprendería en absoluto si los buenos libros de acertijos demostrasen ser una de las mejores curas de la “ansiedad por las matemáticas”.*

De acuerdo con estas ideas, proponemos llevar al aula acertijos convenientemente elegidos, en los cuales se trabaje con conceptos matemáticos estudiados en la escuela media.

En este taller se resolverán problemas de ingenio de cuatro autores de los más reconocidos en este género: Yakov Perelman, Jean Pierre Alem, Martin Gardner y Raymond Smullyan.

La selección que hemos realizado busca que aparezcan conceptos matemáticos estudiados en la escuela media.

Organización de la actividad en el taller

Primer día:

Los asistentes resolverán problemas, trabajando en grupos. Luego reflexionarán sobre los contenidos abordados en cada uno de estos problemas.

Se presentará a cada uno de los autores y, a continuación, se les entregarán fotocopias con los enunciados de sus problemas.

Comenzamos con **Yakov Perelman**: Su nombre es ampliamente conocido en todo el mundo. De su pluma han salido obras de divulgación científica como: “Física Recreativa”; “Matemáticas Recreativas”; “Astronomía Recreativa”; “Álgebra Recreativa”; “Geometría Recreativa” y muchas otras. Perelman ya no vive, falleció en 1942, durante el bloqueo de Leningrado. Pero sus libros siguen siendo reeditados y muchos de ellos han sido traducidos a distintas lenguas.

En sus páginas pueden encontrarse extractos de obras conocidas, relatos amenos sobre ilustres personajes y problemas de diferentes campos de la física, la matemática, la astronomía, que exigen detenida meditación a la vez que nos entretienen y deleitan.

De su libro “Matemáticas recreativas”:

1) Funcionamiento de los círculos escolares. –En nuestra escuela- comenzó un pionero -, funcionan cinco círculos: de política, de literatura, de fotografía, de ajedrez y de canto. El de política funciona un día si y otro no; el de literatura, una vez cada tres días; el de fotografía, una cada cuatro; el de ajedrez, una cada cinco; y el de canto, una cada 6. El primero de enero se reunieron en la escuela todos los círculos y siguieron haciéndolo después de los días designados, sin perder uno. Se trata de averiguar cuantas tardes más, en el primer trimestre, se reunieron en la escuela los cinco círculos a al vez.

-¿El año era corriente a bisiesto?- Preguntaron al pionero.

-Corriente.

-¿Es decir, que el primer trimestre- enero, febrero y marzo- fue de 90 días?

2) El abuelo y el nieto. Lo que voy a contar sucedió en 1932. Tenia yo entonces tantos años como expresan las dos ultimas cifras del año de mi nacimiento. Al poner en conocimiento de ni abuelo esta coincidencia, me dejo pasmado al contestarme que con su edad ocurría lo mismo. Me pareció imposible.

¿Cuantos años tenia cada uno de nosotros?

3) Un problema con cerillas. El orador de turno vació sobre la mesa su caja de cerillas, distribuyéndolas en tres montones.

Tenemos tres montoncitos diferentes. En ellos hay en total cuarenta y ocho cerillas. No les digo cuantas hay en cada uno. Pero observen lo siguiente: si del primer montón paso al segundo tantas cerillas como hay en este, luego del segundo paso al tercero tantas cerillas como hay en ese tercero, y por ultimo, del tercero paso al primero tantas cerillas como existen ahora en ese primero, resulta que habrá el mismo número de cerillas en cada montón. ¿Cuantas cerillas había en cada montón al principio?

4) El caballo y el mulo (de “Álgebra Recreativa”)

Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el jamelgo de su enojosa carga, a lo que el mulo le dijo: "¿De qué te quejas? Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualará a la mía". ¿Decidme, doctos matemáticos, cuántos sacos llevaba el caballo, y cuántos el mulo?

Continuamos con **Jean Pierre Alem,**

Juegos de ingenio y entretenimiento matemático: Los entretenimientos de tipo numérico son tan antiguos como la historia misma de la humanidad. Carlomagno ya los practicó y después Leibniz y Flaubert, entre muchos otros. Jean-Pierre Alem propone una gran variedad de problemas en forma de juego; se trata, en general, de problemas matemáticos, pero ha incluido además cuestiones de lógica, criptografía, ajedrez. La mayor parte de estos problemas puede ser resuelta por personas que no tengan formación especial, aunque siempre se requiere la aplicación de un agudo ingenio.

El primer capítulo de este interesante y ameno libro nos presenta a dos personajes: el profesor Clovis Clou y su sobrino: Clotaire.

El sobrino viene a contarle que ha perdido mucho dinero en el juego pero que se resarcirá pues ha estudiado cálculo de probabilidades. Clovis le ofrece darle el dinero que perdió si responde correctamente tres preguntas:

5) Primera pregunta. Si se lanza dos veces la misma moneda, ¿qué probabilidades hay de que salga cara por lo menos una vez?

- Es fácil- dice Clotaire-. Sale cara el primer tiro. Sale cara en el segundo tiro. No sale cara en ningún caso. Son pues tres casos posibles de los cuales dos son favorables. La probabilidad es de dos tercios.

6) Segunda pregunta. Se lanzan simultáneamente tres monedas. ¿Qué probabilidades hay de que las tres caigan del mismo lado?

Clotaire reflexiona un momento.

De las tres monedas, necesariamente dos caen de un mismo lado. La tercera tiene tantas probabilidades de caer tanto de un lado como del otro. La probabilidad de que las tres monedas caigan del mismo lado es pues $\frac{1}{2}$.

7) Tercera pregunta –dice Clovis sin comentarios-. Dentro de un sombrero hay tres tarjetas. Una tiene las dos caras rojas, la segunda tiene una cara roja y una cara blanca y la tercera las dos caras blancas. Sacas una tarjeta del sombrero. La cara vuelta hacia ti es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la cara que se te oculta sea igualmente roja?

-Esta vez, tío –dice Clotaire riendo-, ya tengo el cheque. La tarjeta que haya sacado tiene tantas probabilidades de tener las dos caras rojas como las que tiene una cara roja y la otra blanca. La probabilidad de que la cara que se me oculta sea roja es pues $\frac{1}{2}$.

En “Juegos de ingenio y entretenimiento matemático” aparece, como apéndice, la primera publicación de este tema: “Juegos y solaces que se hacen por la ciencia de los números”, capítulo del “Triparty en la Science des Nombres”, de **Nicolás Chuquet**, escrito en 1484, que fue el primer tratado de álgebra en francés.

De “Juegos y solaces...” hemos seleccionado estos problemas:

8) El juego de los tres dados

Un hombre lanza tres dados y tú quieres saber los puntos de cada uno y de todo el conjunto. Dile que duplique los puntos de uno de los dados, el que quiera; a ese doble hazle agregar 5 y luego que esta suma la multiplique por 5; hazle agregar

los puntos de uno de los otros dos dados y delante de esa suma dile que ponga los puntos del tercer dado; pregúntale entonces el número que tiene y réstale 250, pues las tres cifras que restan te mostrarán los puntos de los tres dados.

9) El juego de los tres maridos y de sus mujeres

Tres hombres, cada uno con su mujer, quieren cruzar un río y sólo disponen de un bote muy pequeño que únicamente puede transportar a dos personas a la vez. Como entre ellos está dispuesto que ninguna de sus mujeres debe encontrarse a solas con un hombre que no sea su marido en este lado del río o en el otro, si una de las mujeres lo hiciera así sería reputada deshonesta y desleal a su marido. Cabe preguntarse ahora cómo esas seis personas podrán pasar el río quedando a salvo el honor de las mujeres.

10) El juego del tabernero

Un hombre vende vino pero sólo dispone de una medida de tres pintas. Llega al negocio otro hombre que lleva una medida de cinco pintas y que pide al tabernero cuatro pintas de vino; la cuestión es saber cómo podrá el tabernero dar al cliente esas cuatro pintas puesto que sólo tiene un jarro de tres en tanto que el jarro del otro contiene cinco pintas.

Para finalizar esta primera reunión se invitará a reflexionar sobre cuáles son los temas que se estudian en la escuela media tratados en estos problemas, cuál es la conveniencia de emplearlos y qué influencia suponen que ejercerá, este tipo de trabajo, en las clases.

Segundo día

La propuesta es realizar un torneo de acertijos entre los asistentes, que trabajarán en grupos.

Comenzamos con **Martin Gardner**

Nació en Tulsa, Oklahoma (EEUU) Ha iniciado a los lectores en cientos de entretenimientos matemáticos, desde los más raros hasta los más obvios, desde su sección “Juegos Matemáticos” en *Investigación y Ciencia* y sus publicaciones en *Time* y *Newsweek*. Es autor de más de veinticinco libros de juegos, curiosidades y entretenimientos matemáticos.

De su encantador libro: *Inspiración ¡ajá!*, hemos seleccionado:

1) Discos a medias

Elena y Tony encuentran apasionantes los problemas de ingenio. Su entretenimiento favorito consiste en buscarlos para proponérselos uno al otro o a los amigos.

Un buen día Elena y Tony pasan ante una tienda de discos.

Tony: Oye, Elena, ¿guardas todavía aquellos discos de “folk”?

Elena: Pues no. Le regalé la mitad, más la mitad de un disco, a mi amiga Susy. Y después le presté la mitad de los restantes, más la mitad de un disco a Pucho. Así que ahora solamente me queda un disco y estoy dispuesta a regalártelo si eres capaz de averiguar cuántos discos tenía yo al principio.

Tony estaba desconcertado. No atinaba a ver para qué puede servir medio disco.

¿Pueden explicarlo y averiguar cuántos discos tenía Elena en principio?

2) Todos con Ardid

De nuevo entre nosotros el profesor Ardid.

Profesor Ardid: He inventado para ustedes otro acertijo. Vamos a ver ¿Cuántos animales tengo en casa, sabiendo que todos son perros, menos dos; todos son gatos, menos dos y que todos son loros, menos dos?

¿Cuántos animales tiene?

3) Misteriosa mercancía

Cuando llegaron a casa de Elena, la chica le entregó a su padre un paquetito.

Elena: Aquí tienes el encargo que me hiciste.

Señor Clavero: Muchas gracias, hija, ¿Cuánto te ha costado?

Elena: El 500 cuesta 300 pesetas.

Sr. Clavero: ¿300 pesetas? Entonces cada pieza cuesta ya 100 pesetas.

Elena: Así es, papá.

¿Qué compró Elena?

De: “Matemática para divertirse”

4) Los soquetes de colores

Hay diez soquetes rojos y diez soquetes azules mezclados en el cajón del armario. Los veinte soquetes son exactamente iguales, salvo por el color. El cuarto está absolutamente a oscuras y tú quieres dos soquetes del mismo color. ¿Cuál es el menor número de soquetes que debes sacar del cajón para estar seguro de que tienes un par del mismo color?

5) Problema de peso

Si una pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?

Y a continuación: **Raymond Smullyan**

Lo llaman Ray, nació en 1919 en New York. Es matemático y músico, más precisamente concertista de piano y tiene la afición de construir telescopios. La especialidad del profesor Smullyan es la lógica matemática.

Ha escrito (y sigue escribiendo) decenas de libros sobre matemáticas recreativas, lógica coactiva (inventada por él), partidas de ajedrez a la inversa.

Se considera a Smullyan como el Lewis Carroll contemporáneo, ya que trabaja con matemática recreativa, incluyendo juegos matemáticos, y se extiende para cubrir áreas tales como lógica y rompecabezas del razonamiento deductivo.

Entre los libros de su autoría podemos citar: “Juegos por siempre misteriosos”, “¿Cómo se llama este libro?”, “¿La dama o el tigre?”, “Alicia en el país de las adivinanzas”, “Satán, Cantor y el infinito”, “Caballeros, bribones y pájaros egocéntricos”, “El enigma de Scherezade”, “Bosques curiosos y pájaros aristocráticos”, “Cinco mil años AC. y otras fantasías filosóficas”. “Silencioso Tao”, “Lógica de primer orden”, “Teoría de Sistemas Formales”.

¿Cómo se llama este libro?

Esta obra de Raymond Smullyan está compuesta por una serie de capítulos en los que nos plantea acertijos lógicos.

No sólo puede considerarse dentro de la Literatura por el modo en que están escritos sino que, a su vez, él se inspiró en famosas obras literarias, de las que tomó personajes y situaciones con los que juega libremente creando nuevas circunstancias, conflictos y diálogos que llevan al planteo de los acertijos.

Es así que en el Capítulo 4 aparece Alicia acompañada de los gemelos Tweedledum y Tweedledee, personajes de “A través del espejo y lo que Alicia encontró al otro lado”, obra que Lewis Carroll (1832 – 1898) publicó pocos años después de “Alicia en el país de las maravillas”, como continuación de ésta.

Smullyan nos plantea:

6) Alicia y el día de la semana

Alicia, tras atravesar el espejo, se encuentra vagabundeando por el Bosque del Olvido, donde es incapaz de recordar qué día de la semana es. En el bosque viven el León y el Unicornio. El León miente los lunes, martes y miércoles. El Unicornio miente los jueves, viernes y sábados. En todas las demás ocasiones, ambos personajes dicen siempre la verdad. Alicia les pregunta y el León dice: "ayer me tocó mentir", mientras que el Unicornio asegura: "a mí también me tocó mentir ayer". ¿Qué día de la semana es hoy?

El Capítulo 6 cuenta con la presencia del Inspector Craig, protagonista de películas alemanas de la década del 40. En el Capítulo 12, el Inspector Craig parte a Transilvania, su misión es averiguar si el Conde Drácula realmente existió... Aparece aquí la referencia a otra de las más populares obras de la Literatura Universal: la más famosa novela sobre vampiros, escrita por el irlandés *Bram Stoker*, en 1897, titulada “Drácula” e inspirada en la persona de Vlad “El Empalador”. En ella se narran las aventuras y desventuras de un significativo, refinadísimo y elegante aristócrata, de largos y afilados colmillos que se alimenta con la sangre de sus víctimas.

Veamos uno de los acertijos que Smullyan nos plantea sobre este tema:

7) Vampiros de Transilvania

En Transilvania conviven humanos, que siempre dicen la verdad, y vampiros, que siempre mienten. Sin embargo, para complicar un poco la cosa, la mitad de los habitantes, ya sean humanos o vampiros, están locos. Así, hay cuatro tipos de habitantes en Transilvania: humanos cuerdos, humanos locos, vampiros cuerdos y vampiros locos.

Un individuo loco cree que todas las afirmaciones ciertas son falsas y que todas las afirmaciones falsas son verdaderas. Gracias, a Dios, todos los habitantes de Transilvania hablan español y contestan con un "sí" o un "no".

¿Se podría saber, mediante una única pregunta, si un transilvano al que le preguntamos es un vampiro? y ¿se podría saber, también mediante una única pregunta, si la persona a quién interrogamos está loca?

En el Capítulo 5, titulado: “El misterio de los cofres de Porcia”, Smullyan toma este personaje de “El mercader de Venecia”, obra de Shakespeare.

Porcia, el personaje original, es deseada, amada y admirada por caballeros que provienen de los cuatro puntos cardinales pero, por indicaciones de su padre ya muerto, no puede seguir los dictados de su corazón, debe casarse con el pretendiente que elija, entre tres cofres, aquel que contiene el retrato de Porcia. Los cofres son: uno de oro, uno de plata y uno de plomo.

En la obra de Shakespeare los cofres tienen las siguientes inscripciones:

El de oro: "Quien me escoja ganará lo que muchos desean".

El de plata: "Quien me escoja ganará tanto como merece".

Y el de plomo vil: "Quien me escoja debe dar y aventurar todo lo que tiene".

8) Smullyan nos dice: *Pero supongamos que Porcia quisiera elegir marido, no por su bondad, sino por su inteligencia; habría las siguientes inscripciones en los cofres:*

*Oro: **El retrato está en este cofre***

*Plata: **El retrato no está aquí***

*Plomo: **El retrato no está en el cofre de oro***

Porcia explicó al pretendiente que, de los tres enunciados, a lo sumo uno era verdad.

¿Cuál cofre debe de elegir el pretendiente?"

El pretendiente acertó en la resolución del acertijo, pero tiempo después Porcia decidió divorciarse y aumentar la dificultad en las inscripciones de los cofres.

Años después, su hija, también llamada Porcia, usó el mismo método que su madre para escoger marido.

Con estos argumentos, que por supuesto no aparecen en la obra original, Smullyan multiplica los deliciosos acertijos que nos plantea.

Para finalizar, coordinaremos una puesta en común en la que cada uno de los equipos expresará sus opiniones y reflexiones sobre el trabajo realizado.

Referencias Bibliográficas

Alem, J. P. (1993). *Juegos de ingenio y entretenimiento matemático*. Barcelona: Gedisa.

Carroll, L. (1983). *Alicia a través del espejo*. Madrid: Alianza Editorial.

Gardner M. (sf) *Matemática para divertirse*. Recuperado de: www.librosmaravillosos.com

Gardner M. (1983). *Inspiración ¡ajá!*. Barcelona: Labor.

Guzmán, M. de (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Santa Cruz de Tenerife:

Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.

Perelman, Y. (1959) *Matemáticas recreativas*. Moscú: Ediciones en lenguas extranjeras.

Perelman, Y. (1975). *Álgebra Recreativa*. Moscú: Editorial Mir.

Smullyan, R. (1991). *¿Cómo se llama este libro?*. Madrid: Ediciones Cátedra, Colección Teorema.

Smullyan, R. (1990) *¿La Dama o el tigre?*. Buenos Aires: R.E.I.