

## PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO E PENSAMENTO ALGÉBRICO EVIDENCIADOS EM TAREFAS DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Laís Cristina Viel Gereti – Alessandra Senes Marins – Daniele Peres da Silva – Angela Marta Pereira das Dores Savioli

laisvielg@hotmail.com – ale\_marins@hotmail.com – dani-peres@hotmail.com – angelamarta@uel.br

Universidade Estadual de Londrina - Brasil

Tema: Pensamento Matemático Avançado

Modalidade: CB

Nível educativo: Médio (11 a 17 anos)

Palavras chave: Pensamento Matemático Avançado. Pensamento Algébrico. Sistemas de Equações Lineares.

### Resumo

*O ensino e aprendizagem da matemática sempre foram alvo de pesquisas, ainda mais quando se revela um insucesso nestes processos devido incompreensão de muito dos conceitos matemáticos. Pensando nisso, pretendemos com esta comunicação analisar e discutir indícios dos processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) e do Pensamento Algébrico (PA) em tarefas de Sistemas de Equações Lineares, apresentando as resoluções que evidenciam indícios de compreensão pelos conceitos matemáticos considerados acrescidos pelo grau de complexidade do PMA e do PA. Para isso, escolhemos uma turma de estudantes do segundo ano do Ensino Médio, uma vez que o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares foi trabalhado recentemente. Em relação à coleta de informações, aplicamos duas tarefas em um período de uma hora/aula, obtendo as informações por meio da produção escrita de cada estudante. Para a análise das tarefas utilizamos o quadro: Relações entre o Pensamento Matemático Avançado e características presentes do Pensamento Algébrico; construído por Bertolazi (2012). O método da investigação foi à luz da Análise de Conteúdo, segundo Bardin (2004).*

### Introdução

Da mesma forma que o ensino e a aprendizagem da Matemática tem sido alvo de pesquisas no Brasil e no exterior, a álgebra também se apresenta como um assunto de destaque entre pesquisadores da área de Educação Matemática, especificamente no que diz respeito à maneira como abordá-la em sala de aula. Analisando sua trajetória, encontram-se modificações nas formas de ensiná-la, as quais acarretaram na manifestação de várias concepções de Álgebra e de Educação Algébrica, (Fiorentini, Miguel e Miorim, 1993; Lins e Gimenez, 1997).

Nessa perspectiva, segue o estudo em questão, tendo como objetivo investigar, analisar e discutir indícios da manifestação dos processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) e do Pensamento Algébrico (PA) por meio de resoluções de trinta e oito

estudantes do segundo ano do Ensino Médio em uma tarefa<sup>1</sup> envolvendo Sistemas de Equações Lineares. Dessa maneira, realizamos uma análise interpretativa, fundamentada nos referenciais do PMA e do PA e à luz da Análise de Conteúdo, uma vez que se configura como método de pesquisa qualitativa.

### **Pensamento Algébrico**

Diferentes abordagens influenciaram o desenvolvimento histórico da álgebra, bem como, a partir delas percebeu-se uma ausência do pensamento algébrico à linguagem algébrica, ou seja, uma álgebra estritamente simbólica. Nesse sentido, com inquietações em relação em como ensinar a álgebra, e, por conseguinte, as mudanças nas formas de ensiná-la, surge como alvo de pesquisa entre pesquisadores da comunidade de Educação Matemática, o termo “pensamento algébrico”, sendo este um tema de reflexão e pesquisa.

Uma discussão entre professores de matemática e pesquisadores da área é acerca do que seja pensar algebricamente. Não há uma definição para este termo (Lins e Gimenez, 1997), no entanto, em busca de defini-lo, pesquisadores trazem caracterizações para esta expressão. Neste estudo destacaremos as caracterizações dos autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Lins e Gimenez (1997) e Ponte et al (2009).

De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), o pensamento algébrico é um tipo especial de pensamento, uma vez que pode se manifestar nos diferentes campos da Matemática, assim como em outras áreas do conhecimento. Ainda, esses autores apontam alguns elementos que o caracterizam, como: “[...] percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização” (p. 87).

Dessa forma, entre pensamento e linguagem há uma relação de natureza dialética, sendo que pode revelar-se gradualmente mesmo que ainda não exista uma linguagem algébrica simbólica (Fiorentini, Fernades e Cristovão, 2005).

Para Lins e Gimenez (1997), o pensamento algébrico possui três características fundamentais: aritmeticismo, internalismo e analiticidade, sendo este pensamento um dos diferentes modos de estabelecer significado para a álgebra. Estas características

---

<sup>1</sup> Cabe explicitar que aos participantes da pesquisa foram aplicadas duas tarefas, no entanto, por conta do espaço, neste artigo apresentaremos a análise de uma tarefa.

pautam-se na construção de significados para os números e operações aritméticas; nas propriedades das operações e nas operações com números “[...] desconhecidos como se fossem conhecidos” (Lins e Gimenez, 1997, p, 151), respectivamente.

Já, segundo Ponte et al (2009), “[...] aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação [...]” (Ponte; Branco e Matos, 2009, p. 11). Para os autores, o pensamento algébrico compreende três vertentes, são elas: representar, raciocinar e resolver problemas. Sendo que, a primeira vertente diz respeito

[...] à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação, nomeadamente sistemas cujos caracteres primitivos têm uma natureza simbólica. Na segunda vertente – raciocinar, tanto dedutiva como indutivamente – assumem especial importância o relacionar (em particular, analisando propriedades de certos objectos matemáticos) e o generalizar (estabelecendo relações válidas para uma certa classe de objectos) [...]. Finalmente, na terceira vertente – resolver problemas, que inclui modelar situações – trata-se de usar representações diversas de objectos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios. (Ponte; Branco e Matos, 2009, p. 11)

Nesse sentido, de acordo com os autores apresentados, o pensamento algébrico faz-se importante no currículo de Matemática, uma vez que permite a mobilização de experiências essenciais na construção do pensamento, bem como, desenvolvimento de habilidades em geral; compreensão das relações entre os números, medidas, estruturas aritméticas, etc. Além disso, este pensamento potencializa a compreensão de conceitos algébricos, sendo estes conceitos importantes tanto na vida adulta, no trabalho, como também sendo uma preparação para o Ensino Superior (NCTM, 2000).

### **Pensamento Matemático Avançado**

A teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA) foi desenvolvida pelo grupo de trabalho *Advanced Mathematical Thinking Group*, constituído durante o evento *International Group for the Psychology of Mathematics Education* na década de 80 (Pinto, 2002). Desde então vários pesquisadores tem se dedicado ao pensamento matemático desenvolvido por indivíduos, entre eles Tall (1991), Resnick (1987), Dreyfus (2002).

Optamos por trabalhar com a teoria desenvolvida por Dreyfus (2002). Este autor acredita que o Pensamento Matemático Avançado é um processo que ocorre na mente do estudante, que geralmente é baseado em uma sequência de atividades em que uma variedade de processos mentais ocorre e se interage, o qual mobiliza a compreensão de

um objeto matemático. Segundo o autor esses processos, geralmente, estão divididos em dois grupos, de *representação* e de *abstração*.

O processo de *representar* se refere aos símbolos e/ou notações utilizados para expressar um conhecimento implícito, de modo que possa utilizar essas representações para manipular esse conhecimento a fim de tornar mais fácil sua compreensão. Assim as representações simbólicas são aquelas que podem ser externamente escritas ou faladas, já as representações mentais são esquemas internos que as pessoas utilizam para se comunicar com o mundo externo. A visualização é também um processo importante porque permite a criação das representações mentais (Dreyfus, 2002).

O segundo processo pertencente à *representação* é a *mudança de representações e tradução entre elas*. Para o desenvolvimento do PMA é bom que o indivíduo possua diferentes representações de um conceito, e também saber quando mudar de uma representação para outra, passar de uma formulação de um problema para outro sempre que for necessário. A *modelação*, terceiro processo da *representação*, refere-se à construção de uma teoria ou estrutura que incorpora as características essenciais de um processo a ser modelado (Dreyfus, 2002).

Em relação aos processos que constituem e formam uma base para se abstrair estão *generalização* e *sinetização*. Segundo Dreyfus (2002) o primeiro se refere às induções realizadas a partir de particularidades, identificando pontos em comum com o intuito de expandir o domínio de validade. O segundo, *sinetização*, está relacionado com a composição de partes para formar um todo, ou seja, a combinação de conceitos, conteúdos para resolver um problema.

Segundo Dreyfus (2002), o PMA não é exclusivo de indivíduos que estão fazendo um curso do Ensino Superior, porém uma característica distintiva deste tipo de pensamento para o pensamento matemático elementar está no modo como os conceitos complexos são tratados. Para o autor os processos do PMA possibilitam fazer essa distinção.

Resnick (1987) denomina o pensamento avançado como pensamento de ordem superior, pois este não é exclusivo da matemática, está presente em vários ramos do conhecimento. Para a autora existem algumas características desse pensamento que relativamente são fáceis de listar, porém definir esse pensamento não é possível. As características para esse tipo de pensamento são: não é algoritmo; tende a ser complexo, pois o processo não é conhecido; geralmente apresenta várias soluções; envolve julgamento e interpretação com nuances; tem aplicações múltiplas; envolve auto-regulação do processo de pensamento; tem significado abrangente; existe um

considerável trabalho mental, envolvido nas elaborações e julgamentos exigidos (Resnick, 1987).

### Algumas análises

As análises dos registros escritos foram realizadas à luz da análise de conteúdo segundo Bardin (2004) a partir do quadro (em anexo): *Relações entre Processos de Pensamento Matemático Avançado (Dreyfus, 1991 e Resnick, 1987) e características presentes no Pensamento Algébrico conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), Ponte et al (2009,)* de Bertolazzi (2012). Utilizando esses procedimentos metodológicos inferimos que, em geral, todos os trinta e oito participantes da pesquisa apresentaram os processos do PMA em seus registros escritos.

Em quatro dos nove processos de representação que são: *analisar, classificar, definir, e traduzir*, todos os sujeitos apresentaram características do PMA; nos processos de *verificar, reconhecer símbolos e modelar*, apenas um estudante não apresentou os três processos; nos processos de *manipular símbolos* e de *visualizar* trinta e dois e vinte oito apresentaram esses processos respectivamente; já na abstração, que estão os processos de *generalização e síntese*, todos apresentaram a generalização e dezenove a síntese. Desse modo, concluímos que estudantes do Ensino Médio podem também apresentar o Pensamento Matemático Avançado.

Para este artigo, escolhemos a resolução de um estudante que resolveu a tarefa, cujo enunciado segue abaixo, utilizando a Regra de Cramer, encontrando todas respostas corretas.

#### A tarefa:

“O Tratado mais importante da história da matemática chinesa é o Chiu Chang Suan Shu, ou “Os Nove Capítulos da Arte Matemática”. Esse tratado, uma coleção de 246 problemas e suas soluções, foi organizado e colocado em sua forma final por Liu Hui em 263 d.C. [...] O primeiro problema do oitavo capítulo é o seguinte:

*Há três classes de milho, sendo que três sacos da primeira classe, dois da segunda classe e um da terceira totalizam 39 medidas. Dois da primeira, três da segunda e um da terceira totalizam 34 medidas. E um da primeira, dois da segunda e três da terceira totalizam 26 medidas. Quantas medidas do grão tem cada saco de cada classe? (ANTON e RORRES, 2012, p. 537 e 538).*

A seguir, apresentamos a resolução desta tarefa do estudante E5:

Figura 1 – Registro escrito do estudante E5

$\begin{cases} 3X + 2Y + Z = 39 \\ 2X + 3Y + Z = 34 \\ X + 2Y + 3Z = 26 \end{cases}$	$X = \frac{DX}{D} \rightarrow \frac{111}{12} = 9,25$
$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$Y = \frac{DY}{D} \rightarrow \frac{51}{12} = 4,25$
$27 + 2 + 4 - 3 - 6 - 12 = 12$	$\begin{aligned} 9,25 + 2 \cdot 4,25 + 3Z &= 26 \\ 3Z &= 8,25 \\ Z &= 2,75 \end{aligned}$
$DX = \begin{vmatrix} 39 & 2 & 1 \\ 34 & 3 & 1 \\ 26 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $351 + 52 + 68 - 78 - 78 - 204 = 111$	$S = \{9,25; 4,25; 2,75\}$
$DY = \begin{vmatrix} 3 & 39 & 1 \\ 2 & 34 & 1 \\ 1 & 26 & 3 \end{vmatrix}$ $306 + 39 + 52 - 34 - 78 - 234 = 51$	<p><b>Raciocínio:</b> Através da leitura do problema, elaborei um sistema linear de três incógnitas, encontrando os valores de x e y por determinantes e z isolando-o na equação</p>

Este estudante apresentou todos os processos de representação e de abstração, pois de acordo com Bertolazzi (2012), apresentou o processo de *analisar*, pois soube coletar as informações do enunciado da questão, assim como organizar essas informações em relação às grandezas e variáveis, que compreende o processo de *classificar*. Ao compreender o enunciado da questão, o estudante utiliza tais informações para escrever as equações lineares, manifestando o processo de *definir*. Com essas equações o estudante também observa as unidades de medidas, e se será preciso realizar conversões, característica que diz respeito a *verificar*. Outro processo evidenciado é *reconhecer símbolos*, quando utiliza as informações do enunciado e diferencia as incógnitas para escrever as equações. Com as incógnitas estabelecidas, o estudante consegue realizar operações algébricas, resolvendo o sistema de equações por meio da regra de Cramer. Apresentou o processo de *traduzir*, pois a partir de um enunciado em linguagem natural traduziu para uma linguagem algébrica e também mudou da representação de sistema para a representação de uma matriz. Vemos que apresentou a

*modelagem*, pois construiu um modelo matemático eficaz para as informações do problema, e, além disso, utilizou esse modelo para resolver a tarefa. Mostrou estabelecer relações entre conceitos, classificações e imagem ao transitar do sistema para a matriz, que são características do processo de *visualização*. Já para abstração, identificamos a *generalização*, pois resolveu o problema por meio de um sistema de equações lineares, e também apresentou a *sinetização*, pois gerenciou “[...] processos de representação associados ao processo de abstração matemática produzindo solução e resposta coerente com o enunciado apresentado por um problema” (Bertolazzi, 2012, p.47).

### **Considerações Finais**

Neste estudo, partimos do objetivo de refletir a respeito de indícios da manifestação de processos matemáticos, a partir de dois pontos de vista: o Pensamento Matemático Avançado (PMA) e o Pensamento Algébrico (PA). Para tanto, investigamos as resoluções de uma turma de estudantes do segundo ano do Ensino Médio em uma tarefa envolvendo Sistemas de Equações Lineares.

Por meio do processo de análise, avaliando os apontamentos aqui exibidos, podemos aferir que todos os estudantes investigados manifestaram os processos do pensamento matemático avançado, bem como: analisaram as informações do problema; definiram e verificaram importantes conceitos para a resolução do problema; construíram modelos matemáticos; reconheceram símbolos; utilizaram diferentes linguagens em uma mesma resolução; transitaram em duas ou mais representações, entre outros. Cabe ressaltar que alguns participantes desse estudo manifestaram o processo de abstração, uma vez que generalizaram e sintetizaram, o que sinaliza que esses estudantes possuem uma gama de conhecimentos de modo que construíram, identificaram e organizaram estruturas mentais a fim de resolver o problema.

No que diz respeito ao pensamento algébrico, sendo este um termo de discussão e pesquisa, como já explicitado, os estudantes investigados também apresentaram características desse pensamento. Ainda que alguns não tenham encontrado a resposta correta, estes estabeleceram relações entre as informações do problema; utilizaram notações diferentes, como por exemplo, linguagem natural e linguagem matemática; demonstraram algum processo de generalização; demonstraram ter domínio de operações aritméticas envolvendo números naturais e decimais; representaram; raciocinaram; enfim, resolveram o problema proposto.

Outro aspecto importante, é que os estudantes, em geral, justificaram suas ideias, descrevendo seus processos de pensamento, o que revela uma característica comum ao PMA e PA. Compete dizer que a maioria dos estudantes optou como procedimento para resolver um sistema de ordem dois, a regra de Cramer.

### Referências bibliográficas

- Anton, Howard; Rorres, Chris (2012). *Álgebra Linear com aplicações*. 10 ed. Porto Alegre: Bookman.
- Dreyfus, T. (2002). *Advanced Mathematical Thinking Processes*. In: Tall, D. *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.
- Fiorentini, D.; Fernandes, F. L. P.; Cristovão, E. M. (2005) *Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Relatório de Projeto da Fapesp [processo 03/11233-4]. FE – UNICAMP: Campinas.
- Fiorentini, D.; Miorim, M. A.; Miguel, A. (1993) *Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar*. Pro-Posições, v.4, n.1, p.78-91.
- Lins, R. C.; Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus.
- NCTM. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. 1.ed., 2000. Tradução Portuguesa dos Principles and Standards for School Mathematics. 2. ed. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P; Branco, N.; Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME - DGIDC,.
- Resnick, L. B. (1987). *Education and learning to think*. Washington: National Academy Press.
- Bertolazzi, K. S. (2012). *Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em matemática sobre sistemas de equações lineares*. Dissertação de mestrado – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

### Agradecimentos

Agradecemos a Fundação Araucária e a Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – pelo apoio financeiro.



**Anexos**

Processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado		Características inspiradas em aspectos do Pensamento Algébrico
<b>Representação</b>	Analisar	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Perceber características específicas de uma equação ou uma representação geométrica.</li> <li>• Coletar informações do problema.</li> </ul>
	Classificar	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Organizar informações do problema conforme a relação que existe entre as grandezas.</li> </ul>
	Definir	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreender a utilização de uma equação linear.</li> </ul>
	Verificar	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Examinar se as grandezas apresentam as mesmas unidades de medidas e realizar conversões quando necessário.</li> </ul>
	Reconhecer símbolos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diferenciar incógnitas, constantes e variáveis.</li> </ul>
	Manipular símbolos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expressar-se utilizando símbolos e realizar operações algébricas com estes.</li> </ul>
	Traduzir	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Transitar por representações matemáticas distintas envolvendo Sistemas de Equações Lineares.</li> <li>• Traduzir enunciados em linguagem natural para uma linguagem algébrica.</li> </ul>
	Modelar	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresentar um modelo matemático adequado para organizar os dados de um problema. Por exemplo, um sistema de equações, uma matriz ou uma tabela.</li> <li>• Utilizar expressões algébricas, por exemplo, equações e sistemas de equações lineares para resolver ou modelar o problema.</li> </ul>
	Visualizar	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estabelecer relações entre conceitos, classificações e imagens para sistemas de equações lineares.</li> <li>• Compreender posições relativas entre retas e planos.</li> </ul>
<b>Abstração</b>	Generalizar e Formalizar	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Associar conceitos distintos dentro de um mesmo conteúdo matemático, evidenciando representações mentais ricas.</li> <li>• Elaborar um sistema de equações lineares que resolva um problema proposto.</li> </ul>
	Sintetizar	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Gerenciar processos de representação associados ao processo de abstração matemática produzindo solução e resposta coerente com o enunciado apresentado por um problema.</li> </ul>