MATERIAL CURRICULAR: ACTIVIDADES PARA PROMOVER LA METACOGNICIÓN Y LA AUTORREGULACIÓN DEL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

P. M. Villalonga, S. E. González, M. Marcilla, S. Mercau, L. Holgado
Fac. Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
pvillalonga@yahoo.com, sgalindo@fbqf.unt.edu.ar
Niveles Medio y Universitario

Resumen
Este artículo es un avance del Proyecto "Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de Matemática" del Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán. El marco teórico se basó en enfoques cognitivos. De él se derivaron criterios para la enseñanza y evaluación del aprendizaje. La estrategia diseñada se centra en la evaluación formativa. Pretende favorecer aprendizajes significativos, valorizar la regulación continua y contribuir a superar la práctica de realizar sólo evaluaciones sumativas en cursos masivos. Recurre al empleo de un material curricular elaborado ad hoc, en el que se incluyen actividades que no requieren de la intervención continua del profesor y favorecen la interacción social en el aula. La implementación de la estrategia se concretó en un curso de Cálculo de primer año de una Facultad de ciencias en el año 2010, empleando un material curricular sobre la unidad: *Límite*. En un trabajo previo se describieron someramente las secciones del mencionado material y su validación mediante juicio de expertos.
Este artículo presenta sólo algunas de las actividades propuestas en el material para promover la metacognición y favorecer la autorregulación del aprendizaje.
Palabras clave: material curricular, Límite, aulas masivas, actividades metacognitivas

Introducción
Matemática I es una asignatura del primer cuatrimestre de primer año, de una Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Tucumán (U.N.T.). Su currículo abarca los contenidos sostenes del Cálculo Diferencial e Integral de una variable. La deficiente relación docente-alumno (en 2010 fue aproximadamente de 1/75 en clases prácticas y 1/350 en clases teóricas) y el exceso de contenidos, llevan a escasas situaciones de comunicación entre los participantes del proceso educativo. Las evaluaciones se limitan a pruebas de papel y lápiz, en fechas prefijadas. Intentando mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje y superar la limitación de realizar sólo evaluación sumativa, se diseñó el proyecto: "Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de Matemática", del Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán (CIUNT) aprobado en 2008. Este proyecto sigue lineamientos de teorías cognitivas (Jorba y Casellas, 1997; Moreira y Caballero, 2008; NCTM, 1989). Su objetivo es: diseñar e implementar en aulas multitudinarias de Matemática, una estrategia didáctica que recurre al empleo de un material curricular elaborado ad hoc. En un trabajo previo se describen las secciones del material diseñado y su validación mediante juicio de expertos. El mismo se implementó en 2010 para desarrollar la unidad de *Límite.* Este artículo presenta algunas de las actividades propuestas para promover la metacognición y favorecer la autorregulación del aprendizaje.

Marco Teórico

González Jiménez y Macías Gómez (2001) consideran que un aspecto fundamental en la actividad cognoscitiva de los alumnos, es el contenido de los materiales didácticos, la forma de introducción de los distintos temas y las conexiones entre ellos. Consideran fundamental la influencia que la estructura de los materiales didácticos ejerce sobre la motivación y la formación de interés en la enseñanza.

Según NCTM (1989), las actividades deben surgir de situaciones problemáticas acordes con la madurez (tanto matemática como cultural) y la experiencia de los estudiantes. En la selección de los problemas se deben respetar los principios sostenidos por Arcavi (1999), los cuales sostienen que: el alumno pueda usar su experiencia previa y aplicar su sentido común; sea posible resolver el problema de más de una manera; el problema permita elaborar preguntas nuevas; no siempre haya una respuesta única; la respuesta no sea siempre el resultado de una sucesión de algoritmos desencadenados como hábitos automáticos, sino el resultado de una conexión entre conceptos o ideas; el problema invite a reconsiderar una idea o concepto en un nuevo contexto; haya problemas genuinos de la vida real y de la experiencia de los alumnos.

En el diseño de los materiales educativos debe también concederse importancia a aspectos metacognitivos (Bixio, 2005). Campanario y Moya (1999) afirman que la metacognición puede y debe constituir un objetivo legítimo de la enseñanza. Para tal fin, el docente debe diseñar actividades que permitan al alumno autoevaluarse y autorregular su aprendizaje. En relación a la autoevaluación del alumno, Villagra de Burgos (2000) sostiene que consiste en un examen activo y permanente de los procesos que facilitan o impiden la construcción, organización y apropiación de los contenidos. Si bien el proceso de aprendizaje es único e irrepetible para cada ser humano, nadie aprende solo, sino que necesita de los demás para construir el conocimiento. El trabajo grupal es potente para las instancias autoevaluativas, ya que permite a cada estudiante la autosocioconstrucción del conocimiento, además de favorecer la percepción de lo que cada uno aporta y recibe del grupo. También, la autoevaluación ayuda a construir la auto-imagen dentro del grupo y atempera las dificultades que surgen. Resulta evidente la importancia de la autoevaluación como vía para acrecentar la valoración propia y la independencia.

Para favorecer los procesos de autoevaluación el docente debe: discutir con los estudiantes los objetivos y criterios de autoevaluación; exigir al estudiante que fundamente sus afirmaciones; promover una actitud de autointerrogación permanente; intercambiar con sus alumnos los procesos internos de autoevaluación; permitir que los alumnos verbalicen las estrategias puestas en juego para aprender y valorar los resultados (Villalonga de García, 2003).

Acorde a estos fundamentos, Jorba y Casellas (1997) para promover la metacognición aconsejan incluir en el material instrumentos para explorar: a) Las estructuras de acogida: Ideas previas y grado de alcance de los prerrequisitos de aprendizaje, representaciones que se hacen los estudiantes de las tareas propuestas y actitudes y hábitos adquiridos relacionados con el aprendizaje de la Matemática; b) La comunicación de los objetivos y la representación que se hacen de los mismos los estudiantes; c) El dominio, por parte de los alumnos, de los criterios de realización de la tarea o criterios procedimentales, los que evidenciarían la realización de las operaciones de anticipación y ejecución de la acción; d) Si se favorece la apropiación, por parte de los alumnos, de los criterios e instrumentos de evaluación del aprendizaje y e) La capacidad de los estudiantes para realizar actividades metacognitivas y de autorregulación de sus aprendizajes.

Metodología

En un artículo previo se expuso la metodología seguida para diseñar el material curricular para la unidad: Límite (González de Galindo y Villalonga de García, 2010). Se implementó una prueba diagnóstica. Teniendo presente estos resultados y los parámetros que Flores, García, Alvarado, Sánchez Mora, Sosa y Reachy (2004) juzgan adecuados para investigar la coherencia, pertinencia, calidad, cobertura y amplitud de un material didáctico, se diseñó una guía a ser desarrollada en 12 horas reloj. Fue validada mediante juicio de expertos e implementada en 2010.

Descripción del material curricular

Consta de cuatro secciones: i) La primera sección presenta los "Contenidos teóricos".

ii) La segunda sección corresponde a la "Guía de Trabajos Prácticos". Se presentan actividades para realizar en distintos tiempos: a) Actividades a realizar antes de concurrir a la clase práctica, las cuales deben ser discutidas, al inicio de la misma, entre el docente y los alumnos. b) Actividades para desarrollar grupalmente durante la clase práctica, supervisados por el docente. Para orientar este trabajo se presentan actividades resueltas, en las que se justifican los procedimientos seguidos y se analizan los resultados obtenidos. c) Actividades para trabajar, de manera independiente, después de la clase práctica. Están destinadas a consolidar conocimientos. iii) La tercera sección contiene las "Respuestas", a modo de instrumento de control. iv) La cuarta sección corresponde a tres "Apéndices" que contienen actividades de autoevaluación.

Los contenidos teóricos y prácticos fueron desarrollados dejando "huecos", a ser llenados por los alumnos durante el transcurso de las clases, después de realizar los procesos reflexivos necesarios (González de Galindo, 2003). Se consideró que un texto con finalidad educativa debía dar importancia a la selección y secuenciación de los contenidos, aspectos relevantes para la identificación de conceptos básicos, elaboración de síntesis e incluso, logro de la representación mental del contenido. Como los conceptos, procedimientos y procesos intelectuales de Matemática están interrelacionados, hubo una intención deliberada a través de las actividades incluidas, de conectar ideas y procedimientos, tanto entre las diferentes áreas de las Matemáticas como con otras áreas (González Jiménez y Macías Gómez, 2001).

Este trabajo describe sólo el espíritu de cada sección y se focaliza en presentar algunas de las actividades incluidas para promover la metacognición.

En la elaboración del material didáctico se consideraron los momentos en que las actividades debían incorporarse en el proceso de formación: actividades de iniciación, de desarrollo y estructuración, de aplicación y profundización, y, de evaluación (González Jiménez y Macías Gómez, 2001). Para ello, fue necesario diseñar distintas categorías de actividades que en forma ordenada realizarían los alumnos.

En el diseño de los Trabajos Prácticos, además de incluir situaciones en las que puede apreciarse el valor instrumental de la Matemática, se consideraron actividades que promueven mecanismos de regulación del aprendizaje. Para favorecer aprendizajes significativos se diseñaron estrategias metacognitivas que promueven la autosocioconstrucción del conocimiento. Estas estrategias deben ser implementadas al resolver las actividades incluidas en la guía.

Actividades metacognitivas incluidas en el material curricular elaborado ad hoc

i) **Primera sección** (presentación de los Contenidos teóricos). Entre las actividades de iniciación (útiles para que los alumnos expliciten y exterioricen sus ideas previas, se sensibilicen con el tema, verifiquen que los conocimientos que poseen no son los más adecuados para tratar esas situaciones, elaboren cambios en sus esquemas de conocimiento, etc.) se incluyeron las siguientes: a) A través de un mapa conceptual se ubica la unidad "Límite" dentro del currículo de la asignatura. b) Se establecieron los prerrequisitos del tema, haciéndose una revisión de los mismos con la participación del grupo clase. c) Se plantearon situaciones problemáticas de la vida diaria en las que el conocimiento a aprender era el único medio eficaz para resolverlas. Uno de tales problemas es: "La cantidad de droga en la corriente sanguínea t horas después de ser inyectada intramuscularmente, está modelada por la siguiente función: $f(t) = \frac{10t}{t^2+1}$ ¿Cuál será la cantidad de droga en sangre para un tiempo suficientemente grande?". De esta manera, se pretendió que el alumno construyera un conocimiento contextualizado, a diferencia de la secuenciación institucional habitual, en la que la búsqueda de aplicaciones de los conocimientos era posterior a su presentación descontextualizada. Además, se intentó motivar con una situación que tuviera sentido para el alumno de esta Facultad.

Las actividades de desarrollo y estructuración son empleadas para introducir los conceptos científicos, plantear y fundamentar hipótesis, relacionar distintos conceptos, asimilar los contenidos, reflexionar sobre la utilidad y aplicación de los contenidos a otras situaciones, etc. Luego de institucionalizar la noción intuitiva de límite, se requirió realizar la actividad del Apéndice 2 "Una forma reflexiva de estudiar Matemática". Se trata de una actividad metacognitiva que brinda pautas acerca de cómo se debe estudiar Matemática.

Las actividades de aplicación y profundización son útiles para que los estudiantes apliquen los nuevos conocimientos a otras situaciones, reflexionen sobre sus propios juicios respecto a los contenidos tratados, amplíen el conocimiento conseguido para aplicarlo a nuevas situaciones y contextos. Una de las desarrolladas fue: "Un cultivo de bacterias crece siguiendo la ley $y = \frac{1{,}25}{1+0{,}25\ e^{-0{,}4t}}$ donde el tiempo t ≥ 0 se mide en horas y el peso del cultivo en gramos. a) Determina el peso del cultivo transcurrido 60 minutos. b) ¿Cuál será el peso del mismo cuando el número de horas crece indefinidamente?".

- Las actividades de evaluación son útiles para que los alumnos conozcan el grado de aprendizajes que han adquirido, perciban la utilidad de los mismos, verbalicen y contrasten sus conocimientos sobre el tema, detecten errores, inexactitudes en sus conocimientos y puedan reforzar sus aprendizajes. Entre estas tareas se indicó cómo controlar el alcance de los objetivos y del aprendizaje del tema completando la ficha del Apéndice 1: "Tomando conciencia de mis logros" (Jorba y Casellas, 1997).

También, se presenta en el Apéndice 3 una prueba de autoevaluación que permite al estudiante realizar una toma de conciencia de lo aprendido.

ii) **Segunda sección:** Guía de Trabajos Prácticos.

Se presentan situaciones que muestran el valor instrumental de la Matemática y actividades que promueven mecanismos de regulación del aprendizaje para favorecer la metacognición. Un ejemplo de éstas últimas es la que figura en el Apéndice 4. Se incluyeron también actividades para las cuales ninguna técnica, memorizada previamente y aplicada mecánicamente, resultaba útil. Así, hay tareas que animan a los alumnos a revisar sus puntos de vista, a discutir y contrastarlos con el enfoque teórico y que requieren diversos procesos del pensamiento necesarios para el aprendizaje de la Matemática, desde los de un nivel básico: observar, describir, comparar, relacionar, clasificar, definir, hasta los de un nivel más complejo: analizar información, formular hipótesis (seleccionar la más adecuada, evaluar su pertinencia), sintetizar, evaluar e interpretar resultados (Pacheco, 2005). A modo de ejemplo se presentan en Apéndice 4 las Actividades I y II, diseñadas para desarrollar estas habilidades. Las situaciones de los apartados a), b) y d) de la Actividad I requieren realizar operaciones cognitivas de ambos niveles (exigen comprender y relacionar los conceptos de valor de una función en un punto, límite de una función y condición necesaria para la existencia del límite de una función, además de analizar y evaluar información). La respuesta al apartado c) requiere realizar sólo una operación cognitiva de nivel básico: recordar el enunciado de un teorema. Se incluyeron actividades como éstas por las dificultades que evidencian los alumnos en las distintas formas de representar una idea matemática y en la conversión de un registro de representación semiótica a otro, considerándose en particular los lenguajes: verbal, gráfico y analítico. Además, exigen realizar una síntesis, operación cognitiva de mayor complejidad (Panizza y Drouhard, 2002; Pimm, 1990).

Descripción de una de las estrategias didácticas implementada para favorecer la metacognición

Una de las estrategias metacognitivas que promueven la autosocioconstrucción del conocimiento es la diseñada para desarrollar la Actividad del Apéndice 5:
1) Los alumnos resuelven la situación planteada, en forma individual y anónima, en aproximadamente diez minutos. 2) Finalizado este tiempo, cada estudiante intercambia su producción con un compañero a fin de efectuar la evaluación mutua de la actividad realizada. 3) Después de intercambiadas las producciones, el docente explica en la pizarra cada apartado de la actividad, brindando los criterios de corrección. Debe considerar las posibles respuestas de los alumnos y preguntar a la clase si quedan algunas sin mencionar. Además, debe explicar detalladamente cuándo la solución debe ser calificada como “correcta” o “incorrecta”. 4) Terminada la instancia de coevaluación, cada protocolo vuelve a su dueño, para que reflexione sobre sus errores y luego escriba un texto explicitando el origen de su error. 5) Finalmente todos los protocolos se entregan al docente.
El escaso tiempo disponible para implementar esta estrategia en aulas masivas, al frente de las cuales hay sólo un docente, condicionó el diseño de la misma. Por ello se planificó que después de intercambiadas las producciones, fuese el docente quien brindara los criterios de corrección, en lugar de que los mismos surgieran del consenso, fruto de un debate con los estudiantes.

Conclusiones

El material curricular y las estrategias ideadas para aulas multitudinarias, podrían contribuir a lograr aprendizajes significativos y superar la práctica actual de evaluación, limitada sólo a evaluaciones sumativas. Estas presunciones se contrastarán con los resultados de los exámenes y de la encuesta aplicada a alumnos que participaron en 2010 de la estrategia implementada (tareas actualmente en proceso).
Es necesario reconocer que este material debe ser interpretado como instrumento subsidiario y de apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje, en el que toma relevancia la competencia comunicativa del docente y el dominio de la asignatura que imparte. Además, se considera que es de fundamental importancia para el logro de aprendizajes significativos

que el docente conozca el proceso de cómo se acrecientan las ideas elementales en estructuras con más entidad y rigor científico, y logre identificar las partes más áridas, las de mayor complejidad y los problemas de comprensión que conllevan.

Referencias Bibliográficas

Arcavi, A. (1999). ...Y en Matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos? *Números. Revista de didáctica de las matemáticas. 38, 39-56.*

Bixio, C. (2005). Enseñar a aprender: construir un espacio colectivo de enseñanza-aprendiz*aje. Rosario-Argentina: Homo Sapiens Ediciones.*

Campanario, J. M. y Moya, A. (1999). ¿Cómo enseñar ciencias? Principales tendencias y propuestas. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 17 (2), 179-192*.

Flores, F., García, A., Alvarado, C., Sánchez Mora M., Sosa, P. y Reachy, B. (2004). Análisis de los materiales instruccionales de ciencias naturales. Sus implicaciones en los cursos nacionales de actualización. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 9(20),* 199-228.

González de Galindo, S. E. (2003). *Resignificación de la clase magistral dentro de un nuevo modelo de aprendizaje.* Tesis de Maestría no publicada. Facultad de Arquitectura y Urbanismo (U.N.T.). Tucumán, Argentina.

González de Galindo, S. y Villalonga de García, P. (2010). Diseño de un material curricular que favorece la regulación continua en aulas multitudinarias. En UAP (Ed.), *Actas de la XXV Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines.* Entre Ríos: Editorial Universidad Adventista del Plata.

González Jiménez, F. y Macías Gómez, E. (2001). Criterios para valorar materiales curriculares: una propuesta de elaboración referida al rendimiento escolar. *Revista Complutense de Educación, 12*, 179-212.

Jorba, J. y Casellas E. (1997). *Estrategias y técnicas para la gestión social en el aula. Vol. 1: La regulación y la autorregulación de los aprendizajes*. Barcelona: Síntesis.

Moreira, M. A. y Caballero C. (2008). *La Teoría del Aprendizaje Significativo.* 1ra. Edición. Porto Alegre- Brasil, Burgos- España: UFRGS, Brasil y UBU, España.

N.C.T.M. (1989). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática.* Sevilla. Sevilla: SAEM Thales.

Pacheco, N. (2005). *Comprensión y aprendizaje en Matemática.* Mendoza-Argentina: Editorial EFE.

Panizza, M. y Drouhard, J. (2002). Producciones escritas y tratamientos de control en álgebra: algunas evidencias para pensar en interacciones posibles para guiar su evolución. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15,* 207-215. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata.

Villagra de Burgos, A. (2000). *Curso de Evaluación Pedagógica del Magíster en Enseñanza de la Matemática Superior de la U.N.T.* Tucumán, Argentina: F.A.U.

Villalonga de García, P. (2003). *Un enfoque alternativo para la evaluación del Cálculo en una Facultad de Ciencias*. Tesis de Maestría no publicada. Facultad de Arquitectura y Urbanismo (U.N.T.). Tucumán, Argentina.

APÉNDICE 1: Tomando conciencia de mis logros[1]

	Objetivos	*1ª fecha*	*2ª fecha*	*3ª fecha*	*4ª fecha*	*5ª fecha*	*6ª fecha*
1	*Interpretar geométricamente el valor f(a).*						
2	*Definir entorno de un punto.*						
3	*Representar geométricamente el entorno de un punto.*						
4	*Enunciar la noción intuitivamente de límite de una función.*						
5	*Interpretar geométricamente el límite de una función*						
6	*Enunciar la noción intuitiva de límite lateral izquierdo y derecho de una función.*						
7	*A partir del gráfico de una función identificar el valor de sus límites laterales.*						
8	*Escribir la "condición para la existencia del límite".*						
9	*Enunciar las propiedades del límite de una función.*						
10	*Aplicar las propiedades para calcular límite de funciones.*						
11	*Explicar la noción de límite infinito.*						
12	*Definir y encontrar la ecuación de asíntota vertical*						
13	*Explicar la noción de limite al infinito*						
14	*Calcular límites de funciones para* $x \to c,\ x \to \infty, x \to -\infty$.						
15	*Definir y encontrar la ecuación de asíntota horizontal*						
16	*Identificar los límites particulares*						

[1] Instrumento adaptado del *Instrumento de presentación de contenidos, de objetivos y de autorregulación* (Jorba y Casellas, 1997:80).

Indicaciones para el uso de la ficha*: Mientras trabajes con este capítulo, después de estudiar cada clase, llena la columna correspondiente a la fecha de la clase con los siguientes códigos:* ***N****:Objetivo aún no logrado.****P****: Objetivo parcialmente logrado.****C****: Objetivo completamente logrado. Estos códigos indicarán tu nivel de logro de los objetivos listados en la primera columna. En caso de no haber alcanzado completamente uno o más de los objetivos de los temas desarrollados en cada clase, concurre a las clases de apoyo que se dan en horarios de consulta o trata de discutir tus dudas con tus compañeros. Luego, de emplear esta estrategia, reflexiona acerca del nivel de logro de los objetivos y vuelca el código correspondiente en la columna con la fecha del día de tu toma de conciencia. Lo ideal sería que, a lo largo del curso, busques las estrategias pertinentes para que todos los objetivos que se encuentran en la columna de la izquierda sean alcanzados completamente. ¡Adelante!*

APÉNDICE 2: Una forma reflexiva de estudiar Matemática

La noción intuitiva de límite de una función es:

Sea f una función definida en un entorno del punto c, excepto posiblemente en c donde la función puede no existir., entonces cuando escribimos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{(con c y L números reales)}$$

significa que para valores de **x** *cada vez más próximos a c, pero distintos de c, la función toma valores f(x) tan próximos a L como se quiera.*

L , si existe, es único y finito

¿Cómo debes estudiarla? Te sugerimos lo siguiente:
Debes leerla detenidamente, tratando de explicar cada parte como se indica:
1) ¿Qué significa que "f sea una función definida en un entorno del punto c, excepto posiblemente en c donde la función puede no existir"?
Para dar respuesta a esta pregunta, reflexiona acerca de:
¿Qué es una función? ¿Qué es un entorno? Qué significa que una función esté definida en un entorno? ¿Qué significa la expresión "excepto posiblemente en c donde la función puede no existir"?
2) ¿Qué significa la expresión "para valores de x cada vez más próximos a c, pero distintos de c"?
3) ¿Qué significa que "la función toma valores f(x) tan próximos a L como se quiera"?
Reflexiona: - ¿Qué son los valores f(x) de la función?
- Explica la expresión "tan próximos a L como se quiera"
4) ¿Qué significa "L, si existe, es único y finito"?

APENDICE 3: Prueba de autoevaluación

Una vez que hayas resuelto esta prueba solicita las respuestas al docente.

Evaluación de la parte teórica

1) Define en forma intuitiva el concepto de límite de una función en un punto.
2) a) Enuncia la condición para la existencia del límite de una función en un punto.
b) Completa los puntos suspensivos:

Si el $\lim_{x \to a} f(x) = 4$ *entonces* . . . . = ... =. . . .

3) Califica con V (verdadero) o F (falso) las siguientes proposiciones justificando tu respuesta:
a) Si el $\lim_{x \to a} f(x) = l$ *entonces f(a) = l.*
b) Si existen $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *y* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *entonces existe* $\lim_{x \to a} f(x)$.
c) Si el $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ *entonces* $\lim_{x \to 0} \frac{x+3}{g(x)} = 0$

Evaluación de la parte práctica

1) Evalúa los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ $\qquad b)\ \lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

$c)\ \lim_{x \to 0} \frac{-4x}{\operatorname{sen} x}$ $\qquad d)\ \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & si \quad x<0 \\ \cos x & si \quad x \ge 0 \end{cases}$ *evalúa, si existe, el* $\lim_{x \to 0} f(x)$

3) Determina, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = \ln(x-3)$, *grafica f*

$b)\ f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

4) Encuentra el error en el desarrollo de este ejercicio

$$\lim_{x \to 2} \frac{4x^2-4}{x+2} = 4 \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x+2} = 4 \lim_{x \to 2} \frac{(x-2).(x+2)}{x+2} = 4 \lim_{x \to 2} (x-2) = 0$$

APÉNDICE 4

Actividad I) *Indica si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y justifica.*

a) Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *entonces* $f(c) = L$ *b) Si* $f(c)$ *no está definida entonces el* $\lim_{x \to c} f(x)$ *no existe*

c) Si f es una función polinomial, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ *d) Si no existe el* $\lim_{x \to c} f(x)$ *entonces no existe* $f(c)$

Actividad II) Esboza para cada apartado la gráfica de una función f tal que:

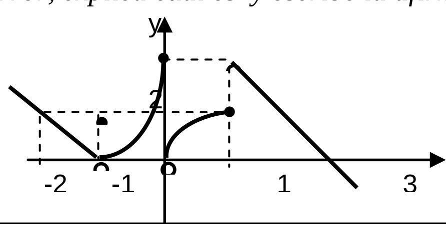
a) $Dom\ f = \Re - \{1\}$ $\lim_{x \to 1} f(x) = 6$

b) $Dom\ f = \Re$ $f(2) = 3$ $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

c) $Dom\ f = \Re$ $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

APÉNDICE 5

Dada la gráfica de la función f, analiza si existe error en las siguientes afirmaciones. Si encuentras error, explica cuál es y escribe la afirmación correcta:



$a)$ $\lim_{x \to -1} f(x) = 1$ $b)$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ $c)$ $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

$d)$ $\lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$

$e)$ $\lim_{x \to c} f(x)$ existe para todo valor de c perteneciente al intervalo $(0, 2)$