

VI COVEM, UPEL Maracay, del 08 al 11 de Octubre de 2007

REVISIÓN CRÍTICA-TEÓRICA DE UN MODELO PARA ANALIZAR LOS PROCESOS DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Rivas Mauro y Rivas Douglas

Universidad de Los Andes

rmauro@ula.ve

Pensamiento algebraico. Medio a superior. Estudio Teórico Interpretativo.

RESUMEN

La búsqueda de elementos que permitan caracterizar el pensamiento algebraico de los alumnos constituye un amplio campo de investigación en el ámbito de la Educación Matemática. Los modelos que identifican elementos encaminados a tal caracterización significan avances hacia la misma. En este orden de ideas, el presente estudio busca determinar desde un punto de vista eminentemente teórico los aportes y debilidades en la propuesta de Arzarello, Bassini y Chiappini (2001) sobre un modelo de análisis de los procesos de pensamiento algebraico. La esencia del modelo presentada por Arzarello et al. (2001), se fundamenta en el Triángulo Semiótico de Fregue y la noción de marco conceptual. La determinación de aspectos que caracterizan el pensamiento algebraico se realiza siguiendo una metodología que comprende dos vertientes; en la primera se destacan los aportes presentados por los autores para la comprensión y explicación de procesos de pensamiento presentes en la actividad de resolución de problemas algebraicos, haciendo uso del análisis de los procesos de resolución observados en estudiantes, identificando y caracterizando a través de constructos, elementos-conceptos presentes en esos procesos de resolución. La otra vertiente, presentada de manera paralela a la anterior, trata de señalar desde una perspectiva teórica, ontológica y semiótica aspectos y cuestiones que se consideran necesarios para ahondar, complementar y presentar posibles vías de continuación de la investigación o buscar formas de aplicación de los hallazgos propuestos. Los resultados de este estudio muestran que se ha podido identificar un considerable y variado conjunto de términos útiles para aproximarse a una caracterización del pensamiento algebraico. Se considera que los verdaderos aspectos dinámicos de los procesos de pensamiento algebraico pueden ser descritos apropiadamente observando la forma en que los alumnos modifican sus triángulos semióticos dentro de un marco o pasando de un marco a otro. Así mismo, teniendo presente los avances que representan las descripciones y explicaciones producto del trabajo desarrollado, se concluye sobre la conveniencia y necesidad iniciar investigaciones encaminadas a la búsqueda de la utilidad que pueden tener estos hallazgos en la actividad de enseñanza y en la concepción y desarrollo de los currícula de formación de los diferentes niveles educativos.

Palabras clave: Educación matemática, enseñanza del álgebra, pensamiento algebraico.

INTRODUCCIÓN

El pensamiento algebraico puede interpretarse desde diversas perspectivas. Al menos dos de ellas son fácilmente reconocibles: la disciplinar y la operativa. Desde una perspectiva disciplinar, el pensamiento algebraico constituye un espacio de estudio cuyo objeto se caracteriza por la capacidad para resolver problemas relativos al álgebra. Así mismo, tal objeto de estudio, considerado en sí mismo como condición humana, constituye una perspectiva desde la cual, haciendo uso de ella, las personas resuelven problemas algebraicos. Esta segunda perspectiva es la que hemos denominado operativa. La perspectiva disciplinar proporciona una visión amplia del estudio del pensamiento algebraico, comprende la visión operativa, pero además comprende todo

lo que en relación a su objeto de estudio pueda concebirse, lo epistemológico, lo histórico, lo ontológico. La generalidad de la perspectiva disciplinar, coloca en la necesidad de concebir una perspectiva más efectiva en el estudio de tal constructo. En este orden de ideas, la propuesta de estudio presentada por Godino (2002) ofrece la posibilidad de dos nuevas perspectivas desde las cuales se puede establecer una visión más apropiada para el estudio del constructo en cuestión, a saber; la institucional (epistémico) y la cognitiva (ontológica). Situándonos, desde estas nuevas perspectivas, se considera que el estudio que a continuación se presenta se realiza desde una perspectiva cognitiva, teniéndose conciencia de la visión parcial que la misma constituye. Debe tenerse también conciencia que tal consideración sólo obedece a una cuestión de carácter metodológico para el estudio.

Desde la perspectiva cognitiva se trata de estudiar y establecer los aspectos que entran en juego cuando una persona resuelve un problema algebraico. Por tal razón los estudios históricos, epistemológicos, en general de carácter epistémico, del pensamiento algebraico sólo constituyen referencias en las cuales se enmarca la presente revisión. En este orden de ideas, el presente estudio busca determinar desde un punto de vista eminentemente teórico los aportes y debilidades en la propuesta de Arzarello, Bassini y Chiappini (2001) sobre un modelo de análisis de los procesos de pensamiento algebraico. La esencia del modelo se fundamenta en el Triángulo Semiótico de Fregue y la noción de marco conceptual.

Planteamiento del Problema

El estudio del pensamiento algebraico desde una perspectiva cognitiva tiene como objeto fundamental determinar los procesos que tienen lugar en el alumno cuando resuelve un problema de índole algebraica. La búsqueda de elementos que permitan caracterizar tal pensamiento constituye un amplio campo de investigación en el ámbito de la Educación Matemática. Las propuestas de modelos que identifican elementos encaminados a tal caracterización representan avances hacia la misma.

Kieran (2006) presenta una panorámica bastante completa sobre los diferentes espacios de desarrollo de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra. No obstante, las descripciones presentadas quedan en generalidades que claman ser estudiadas en detalle. Otros estudios: Chevallard (1989), Kieran y Filloy (1989), Grugeon (1995), Malisani (1999), aún cuando abordan el problema en aspectos específicos y con cierto nivel de detalle no presentan información que pueda ser utilizada para la planificación didáctica específica que concierne a la enseñanza del álgebra. Así por ejemplo, encontramos los estudios referidos a los obstáculos epistemológicos como una caracterización de aquellos conocimientos que al ser exitosos en situaciones específicas tienden a ser generalizados y aplicados en situaciones que no son pertinentes, conllevando a errores en los procesos de resolución. Sin embargo, la identificación de cuales son esos obstáculos tiene como referencia obligatoria la observación de cómo se hacen presentes precisamente cuando un alumno resuelve determinado tipo de problemas. En relación con este aspecto se reconoce la existencia de investigaciones que tratan de explicar las dificultades específicas que muestran los estudiantes (Elichiribehety y Otero, 2004), no obstante, no es fácil encontrar la forma de analizar los procesos cognitivos involucrados que puedan ser generalizados y proveer de sugerencias convenientes para enseñar.

Siguiendo este argumento Arzarello, et al. (2001) consideran pertinente la concepción y presentación de un modelo a través del cual se pueda analizar el pensamiento algebraico del alumno al resolver un problema. Tal modelo es el resultado del desarrollo de un proyecto de investigación a lo largo de varios años, y tiene como base empírica el comportamiento de cientos

de estudiantes, desde octavo grado hasta grados universitarios, observado mientras resuelven problemas pre-algebraicos y algebraicos.

El presente trabajo busca ir más allá de la propuesta de estos autores tratando de mostrar, desde una postura crítica, tanto los aportes como las debilidades encontradas en tal modelo, tratando de señalar posibles vías de desarrollo posterior que afinen de manera pertinente los avances alcanzados.

Marco Teórico

El estudio presentado por Arzarello et al. (2001) se fundamenta en la teoría sociocultural de Vigotski. El desarrollo del tema abordado demanda establecer, de manera clara, la relación entre pensamiento y lenguaje. En este sentido, los autores proponen que la relación entre pensamiento algebraico y lenguaje formal debe verse desde la perspectiva planteada por Vigotsky, en el que el pensamiento y el lenguaje algebraico son dos aspectos intervinientes y mutuamente dependientes del mismo proceso. Si bien el pensamiento algebraico hace uso de un lenguaje formal, no es reducible a este, pues la actividad en álgebra se convertiría en un juego de mecanismos manipulativos, con una mínima participación cognitiva, lo cual conduce inevitablemente a actitudes y acciones descritas por Sfard (1991) como “transformación pseudoestructural” en la que el alumno establece una correspondencia uno a uno entre expresión sentido y denotación (significado), quedando sin lugar una de las características fundamentales del pensamiento algebraico como lo es el concebir diferentes expresiones, con sentidos distintos y con el mismo significado. Ejemplos de tales situaciones pueden verse la Tabla 1.

Tabla 1: Expresiones con diferente sentido pero igual denotación*

Expresión	Sentido	Denotación
$4x + 2$ y $2(2x + 1)$	Diferente	Igual
$(x + 5)^2 = x$ y $x^2 + x + 1 = 0$ (al ser resueltas en R)	Diferente	Igual

* Información tomada Arzarello et al. (2001).

Llegados a este punto es necesario introducir los constructos teóricos en lo que se fundamenta el modelo propuesto por los autores.

El Triángulo de Frege

Arzarello et al. (2001) consideran convenientes las ideas de Frege para observar la interpretación de expresiones simbólicas del álgebra. Con el fin de presentar un análisis teórico preciso del significado de expresiones simbólicas en álgebra como una herramienta concreta para describir el dinamismo de procesos algebraicos típicos o erróneamente concebidos, se toma como punto de partida las ideas de Frege sobre semántica. La Figura 1 muestra el triángulo semiótico de Frege

Al hablar de sentido se debe distinguir entre dos clases de sentido, a saber:

- Sentido algebraico**, es el más evidente, representa abreviadamente la misma forma cuando el objeto denotado es obtenido por medio de reglas de cálculo. Por ejemplo, la fórmula $n(n+1)$ en el universo de los números naturales expresa una regla de cálculo, a través de la cual se obtiene el conjunto $A = \{2, 6, 12, 20, \dots\}$.
- Sentido contextualizado**, es el sentido que depende del dominio de conocimiento en el cual este se encuentra. Por ejemplo, la expresión $n(n + 1)$ en el nivel elemental de la teoría de

números tiene el sentido del producto de dos números consecutivos, mientras en geometría esta expresión se puede concebir como el área de un rectángulo cuyos lados son n y $n + 1$.



Figura 1: Triángulo semiótico de Frege

Es importante notar que se trata de sentidos diferentes. Sin embargo, la variedad de sentidos que una expresión puede tener están dados directamente en ella, por sí misma. Esta característica, propia del lenguaje algebraico es conocida como *ideografía del lenguaje algebraico*. Esta característica permite cambiar el sentido de una expresión a través de manipulaciones convenientes sobre la forma de la fórmula (por ejemplo, $n(n + 1) \rightarrow n^2 + n$). Así, el poder del álgebra consiste en los múltiples sentidos que son incorporados a la misma fórmula, los cuales pueden ser obtenidos por manipulaciones sintácticas sobre ellas. El problema de la didáctica consiste en poder garantizar que los elementos del triángulo de Frege puedan ser concebidos de manera equilibrada en la cognición del alumno.

En relación con este aspecto de la propuesta se observa cómo el triángulo de Frege ofrece los elementos pertinentes para comprender ciertos aspectos que se presentan en la comprensión y manejo de expresiones algebraicas. Una revisión sobre otras propuestas al respecto, tales como los propuestos por Ogden y Richard (1923) o Pierce (1983), citados por D'Amore (1999), solo conllevarían a identificar elementos similares con comportamientos análogos a los explicados. No obstante, es importante señalar que se puede hablar de aspectos más específicos al momento en que un alumno resuelve un problema algebraico, que caracteriza las formas de pensamiento de los estudiantes en un momento determinado; de las herramientas cognitivas-conceptuales de las cuales echan mano para argumentar en relación con el problema. Este señalamiento conlleva a introducir los siguientes constructos teóricos en la búsqueda de un modelo para el análisis del pensamiento algebraico.

Marcos conceptuales

Las observaciones realizadas por los autores de las actuaciones de los alumnos al resolver problemas algebraicos les permiten identificar que las acciones, en diferentes momentos, son reguladas por su conocimiento de alguna noción, tal conocimiento consiste en un conjunto de nociones organizadas, que le sugieren al alumno cómo razonar, manipular fórmulas, anticipar resultados mientras va resolviendo, es decir, cómo ir cambiando los sentidos de las fórmulas para su conveniente interpretación y manipulación que le conlleve a resolver el problema. Los autores llaman *marco conceptual* a tal conjunto organizado de conocimientos y posibles comportamientos.

Un aspecto de carácter teórico importante es que el marco conceptual tiene lugar en la cognición del sujeto, lo cual enfatiza su característica individual. En el proceso de resolución de

un problema estos marcos actúan de forma dinámica; unos son cambiados por otros que son considerados más apropiados para obtener la solución por parte del estudiante.

Para indicar un espacio más amplio en el cual actúa un alumno al ir cambiando sus marcos conceptuales, al resolver una tarea dada, los autores introducen otro constructo teórico denominado *mundo de resolución*. Un mundo de resolución está caracterizado por los sistemas de signos, los cuales son utilizados para mediar el pensamiento y la acción del sujeto, y por las herramientas de interacción, las cuales ayudan al sujeto a producir objetos significados y expresivos para resolver el problema dado.

Un tercer constructo presentado por los autores, con el fin de explicar el pensamiento algebraico, es el de *fórmulas como herramientas del pensamiento*. Los autores distinguen dos formas en que las fórmulas son utilizadas como herramientas del pensamiento. La primera forma de estas fórmulas se manifiesta “cuando se realizan manipulaciones formales en profunda conexión con aspectos denotativos, con el fin de producir una forma en la fórmula, que incorpore un sentido esperado, debido a una supuesta denotación” (Figura 2). La segunda forma de estas fórmulas tiene lugar cuando con el objeto de descubrir una nueva (supuesta) intención, sin realizar manipulaciones formales, se logra ver una nueva (supuesta) extensión, posiblemente dentro de un nuevo marco conceptual. Es decir, cuando se logra pasar de un sentido a otro sentido a partir de la misma expresión, sin la realización de ningún tipo de manipulación formal (ver Figura 3).

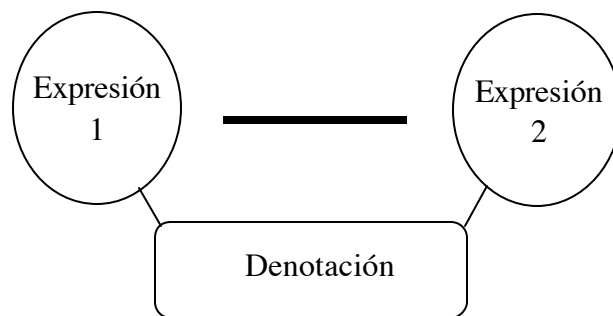


Figura 2. Primera forma de las fórmulas como herramientas del pensamiento

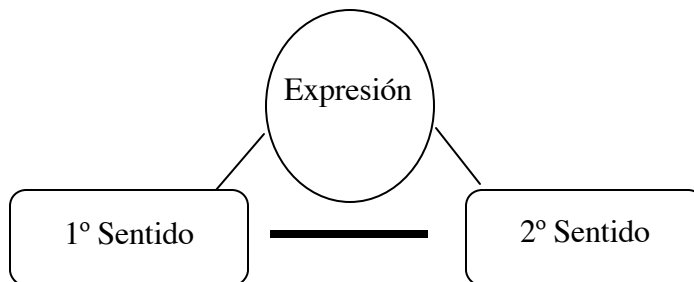


Figura 3. Segunda forma de las fórmulas como herramientas del pensamiento

Una vez caracterizados los constructos teóricos precedentes, Arzarello et al. (2001) presentan las bases del modelo para describir el pensamiento algebraico. Tal modelo está “basado en los siguientes conceptos:

- (i) el triángulo semiótico de Fregue
- (ii) la noción de marco conceptual

Sus dinámicos desarrollos con respecto a:

- (1) las relaciones entre los signos, sentidos y denotaciones de fórmulas algebraicas;

- (2) la activación de marcos conceptuales, sus mutuas relaciones y los cambios de uno a otro (dentro de un mundo de soluciones);

En otras palabras, los verdaderos aspectos dinámicos de los procesos de pensamiento algebraico pueden ser descritos apropiadamente observando la forma en que los alumnos modifican sus triángulos semióticos dentro de un marco o pasando de un marco a otro.” (p. 72).

El modelo presentado por los autores refiere a procedimientos que describen algunas posibles formas de pensamiento que tienen lugar cuando una persona resuelve un problema algebraico. Este modelo supera la forma rígida de concebir el pensamiento algebraico como generalizaciones puras y formales.

No obstante, se pueden señalar cuestiones que resultan interesantes y parecen no ser explicadas en su totalidad, en la exposición presentada por los autores. Por ejemplo, vale preguntar: ¿La formación de esos marcos conceptuales, en sí, no requieren de un desarrollo de pensamiento algebraico previo? ¿Explica el modelo esa formación-construcción de tales marcos conceptuales? ¿Se debe interpretar que el modelo solo es útil para identificar elementos del pensamiento algebraico de personas que ya tienen un cierto nivel de tal pensamiento?

Adicional a las cuestiones anteriores, existen aspectos sobre los marcos conceptuales que los debilitan como elementos de análisis, por ejemplo la especificidad a la que refieren los pigmenta de cierta ambigüedad, pues muchos de los conocimientos de la persona corresponden con un marco conceptual. En efecto, las características con las que se ha definido el constructo marco conceptual, son satisfechas por ciertos conocimientos estructurados, con un determinado nivel de profundidad y detalle. Es decir, los marcos conceptuales son conocimientos con cierto nivel de estructuración. En relación con esta connotación de marcos conceptuales, se debe reconocer que existen elementos conceptuales comunes a marcos diferentes por ejemplo los marcos “pares” y “múltiplos” tienen en común el conjunto de los múltiplos de dos, ¿qué es este conjunto, un elemento del marco “pares” o del marco “múltiplos”?

Otro aspecto que merece la pena ser mencionado es la falta de integración de los contrutos teóricos precedentes en el uso del modelo al momento de realizar un análisis del pensamiento algebraico. Se observa por ejemplo cómo las nociones de *sentido contextual*, *sentido algebraico*, *fórmulas como forma de pensamiento* no parecen ser útiles para tal análisis ¿Cuál es su papel en la dinámica planteada?

Los señalamientos anteriores están lejos de pretender descalificar el avance que significa el modelo propuesto por los autores, lo que sucede es que parados sobre tal modelo, se progresa en la búsqueda de aspectos más específicos y profundos cuyo fin es caracterizar la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Como ideas que complementan la propuesta del modelo, los autores refieren a tres aspectos teóricos que conviene tener en cuenta en el análisis del pensamiento algebraico, a saber: el problema de la nominación de variables, el álgebra como juego de interpretaciones y los espacios mentales. Por razones de espacio sólo referiremos a los dos primeros de estos aspectos.

El problema de la nominación de variables

El problema de nominación de variables constituye un aspecto crucial. Para ilustrar esta afirmación observemos la solución dada por estudiantes de la escuela secundaria (11 – 14 años) al siguiente problema: *Por medio de una buena selección de nombres designar dos números impares consecutivos, mostrar que su suma es siempre un múltiplo de 4.* Los resultados revelan los siguientes tipos de errores: $x + y$; $2h + 1 + 2k + 1$; en lugar de $2h + 1 + 2h + 3$.

Uno de los aspectos que debe ser referido de inmediato es el uso del lenguaje aritmético del que echan mano los estudiantes para tratar de resolver el problema, sin llegar a tener éxito.

Muchos estudiantes no son capaces de utilizar el código algebraico como mediador entre las metas identificadas del problema y las relaciones entre sus elementos.

La exposición realizada por los autores sobre el problema de la nominación de variables en el artículo es bastante rica. Sin embargo, sigue siendo muy general y queda pendiente, por ejemplo, el análisis detallado de las respuestas erróneas dadas por los estudiantes al problema anteriormente planteado. En este sentido, se puede señalar que en ese proceso de nominación, como en todo proceso de este tipo, existe una relación de identificación que es requerida, esa relación de identificación es una relación biunívoca entre la representación y el objeto representado. Hay dos aspectos aquí a considerar, por un lado este es un proceso en el que una máquina no falla y por otro lado el poder de asignación está en la persona. Es decir, quien tiene el poder de decidir la designación (siguiendo criterios mecánicos o no es la persona) pero una vez hecha esta designación, la función de identificación debería ser automática. Son dos niveles que podrían denominarse como designación-cognitiva y designación-mecánica, cada uno tiene su momento de manifestación, en general el primero debe producir al segundo y la reducción de uno al otro es una fuente de error.

Veamos las posibles manifestaciones: Si el proceso de designación-cognitiva tiene lugar se garantiza que el segundo se manifieste, pues el primero da garantía de coherencia y permanencia del significado asignado a través del proceso de designación, es decir, una vez designado el significado esa coherencia y permanencia remiten a un acto meramente mecánico de identificación (en el cual, como hemos dicho, una máquina no falla). No obstante, un proceso de designación-mecánica, donde la asignación de una letra para representar un objeto es simplemente un acto de “llamar por llamar” o “nominar por nominar”, porque es obligatorio hacerlo para poder resolver el problema, donde no está presente la coherencia y permanencia de esa designación, conlleva sin duda al error. Este es un aspecto de suma importancia, pues inicialmente el estudiante puede tender a optar por la designación-mecánica, convencido de que la misma lo va a ayudar a resolver el problema. Este error se convierte en un obstáculo a la construcción de la designación-cognitiva. Ahora bien debe decirse aquí que la permanencia de la designación es una permanencia local, a la cual el estudiante puede renunciar en cualquier momento en que esto sea conveniente. Debería estar claro que este proceso de des-designación es un proceso que tiene la misma complejidad del proceso de designación-cognitiva que conlleva a un proceso de des-designación-mecánica.

Con lo anterior solo se pretende mostrar una pequeña precisión que podría ser tomada en cuenta al momento de tratar de explicar lo que sucede en el proceso de nominación de variables.

El álgebra como un juego de interpretación

Se presentan dos formas de la actividad de resolución de problemas como un juego de interpretación. Estas dos formas se esquematizan en las Figuras 4 y 5:

Siguiendo la idea de la resolución de problemas algebraicos como un juego de interpretaciones, esquematizado en las figuras anteriores, los autores señalan que la solución no es más que un *interpretador*, es decir, una interpretación y el resultado de una transformación del texto, con respecto a la pregunta que este plantea. En el caso algebraico el interpretador es el triángulo de Frege, producido por medio de una interpretación conveniente, durante tal proceso, tanto el marco conceptual, como el mundo de soluciones, pueden cambiar.

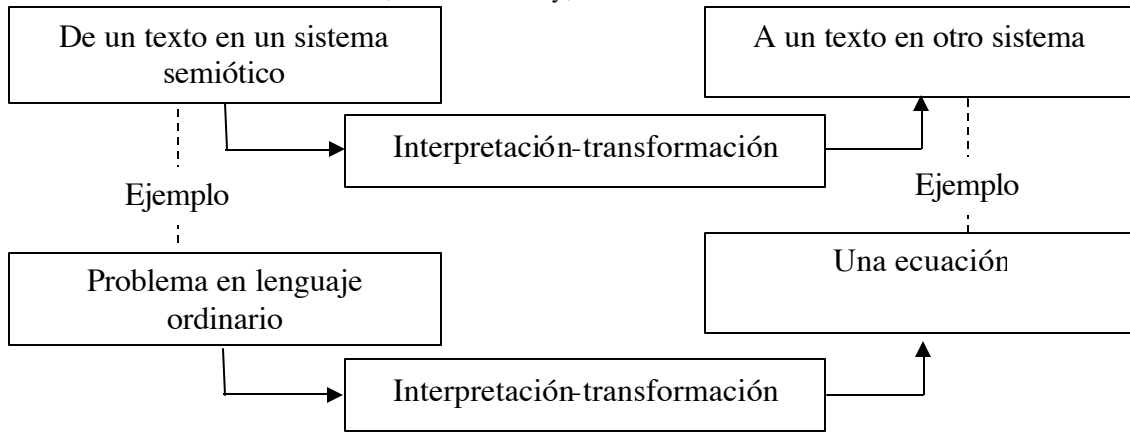


Fig. 4 Primera forma del juego de interpretación

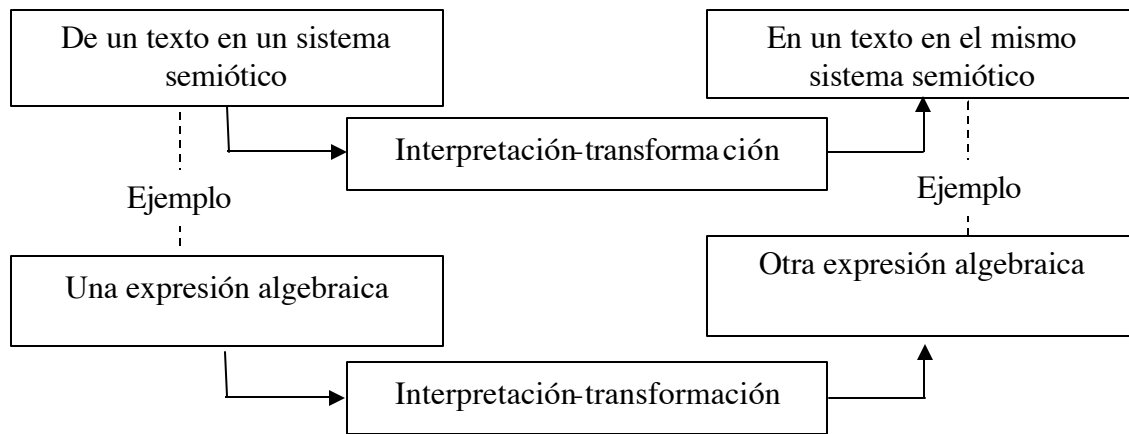


Fig. 5 Segunda forma del juego de interpretación

Con el fin de esquematizar el pensamiento algebraico como un juego de interpretaciones, los autores presentan la Figura 6:

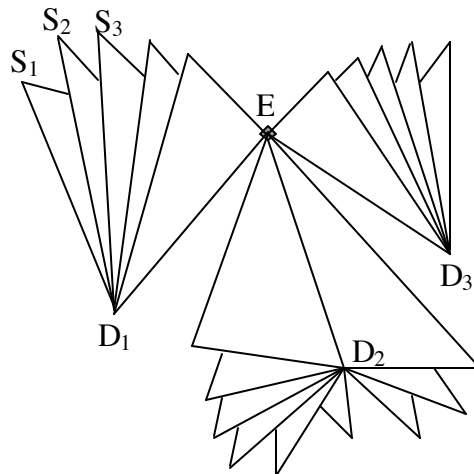


Fig. 6 Pensamiento algebraico como juego de interpretaciones

Dada la expresión simbólica E , interpretador o a ser interpretada, constituye el vértice común de un conjunto de triángulos de Frege, en los cuales para la misma expresión existen diferentes denotaciones y para cada denotación (es vértice común de un conjunto de triángulos cuya expresión y denotación es la misma, solo cambian en su sentido) existen diferentes sentidos.

En relación con los marcos conceptuales y al mundo de solución en este juego de interpretaciones, los autores refieren que al iniciar la actividad de interpretación el sujeto activa uno o más marcos conceptuales dentro de un mundo de resolución. La actividad del sujeto con el (los) triángulo(s) de Frege tiene lugar dentro de tal(es) marco(s) y mundo(s) de solución(es). Esta relación entre los marcos conceptuales, mundo de resolución en el juego de interpretaciones puede verse en la Figura 7.

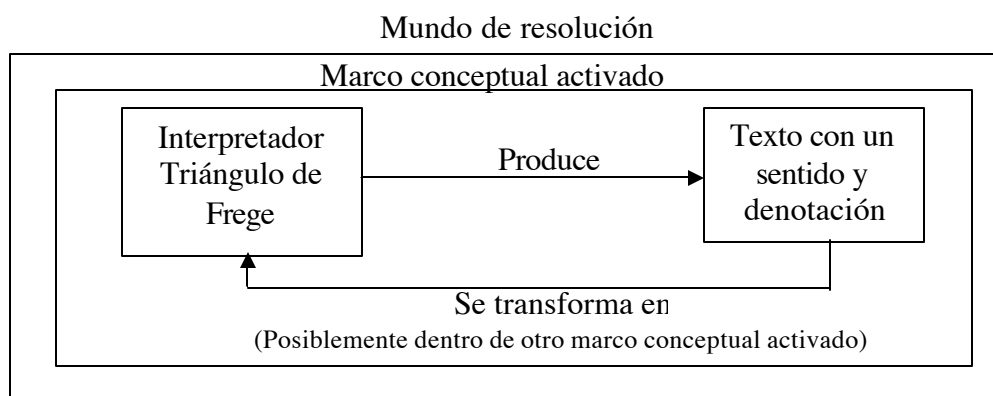


Fig. 7 Relaciones entre marco conceptual, mundo de resolución y juego de interpretación

Es necesario señalar, sin embargo, que así como a partir de una interpretación, el interpretador puede llevar a otros marcos conceptuales, así mismo, el interpretador puede conducir a diferentes mundos de resolución. Así pues, la relación entre estos elementos es una relación dinámica en ese juego de interpretaciones. Es menester apuntar que los cambios en los marco conceptuales van encaminados a garantizar la solución del problema planteado. Mientras el cambio de mundos de resolución, constituyen espacios de interpretación que no necesariamente resuelven el problema, sino que ayudan a comprender su significado.

Se observan dos cualidades de carácter didáctico que tiene el juego de interpretación, la primera señala que la cadena de intérpretes los cuales pueden ser construidos como resultado de tal juego es muy provechoso para el aprendizaje del álgebra, puesto que las representaciones mentales de los alumnos son generalmente activadas por intérpretes. La segunda cualidad refiere a que el juego de interpretación ayuda al estudiante a producir metacognición sobre los procesos a través de los cuales ellos han producido sus interpretadores algebraicos.

Ciertamente, puede ser provechoso hacer conscientes a los estudiantes de ese juego de interpretación, pues podría conducir a un aprendizaje menos mecánico y más cercano a lo que es el pensamiento algebraico en sí. Sin embargo, quedan algunas dudas que no pueden ser fácilmente desechadas: ¿A qué nivel de educación estaríamos refiriéndonos cuando se habla de tal aprendizaje? ¿Se puede reflexionar sobre lo que no se conoce? Es decir ¿Deberíamos enseñar este aspecto después de haber introducido los conceptos matemáticos referentes al álgebra y a la resolución de problemas? ¿Luego que los estudiantes muestran problemas en la resolución de los mismos? ¿Se debe seguir dando lugar a que los errores se produzcan para luego corregirlos? ¿No es posible evitarlos? ¿Este tipo de contenidos deberá ser enseñado sólo a estudiantes avanzados con problemas de aprendizaje del álgebra? Bueno, al parecer existen cuestiones que quedan aún

sin responder. Será entonces tarea de otras investigaciones hacer propuestas más específicas en relación a la utilidad que pueden tener estos hallazgos-propuestas.

Al concluir su artículo, Arzarello et al. (2001), reconocen la existencia de aspectos sobre el pensamiento algebraico para los cuales no se ha logrado construir una teoría que explique una aproximación a una caracterización de sus elementos.

Conclusiones

Uno de los aspectos más importantes de este artículo es su fortaleza como exposición científica, caracterizada por un elevado manejo formal del lenguaje y la ilación finamente construida entre sus distintos elementos conceptuales, en la búsqueda de una explicación objetivamente aceptable. De manera que la metodología propuesta en la presentación del escrito constituye un ejemplo formidable para la presentación de resultados logrados a lo largo de extensos procesos de investigación. No obstante, el espíritu de esta revisión busca no solo reconocer los alcances de este interesante trabajo, sino tratar de encontrar algunas limitaciones de carácter explicativo en el ámbito en el cual se desarrolla. Por tanto, a continuación presentamos algunos aspectos con el fin de llamar a la reflexión sobre cuestiones de interés en este contexto, derivadas de esta revisión.

En relación con las nociones sentido algebraico y sentido conceptual, las cuales muestran una utilidad inicial para evidenciar diferentes formas de sentido que puede tener una expresión algebraica, parecen perder utilidad en el resto del desarrollo del trabajo, haciendo omisión a cómo estas nociones pueden ser utilizadas para referir al comportamiento exhibido por un alumno al momento de resolver un problema algebraico. Tal omisión lleva a que estas nociones queden aisladas del modelo presentado, basado en la dinámica de los cambios de los marcos conceptuales, la semiótica del triángulo de Fregue, los mundos de resolución, completados más tarde con las nociones de juego de interpretaciones y espacios mentales.

El carácter especificidad con que se define la noción marco conceptual solo queda en la esfera de lo concerniente al dominio disciplinar, sin embargo, como elemento de descripción de los conceptos o cuerpos de conceptos es una categoría general que engloba a todo conocimiento con una determinada calidad de organización. Esta generalidad le imprime cierta ambigüedad en la que se hace difusa la caracterización de un marco conceptual y su distinción con otro marco. Nótese que los marcos conceptuales no son elementos disjuntos pues si los marcos conceptuales se conciben como constructos disjuntos unos de los otros, difícilmente pueden constituir modelos de explicación del pensamiento o de actos de racionalidad implicados en la resolución de problemas, el ejemplo del concepto “múltiplos de dos” muestra un punto común entre los marcos conceptuales “pares” y “múltiplos”.

En relación con lo anterior debemos preguntarnos; qué sucede con la interacción de dos marcos conceptuales, ¿es un nuevo marco conceptual?, la respuesta parece obvia y afirmativa, si constituye un nuevo conocimiento con una “determinada organización”. Pero esto parece no tener lugar en el desarrollo de la exposición, pues a lo largo de la misma, la idea de marco conceptual se presenta como una idea estática, como un conocimiento ya aprendido, como una herramienta de la que se echa mano.

Lo señalado en la parte concerniente a la nominación de variables, respecto a la posibilidad de explicar de manera más específica los dos diferentes momentos de designación mecánica y designación cognitiva, presentes en el proceso algebraico de nominación, pueden ser de utilidad para la concepción de un modelo que busque ser más minucioso en la explicación de los procesos de pensamiento algebraico.

Finalmente, teniendo presente los avances que representan las descripciones y explicaciones producto del trabajo desarrollado por los autores, es conveniente y necesario iniciar investigaciones encaminadas a la búsqueda de la utilidad que pueden tener estos hallazgos en la actividad de enseñanza y en la concepción y desarrollo de los currícula de formación de los diferentes niveles educativos. Tales investigaciones constituyen un espacio de posibles nuevos estudios, más profundos y detallados, en la exploración de una mejor caracterización del objeto fundamental de este trabajo, el pensamiento algebraico.

REFERENCIAS

- Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2001). A model for analysing algebraic processes of thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 191–207). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collage. Première partie. *Petit X*, 19, 43-72.
- D'Amore, B. (1993). *Elementi di Didattica Della Matematica*. Bologna: Pitagora.
- Elichiribehety, I. y Otero, M. (2004). La relación entre los marcos de resolución y los modelos mentales en la enseñanza del álgebra. *Educación Matemática*, 16 (1), pp. 29-58.
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2), pp. 237-284.
- Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), pp. 167-210.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias* 7(3), pp. 229-240.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp. 11-49. Sense Publishers.
- Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Vision histórica. *Revista del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, 13, 20-46.
- Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Relime*, 6 (1), pp. 41-71.
- Peirce, C. S. (1996). *Teoría de los Signos*: Paidós.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), pp. 1-35.