LA EXPLORACIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DE MODELOS MATEMÁTICOS

Lina Mónica María Oviedo[1,2], Mónica Patricia Benzaquen[3], Mónica Beatriz Gorrochategui[3]
Facultad de Ingeniería Química[1], Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas[2], Escuela de Enseñanza Media Particular Incorporada N° 8106 "Don Bosco" [3]
Santa Fe - Argentina
loviedo@fiq.unl.edu.ar
Nivel Medio

Resumen
El presente taller surge como resultado de la investigación didáctica que hemos llevado a cabo en los últimos cinco años en dos proyectos de investigación en el marco del Curso de Acción para la Investigación y el Desarrollo (CAID 2005, CAID 2009), en donde pretendemos generar algunos conocimientos para guiar esa sociedad tan particular como lo es "la clase de matemática" y ayudar al alumno a "hacer matemática".
Para llevar adelante el mismo deberemos tener en cuenta tres tópicos importantes:
a) las dificultades que presentan los alumnos pueden ser explicadas como una falta de coordinación entre los diferentes registros.
b) el conocimiento conceptual es el invariante de múltiples representaciones semióticas.
c) teniendo en cuenta los distintos registros semióticos se pueden definir las variables independientes específicas de contenidos cognitivos.
Todo esto tendiente a la organización de propuestas didácticas para desarrollar la coordinación de los registros de representación. Las guías de trabajo que se proponen en este taller están diseñadas para ser utilizadas directamente en el aula.
Trabajaremos con ciertos temas de funciones, lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas y la modelización de problemas relacionados con la física, química, economía, etc. a partir de las mismas. Algunas actividades fueron realizadas con grupos de alumnos de distintas escuelas de la ciudad de Santa Fe, obteniéndose buenos resultados en cuanto a la comprensión de ciertos temas y el trabajo con diversos registros.
<u>Palabras clave:</u> registros- representaciones- funciones- modelización

Introducción

Desde un punto de vista epistemológico y psicológico se considera que la matemática:
1) es una actividad humana que se interesa por la resolución de situaciones problemáticas, ya sean del mundo físico, social o del propio dominio de la misma. Como respuestas a estos problemas emergen los objetos matemáticos, los cuales evolucionan progresivamente. Por tanto, son los actos de las personas la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas, acorde con las teorías constructivistas Piagetianas.
2) constituye un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones - problemas y las soluciones encontradas. Los sistemas de símbolos, dados por la cultura, tienen una función comunicativa y un papel instrumental ya que cambian a las propias personas que utilizan los símbolos como mediadores, acordes a la teoría psicológica de Vigotsky y semiótica de Rotman.
3) constituye un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido. Los objetos matemáticos son entidades culturales cuya naturaleza sistémica y compleja no

puede ser descrita meramente por definiciones formales cuando nos interesamos por los procesos de enseñanza y aprendizaje de los mismos.(Godino y Batanero, 2003, p 87).

Por lo tanto la matemática constituye una *realidad cultural* constituida por conceptos, proposiciones, teorías, etc. (los objetos matemáticos) y cuya significación personal e institucional está íntimamente ligada a los sistemas de prácticas realizadas para la resolución de situaciones problemáticas.

La Matemática, durante mucho tiempo ha tenido la misión de desarrollar el pensamiento lógico, algorítmico y heurístico. Con el desarrollo científico-tecnológico, además de su misión histórica deberá desarrollar en las personas el "pensamiento de modelación", es decir que éstos sean capaces de elaborar modelos matemáticos de los objetos estudiados por las diferentes ramas de la ciencia y la técnica.

Los resultados esperados son: Para enseñar Matemática se requiere de un sólido dominio científico y también se debe poder hacer uso de aquellas técnicas que surgen del análisis de los fenómenos didácticos y que favorecen el proceso de aprendizaje.

La premisa fundamental de esta disciplina es el estudio de los procesos de transmisión, adquisición y construcción de los diferentes contenidos matemáticos en la situación de enseñanza y cuando nos referimos a esta situación involucramos a la enseñanza de la matemática en todos los niveles. La didáctica de la matemática se propone describir y explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre enseñanza y aprendizaje del saber matemático.

La búsqueda no debe reducirse, sólo, a encontrar una buena manera de enseñar una noción previamente fijada, sino que el objeto de estudio debe ser la organización de una actividad cuyo propósito sea el aprendizaje de un cierto saber, no importando si esta actividad se ve desviada de su objetivo inicial ya que la investigación en el campo de la didáctica se propone transformar al sistema educativo en un sistema benéfico, a saber: mejorar los métodos y los contenidos de la enseñanza y proponer las condiciones para un funcionamiento estable de los sistemas didácticos asegurando entre los alumnos la construcción de un saber dinámico, susceptible de cambio y funcional, que permita resolver problemas, plantear buenas preguntas y nuevas situaciones problemáticas, si logra esta tres cosas estos habrán aprendido matemática (Bousseau, 1993). Para finalizar es de destacar: a) la buena recepción que ha tenido el material con el que trabajaremos, en el presente taller, entre los docentes de una basta región del país a través de los cursos de Extensión a Distancia orgnizados por la Secretaria de Extensión de la UNL a través de la Plataforma e-learning y con apoyo del Centro Multimedial de Educación a Distancia (CEMED) de la citada universidad.

b) El buen resultado que se logró con tres grupos de alumnos de 5º año de distintas escuelas santafesinas al trabajar parte de este material, en todos los casos los alumnos mostraron entusiasmo, evidenciaron un avance en la comprensión de ciertos temas y no presentaron dificultades al trabajr con diversos registros.

Objetivos

Generales

Ofrecer a los docentes:

- Una propuesta de elaboración de la construcción de modelos.
- Trabajar con distintos tipos de modelos matemáticos desde las ciencias naturales, sociales, etc.

Específicos

- Proponer pautas para la construcción de un modelo mediante situaciones problemáticas sencillas.
- Discutir la utilización de los mismos en el aula.
- Seleccionar distintas actividades en donde se utilicen modelos.

Temas

Funciones numéricas. Funciones Lineales. Función cuadrática. Funciones exponenciales y logarítmicas. Modelos. Modelos matemáticos, económicos, etc.

Destinatarios

Docentes de nivel medio. Estudiantes avanzados del Profesorado en Matemática.

Ejemplo de actividad

Las siguientes actividades fueron extraídas de "La exploración matemática a través de Modelos Matemáticos"

Funciones exponenciales. Logaritmos. Funciones logarítmicas

FUNCIONES EXPONENCIALES

Existen en la naturaleza y en la vida social fenómenos en los que el ritmo de variación es proporcional al valor en cada instante. Como ejemplo de estos fenómenos podemos citar, la velocidad a la que se reproducen las bacterias, la desintegración radiactiva, el crecimiento demográfico, el interés del dinero acumulado, etc. Para describirlos utilizaremos las **funciones exponenciales.**

Comencemos con las siguientes situaciones:

1) ***En una ciudad se observó que la población de mosquitos, que inicialmente se estimó en 1 millón, al encontrar condiciones favorables se reproduce duplicándose en cada mes.***

a) Comencemos el estudio del fenómeno completando la siguiente tabla:

Tiempo (meses)	0	1	2	3	4	5	...	x
Número de mosquitos (en millones)	1	2						

b) ¿Cuántos mosquitos habrá al cabo de 10 meses?
c) ¿Cuántos meses habrán pasado para que haya más de 10 millones? ¿Y más de cien millones?
d) Escribe la fórmula que relaciona el número mosquitos (y) en función del tiempo (x)
e) Representa gráficamente dicha función. ¿Por qué se pueden unir los puntos?
f) Considera posible tomar valores negativos del tiempo que corresponden a los días previos al estudio del fenómeno. Por ejemplo si supones que el tiempo inicial corresponde al mes de abril de 2009, los anteriores serían: -1 (marzo de 2009), -2 (febrero de 2009), -3 (enero de 2009), etc. Calcula el número de mosquitos para algunos de ellos y represéntalos en el mismo gráfico construido en e)
g) ¿Qué sucede con los valores que va tomando **"y"** a medida que "**x**" crece? ¿Es una función creciente o decreciente?

h) ¿Cuál es su dominio? ¿Y su imagen?
i) ¿Es una función continua? ¿Por qué?

2) Las sustancias radiactivas se desintegran transformándose en otras sustancias al paso del tiempo. El proceso de desintegración ocurre con mayor o menor rapidez de acuerdo a la sustancia. Si la masa inicial de cierta sustancia es de 1 kg y se desintegra reduciéndose a la mitad cada año:

a) Averigua qué cantidad de sustancia radiactiva queda al cabo del tiempo, para ello es conveniente que completes la tabla siguiente

Tiempo (años)	0	1	2	3	4	5	...	x
Masa de la sustancia (kg)	1							

b) ¿Cuál será la masa de la sustancia al cabo de 10 años?
c) Escribe la fórmula que relaciona la masa de la sustancia en función del tiempo.
d) Representa gráficamente la función. ¿Por qué se pueden unir los puntos?
e) Considera posible tomar valores negativos del tiempo que corresponden a tiempos anteriores al tomado como inicial. Por ejemplo puedes suponer que el tiempo inicial fue el año 2009, así los anteriores serían -1 (año 2008); -2 (año 2007), etc. Calcula la masa de la sustancia en los años: 2003, 2006 y 2008 y represéntalos en el mismo gráfico construido en d)
f) ¿Qué sucede con los valores que va tomando "**y**" a medida que "**x**" crece? ¿Es una función creciente o decreciente?
g) ¿Cuál es su dominio? ¿Y su imagen?
h) ¿Es una función continua? ¿Por qué?

En los dos ejemplos anteriores hemos encontrado una función en las que la variable independiente aparece como exponente. Esta función se denomina **función exponencial**

Una función exponencial es de la forma $y = a^x$ donde "a" debe ser un número real positivo y distinto de uno.

3) ***¿Qué pasaría si a <0? ¿y si a =1?***

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

4) Representa en una misma gráfica las funciones: $y = x^2$; $y = x^3$; $y = x^4$ e $y = 2^x$. Observa que todas son crecientes, pero ¿cuál lo hace más rápidamente?

5) Representa en una misma gráfica las funciones $y = 3^x$ (a>1) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (0<a<1) y completa para cada una las siguientes oraciones:

$y = 3^x$

a) Cuando " x" aumenta, "y"……………. entonces la función es…………………..

b) El dominio de la función Dom f= ………………………………..........

c) La imagen de la función Im f = ……………………………….........

d) ¿La función corta al eje de abscisas?…………………………………

e) ¿La función corta al eje de ordenadas?……………………….……

f) ¿Tiene máximo?......................................

g) ¿Tiene mínimo?......................................

h) ¿Es continua?...

i) ¿Es biyectiva?...

$y= \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$

a) Cuando "x" aumenta, " y"……….........… entonces la función es……………….……..

b) El dominio de la función Dom f= ………………………….…...…..

c) La imagen de la función Im f = ………………………...……….…

d) ¿La función corta al eje de abscisas?………………………………….……

e) ¿La función corta al eje de ordenadas?……………………….…….…

f) ¿Tiene máximo?.......................................

g) ¿Tiene mínimo?.......................................

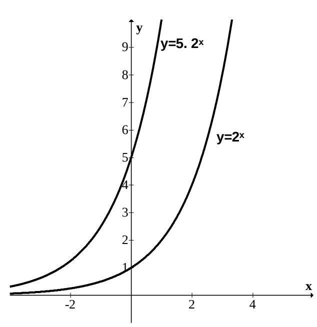
h) ¿Es continua?..

i) ¿Es biyectiva?..

Analicemos nuevamente la **situación 1),** pero suponiendo que la población inicial es 5 millones de mosquitos.
Si completamos la tabla, nos queda:

Tiempo (meses)	0	1	2	3	4	5	...	X
Número de mosquitos (en millones)	5	10	20	40	80	160		
	$2^0.5$	2.5	2.2.5	2.2.2.5	2.2.2.2.5	2.2.2.2.2.5	…	$2^{x}.5$

La función será $y = 5.\ 2^{x}$ donde cada ordenada de la función $y = 2^{x}$ está multiplicada por 5. Observemos el comportamiento de ambas funciones en el siguiente gráfico.



6) En el caso de la situación 2), supongamos que la masa inicial de la sustancia es 10 kg. Completa la tabla con los cálculos que nos permitan obtener la expresión general:

Tiempo (años)	0	1	2	3	4	5	...	x
Masa de la sustancia (kg)	10 10 $(1/2)^0$	5	5/2	5/4	5/8	5/16	…	

La función será………………..donde cada ordenada de la función $y= (1/2)^x$ se multiplica por……………………….

7) Representa en un mismo sistema de coordenadas las funciones $y= (1/2)^x$ y la obtenida a partir de la tabla anterior.

En resumen:

> **La función $y = k\,a^x$ representa crecimiento exponencial si $a >1$ y decrecimiento exponencial si $0 < a < 1$ (a es el factor por el que se multiplica la función en cada unidad de tiempo).**
> **El valor de k representa el valor inicial de una cantidad (cuando el tiempo es cero).**

En las funciones exponenciales, especialmente en problemas que surgen de la naturaleza suele utilizarse como base el número irracional **e = 2,718281828…** llamado así en honor al matemático Leonardo Euler.

8) Construye una tabla de valores para calcular los valores de la función $y = e^x$. Luego representa en una misma gráfica las funciones $y = 2^x$, $y= e^x$ e $y= 3^x$. Observa que el número e se encuentra comprendido entre 2 y 3 ($2 < e <3$.) ¿Está y (pp 75-93), Granada= e^x entre las funciones $y = 2^x$ e $y= 3^x$?

Referencias Bibliográficas

Benzaquen, M., Gorrochategui, M.,Oviedo, L, (2009). *La exploración matemática a través de Modelos Matemáticos.* Santa Fe-. Ediciones UNL.

Godino, J., Batanero, C., (2003), Relaciones Dialécticas entre Teoría, Desarrollo y Práctica en Educación Matemática: Un Meta-análisis de tres Investigaciones. En Godino, J. (Editor) Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática (pp 75- 93). Granada: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.