
Propuestas para la enseñanza de las Matemáticas

PROPUESTA DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MEDICIÓN DE LA MAGNITUD SUPERFICIE DESDE UNA PERSPECTIVA UNIDIMENSIONAL

Mgter. Prof. Adriana Gabriela Duarte; Lic. Prof. Claudia Dolores Lagraña
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. U. Na. M. (Misiones)
Argentina

duaradriana@gmail.com ; claudialagrana@arnet.com.ar

Nivel Medio

Resumen

Basados en la convicción de que es factible implementar en el entorno escolar actividades que den sentido a la Superficie como Magnitud y abordar su Medición mediante procedimientos significativos, se han logrado identificar a raíz de este estudio, ciertos factores que lo favorecen y los que obstaculizan dicho proceso. Se exponen así cuestiones generales sobre magnitudes y medición y otras relacionadas a su enseñanza y al cálculo de áreas.

Teniendo como objetivo contribuir al proceso de enseñanza y aprendizaje de ésta magnitud y su medición, se indaga acerca de los aspectos involucrados para el desarrollo del tema, permitiendo esbozar una propuesta didáctica que facilite la adquisición de algunos conceptos involucrados, en particular, a la medida de cantidades de superficie desde una perspectiva unidimensional.

Palabras claves: medición - superficies – áreas – perspectiva unidimensional

Introducción

El punto de partida de este trabajo es la concepción de que la Medición de Superficies involucra directamente saberes matemáticos habitualmente tratados en la escolarización básica y considerados muy útil para la vida práctica de los ciudadanos, correspondientes a dos ramas matemáticas distintas, pero a la vez íntimamente relacionadas: la Geometría y las Mediciones. Coherentes con el marco teórico en el que se ubica este estudio, adhiriendo a una postura constructivista del aprendizaje y a las ideas de la Didáctica de la Matemática fundamental que postula que lo primero que hay que analizar es el conocimiento matemático involucrado, presentamos las diferentes características, particularizando al tratamiento de la Medición de la Magnitud Superficie de figuras geométricas usuales.

Particularmente, la medición y las medidas tienen por detrás numerosos conocimientos matemáticos muy refinados y complejos que han sido incorporados a las matemáticas superiores, como la teoría de la medida. Aunque no es esto lo que obstaculiza su enseñanza, porque como bien lo dice Chamorro (2003, p.222) “es justamente la consideración de que se trata de un conocimiento social (al fin y al cabo casi todos los adultos saben medir o creen que saben medir), lo que genera no pocas paradojas en su enseñanza”. De esa forma, la escuela abandona parte de esa enseñanza, por ejemplo, la medición efectiva, con la idea que serán aprendidas por las personas de manera independiente, con experiencias familiares o de vínculos sociales y los transforma de esta manera en conocimientos que se suponen adquiridos pero que tendrán que ser utilizados más adelante en su vida social y personal.

Se agrega a esto la transposición didáctica que hacen los textos y maestros, deteniendo su atención en el aspecto aritmético de la medición, con abundancia de actividades fuertemente algoritmizadas y presentadas mediante cambios de unidades de medidas en el Sistema Métrico Decimal, sin que representen situaciones significativas para los alumnos, constituyéndose así en un “mero saber escolar, sin prácticamente utilidad alguna fuera de la

escuela, y muy distante, epistemológicamente hablando, del saber matemático de referencia” (Chamorro, 2003, p.223). Para mostrar mejor la problemática planteada, citamos los importantes aportes de Brousseau y Brousseau (1991, p.17), quienes expresan: “El hecho de que el concepto de medida se trate de un concepto muy antiguo y universalmente utilizado, hace que se tienda a creer que es simple y consecuentemente a rehusar incluso clarificar las dificultades encontradas en la práctica o en la enseñanza, si esto implica construcciones matemáticas modernas...[....].por ese carácter universal y familiar ha conducido a una proliferación de términos comprometidos en usos ambiguos y anárquicos que dan lugar a contradicciones culturales perjudiciales para la enseñanza...”.

Por otra parte, las nociones de magnitud y medidas están relacionadas con otros numerosos conceptos, nada simples, entre ellos la realización de mediciones efectivas, que no siempre resultan sencillas y generalmente son poco controlables en la actividad escolar. En este sentido, los autores mencionados describen algunos “objetos” distintos en los problemas que se relacionan con la complejidad de la medida (que en Chamorro se designan como *entornos de la medida*):

Los *objetos soportes* de los caracteres a medir, la *magnitud*, concepto que permite aprehender “lo que puede hacerse más grande o más pequeño”, relativamente a objetos soportes, la *cantidad* de magnitud, que supone trabajar con una relación de equivalencia, la *medida* (medida-función), que es una aplicación aditiva y positiva de un conjunto medible en \mathbb{R} , el *valor* de esta medida (medida-imagen), la *medida concreta*, la *medida o medición* que designa la operación material o el método que permite determinar efectivamente un número y un intervalo (o una familia de intervalos) de incertidumbre (o de confianza) y también la *evaluación* de las medidas, es una especie de juicio o de “medida” sobre la medida, sobre su expresión, que representa el tamaño, la Magnitud relativa, la Rareza, la Calidad, la Precisión, etc.

De hecho, la consideración en la enseñanza de la medición de magnitudes de todos estos entornos tendrá que ver con el nivel escolar donde se traten, y muchas veces las opciones son a favor de algunos de los mismos.

Cuestiones generales sobre magnitudes y medición

Según lo indican Godino, J.; Batanero, C. y Roa, R. (2002, p.24), la noción de magnitud cambia de acuerdo al contexto en el que se estudia y se utiliza el término. Como una primera aproximación al concepto de *magnitud*, se puede decir que *es la cualidad o atributo o rasgo que posee un cuerpo* que varía de una manera cuantitativa, continua (longitud, peso) o discreta (número de personas). En cuanto a la distinción entre cantidad y magnitud, siguiendo a Puig Adam, P. (1980, p.98), se expresa que “la *cantidad* es lo que tienen de común los elementos iguales entre sí, mientras que la *magnitud* es el carácter común a todos los elementos de un cierto conjunto”. Pero aun cuando, para abreviar, magnitud y cantidad de la magnitud se designen con la misma palabra, no deben confundirse estos conceptos.

Por otra parte, desde un punto de vista formal, con la palabra magnitud se designa un conjunto de objetos abstractos, dotado de una cierta estructura algebraica. Se parte de un conjunto entre cuyos elementos se establece una relación de equivalencia y una relación de orden compatible con la suma, esto permite definir *magnitud* como un “semigrupo conmutativo con elemento neutro y ordenado $(M, +, \leq)$, formado por clases de equivalencia, que son sus cantidades”. Así como se define en un conjunto M una operación interna llamada *suma*, también se define en M una operación externa, llamada *producto de*

un elemento de M por un número, que será un elemento de M . El conjunto $S(M) = \{(z/p) \in Q \forall a \in M / (z/p)a \in M\}$ es un *subanillo* unitario del *semianillo* de los números racionales. Este último conjunto recibe el nombre de *semianillo* de medición de la magnitud M . En especial, nos ocupamos aquí de la *magnitud superficie*, entendiendo que la misma es la *cualidad o atributo que caracteriza a las superficies planas*.

Para la construcción de ésta magnitud, Godino, J., et al., (2002, p.24) indican que primeramente, se debe identificar el conjunto de objetos sobre los que se abstrae el concepto de cantidad, que en este caso, son las superficies planas (entendiéndolas como una “parte limitada del plano, cuyo interior (no vacío) está limitado por una o varias curvas cerradas de longitud finita”, en Douady, R y Perrin, R. (1983)). Es oportuno aclarar que se habla de superficies planas desde un punto de vista geométrico, siendo utilizadas como soporte para poder establecer la magnitud superficie en el campo de las mediciones; de estos objetos soportes, se perciben la cualidad superficie.

A continuación se debe definir en éste conjunto, una relación de equivalencia por medio de la cualidad común, que es el objeto de nuestro interés. Dicho en otros términos, para definir la superficie como magnitud, se debe poder comparar y comprobar la igualdad o desigualdad entre los elementos del conjunto de las superficies planas. Esta relación determina una partición de este conjunto en clases de elementos que son equivalentes entre sí, respecto a la cualidad analizada. De acuerdo con esto, a partir del conjunto de superficies planas, por aplicación de la relación de equivalencia, se forma un nuevo conjunto, el conjunto cociente, cuyos elementos son todas las clases de equivalencia y, de cada elemento de este conjunto se dice que es una *cantidad de superficie*, cada clase está formada por elementos que tienen la misma cantidad de la magnitud superficie, sin importar la forma geométrica de los mismos.

Una vez que en el conjunto de superficies planas se define la relación según la cual dos superficies son equivalentes, los elementos del conjunto quedan clasificados en clases de equivalencia, lo que implica *homogeneizar* el conjunto. Cada clase de equivalencia representa a una determinada cantidad de superficie. Seguidamente, se debe definir la suma, el orden y el producto por números de estas cantidades, así como las propiedades que verifican. Una vez realizados estos pasos, se puede decir que está definida la *magnitud superficie*.

Teniendo en cuenta lo expuesto acerca de los entornos de la medida, la medición de una magnitud es un proceso, que se inicia con la constitución de la magnitud y se continúa con la medida y la estimación de la misma. La noción de *medición de una cantidad de magnitud* surge de situaciones en las que se necesita saber “cuanto” más grande es una cantidad de magnitud respecto a otra. Según Puig Adam (1980, p.107) “*Medir los elementos de un conjunto homogéneo es establecer una correspondencia entre ellos y los números reales llamados sus medidas*”. *Medir* es un proceso mediante el cual es posible asignar a cada *cantidad de una magnitud*, un número, que será su *medida*. Respecto a ésta, Chamorro, M.(2003, p. 224), dice: “La noción de medida, se define como la aplicación que va de M (siendo M el conjunto de las clases de equivalencia que define a cierta magnitud) a un conjunto de número positivos N, Z^+, Q^+, R^+ , que viene determinada por la cantidad u escogida, denominada unidad y que tiene como imagen el número 1”. En Olmo, M, Moreno, M. y Gil, F. (1993, p. 142.), se encuentra que esta idea se pueden formalizar de la siguiente manera: Se llama *medida* de la cantidad m de una magnitud escalar, respecto de la

unidad u , al número $S(m) \in S(M) / m = u S(m)$ (donde $S(M)$ es el semianillo de medición de la magnitud M). $\text{med}_u : M \rightarrow S(M)$.

En este trabajo, designamos con el término *área* a la aplicación con la que se obtiene la medida de la magnitud superficie. El *área* de una cantidad de superficie tiene como objeto medir su ocupación en el plano, independientemente de su forma. Seleccionada una cierta *unidad* (cualquier forma que recubra la figura sin solapamientos ni agujeros puede utilizarse como unidad de medida), el número de unidades requeridas para cubrir una superficie plana, representa al *área* de dicha cantidad de superficie. Es decir, *área* de la cantidad de superficie s , respecto de la unidad u , al número $k \in A(S) / s = u k$. (k representa la cantidad de veces que se debe iterar u para obtener s).

Aspectos relacionados a la enseñanza de medición de superficies y cálculo de áreas

Uno de los problemas de la enseñanza del concepto de la magnitud superficie reside en la falta de situaciones a nivel escolar que apunten a la adquisición de dicho concepto. A estas situaciones se refieren algunos autores, como por ejemplo Freudenthal (1983), citado por Olmo, et al. (1993, p.19), cuando indica diferentes aproximaciones a la noción de superficie; las que considera más importante son: Repartición equitativa, Comparación y reproducción y Medición.

Otros investigadores que se han destacado en trabajos para la adquisición del concepto de superficie son Piaget y otros, Wagman y Rogalski (citados en Olmo, M. et al., 1993, p.22). En relación a esto, Piaget y colaboradores identifican dos operaciones fundamentales de las que depende el proceso de la medida: la conservación y la transitividad. Si tenemos en cuenta ahora el entorno de la medida, a través de la aplicación denominada *área*, el estudio deberá involucrar el establecimiento de la unidad de medida. Como habíamos dicho, según Freudenthal, una de las aproximaciones a la noción de superficie es por *medición*, en situaciones en las que la superficie aparece ligada a un proceso de medida. La aplicación *área* a superficies de modelos geométricos, como las superficies planas, y en el caso de los cuerpos, sobre la superficie frontera (caras y bases), da lugar al concepto de *área de figuras planas*, y éste origina el de *área lateral y total de cuerpos*.

Para el proceso de medición y la obtención del *área* se puede tener en cuenta, según lo descrito por Vergnaud (Chamorro, 2003, p.245) que la superficie es una magnitud susceptible de dos tratamientos: como magnitud unidimensional o como magnitud bidimensional, esto es:

- Unidimensional, usando la técnica por exhaustión; es decir, rellenando el interior de la superficie a medir con unidades (de superficie) colocadas unas junto a otras y no superpuestas (en aquellas partes donde no quepan se recurre a rellenar con unidades más pequeñas hasta cubrir toda la superficie.); o por acotación entre un valor superior y uno inferior,
- Bidimensional, por medición de dimensiones lineales (por ejemplo, el largo y el ancho), lo que lleva a la elaboración de técnicas que se basan en el uso de los valores de las medidas lineales que dimensionan a la figura geométrica.

Por otro lado, las *medidas imagen* permiten trabajar con procedimientos, para la “comparación de las áreas de dos superficies”, que consideran las propiedades del isomorfismo, por ejemplo (Douady et al., 1983, p.30)

- a) Verificar la inclusión: siendo $S_1 \subset S_2$, o $S_1' \subset S_2$, con S_1' obtenida por recortes y agrupamiento de S_1 , entonces $A(S_1) < A(S_2)$ o $A(S_1') < A(S_2)$.

- b) Verificar la transitividad: si existe una superficie T , tal que $A(S_1) < A(T)$ y $A(T) < A(S_2)$, entonces $A(S_1) < A(S_2)$.
- c) Utilizar la idea de “empedrado”, entendiendo como tal a la posibilidad que tiene una superficie S de recubrirse con un número entero de una superficie s , sin dejar espacios libres y sin superposición: Si $S = n \cdot s$ entonces $A(S) = n \cdot A(s)$.

En cuanto al trabajo con las medidas concretas, es el aspecto del estudio de las mediciones más desarrollado en los textos y manuales de uso corriente para la escolaridad básica, presentado con abundantes propuestas prácticas de cambio de medidas concretas en una unidad, en otras equivalentes en otras unidades y que en la enseñanza se reducen a una presentación algorítmica, donde se trata de manejar una regla para dominar de manera rápida las equivalencias.

Una propuesta de enseñanza

Teniendo en cuenta lo desarrollado, organizamos un conjunto de actividades con la intención de trabajar la percepción, la comparación, el ordenamiento de la magnitud superficie, y para la medición de dicha magnitud desde las concepciones unidimensional y bidimensional. En esta propuesta sólo se exponen algunas de las posibles técnicas de aproximación a la medida de la cantidad de superficie anteriormente desarrolladas, proponiendo una actividad que ponga a los alumnos en contacto con técnicas desde una concepción unidimensional. Abordamos los entornos de la medida relacionados con la asignación de un número (o un intervalo) a cada superficie plana, según una determinada unidad, para asignarle a cada superficie plana una medida concreta, sin recurrir a las fórmulas establecidas. Se pretende el trabajo sobre la dependencia entre el valor de la medida y la unidad seleccionada, como la medida exacta y la aproximada, analizando la posibilidad de subdividir la unidad para mejorar la aproximación.

Consigna 1:

¿Es posible encontrar un número que represente la medida de la (cantidad de) superficie de la figura dada a continuación, utilizando los modelos de reticulados que les damos?



Se pretende lograr los siguientes aprendizajes:

- Medir una cantidad de superficie eligiendo otra cantidad de la misma magnitud como “unidad”.
- Asignar un número seguido de una unidad a la medición efectuada.
- Establecer la relación existente entre la medida de una superficie plana y la unidad empleada en el proceso de medición, de acuerdo a la cantidad de superficie y a la forma de las mismas.
- Analizar la conveniencia de la unidad seleccionada en función de las características de la superficie plana a medir.

Será entregada a cada grupo en forma impresa en papel blanco y una hoja con los reticulados en papel de calcar, con el objeto de posibilitar que la superficie plana se ubique de manera conveniente sobre los reticulados.

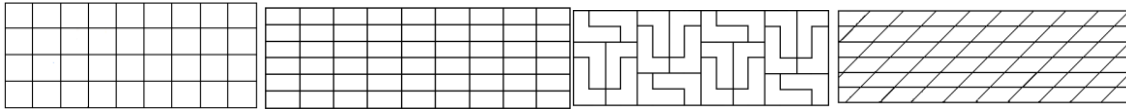
Las plantillas con distintos reticulados, impresos sobre papel de calcar son las siguientes:

Reticulado A

Reticulado B

Reticulado C

Reticulado D



Se podrá utilizar lápiz y regla no graduada, no se permitirá realizar mediciones con regla graduada y tampoco se podrá hacer subdivisiones al dibujo de la figura dada ni al reticulado.

Luego de iniciada la puesta en común, se expondrán en un afiche los resultados, en un cuadro como el siguiente:

Reticulado	Unidad	Medida
A		
B		
C		
D		

Se espera, como consecuencia del debate acerca de las producciones de cada grupo, poder establecer los siguientes acuerdos:

- *Es posible asignarle un número o un intervalo, a la cantidad de superficie de una figura.*
- *Este número depende de la unidad de medida seleccionada para iterar en la superficie plana analizada. Con el cuadrado unidad del reticulado A se le asigna el número 4 a la figura y con el rectángulo unidad del reticulado B, el número 8.*
- *Es posible utilizar distintas superficies planas en la iteración y obtener el mismo número. Con el cuadrado unidad del reticulado A y con el polígono cóncavo unidad del reticulado C, cuentan la misma cantidad: 4.*
- *Hay figuras que no son convenientes tomarlas como unidad, como el paralelogramo del reticulado D, si bien es posible utilizarlo como unidad, la medida que se obtiene con ella no es exacta.*
- *Hay modos de superposición de la figura con el reticulado que optimizan la obtención de la medida.*

Si bien creemos que los alumnos podrán asignarle un número real positivo a la figura dada, utilizando las unidades de los reticulados, también pensamos que probablemente, no adviertan que en ésta afirmación está implícito que las líneas de un reticulado encierran dibujos de superficies planas con una determinada cantidad de superficie, que además, todas las figuras de un reticulado tienen la misma cantidad de superficie y que por ello pueden contarlas (o sumarlas una a una). Estas nociones deberían ser retomadas por el docente en el momento de la institucionalización, que se realizará luego de la segunda actividad. Se dejará para un tratamiento posterior el trabajo sobre la terminología específica: unidad, área, iteración, etc.

En la segunda parte de la actividad, se aborda el tema de la medida exacta y la medida aproximada, completando lo iniciado en la consigna 1.

Consigna 2:

Dadas las figuras A y B, encuentren un método que permita asignarle un número entero como medida a las superficies planas dadas. Justifiquen sus respuestas.



Además de medir con la unidad establecida (reticulado D), se espera que comprendan que una mejor aproximación al valor de la medición se puede lograr utilizando subunidades convenientes. En el caso de la figura A, no se producen conflictos, en cambio para la figura B tendrán que recurrir a la subdivisión de la unidad para encontrar el número entero. Además, se busca ahondar en la relación entre cantidad de superficie y unidad de medida, cuando entre ellas hay a su vez una multiplicidad.

Cada grupo cuenta con una impresión de la consigna en papel blanco y un papel de calcar en el que está impreso un reticulado; podrán utilizar lápiz y regla no graduada. Para no favorecer la medición de longitudes con unidades de medida convencionales, no estará permitido medir con regla graduada.

En el momento de síntesis de la actividad, pensamos que se podría dar el status de conocimiento a las siguientes nociones:

- *Es posible cuantificar la cantidad de superficie de una superficie plana y el proceso que se utiliza para ello se denomina “medición”.*
- *Para medir una superficie plana es necesaria una “unidad”, que es una cierta cantidad de superficie elegida para ello y que puede ser subdividida si fuera necesario.*
- *El “área” es la medida de la cantidad de superficie de una superficie plana, y depende de la unidad elegida. Es un número real positivo con una unidad de medida.*
- *A unidades distintas le corresponden medidas distintas de una misma superficie plana.*
- *De acuerdo a la unidad o a la superficie plana a medir, se puede obtener una medida exacta o una medida aproximada.*
- *Es posible mejorar la aproximación al valor de la medición utilizando otras unidades convenientes.*
- *Uno de los factores que influyen en el orden del error que se comete al medir una superficie, es la forma tanto de la superficie plana a medir como de la unidad de medida seleccionada.*
- *Se pueden observar cuestiones referentes a la aplicación de las propiedades aditivas y de producto por un escalar de la magnitud superficie.*

Por otra parte, creemos que antes de realizar tareas de medición, es necesario desarrollar en el aula actividades para la percepción de la magnitud superficie, su comparación y ordenamiento así como el concepto de cantidad de superficie y la noción de equivalencia ligada a éste. Así mismo, provocar la discusión en clase acerca de la elaboración de modelos como correspondencia entre los objetos soportes (que pueden ser objetos reales, figuras geométricas o representaciones que de ellas se realizan) de la medición y el mundo matemático.

Luego de trabajar la idea del área como una medida de recubrimiento, pensamos que es importante abordar la Medición de la Magnitud Superficie desde una concepción bidimensional, pretendiendo que los alumnos logren establecer la relación entre los dos procesos y adquirir recursos que les posibiliten establecer la medida de la cantidad de superficie, a pesar de que “no recuerden” las fórmulas de cálculo preestablecidas

Conclusiones

Consideramos conveniente hacer algunas apreciaciones respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Magnitud Superficie y de su Medición y su implementación en el entorno escolar:

- Es posible diseñar actividades que propongan una enseñanza de la “magnitud superficie” diferente, distinguiéndola de las restantes.
- El trabajo unidimensional de la medición podría ser un factor importante en el éxito del cálculo de la medida en su carácter bidimensional. La manipulación, la transformación de figuras o las tareas de pavimentado podrían citarse como medios para alcanzar este fin.
- La obtención de la medida de una cantidad de superficie presenta una variedad de relaciones que van más allá del simple uso y aplicación de fórmulas. Usualmente se considera como lo más importante de la medición la asignación numérica; en realidad ésta es apenas una parte de un complejo proceso.
- El conocimiento de los entornos de la medida posibilitarían diseñar situaciones didácticas que tomen en consideración la naturaleza epistemológica de la magnitud superficie y de su medida, proporcionando un medio a-didáctico que posibilita ocuparse de aspectos distintos, todos ellos constitutivos de las nociones de magnitud y medida.

Esta descripción minuciosa de los aspectos vinculados con la enseñanza y aprendizaje de la medición de superficies, particularizado a la obtención del área de las mismas, nos obliga a percatarnos de la complejidad que presenta debido a la variedad tan interesante de relaciones y a los diferentes enfoques que posibilitan su determinación, conformando un entramado de conocimientos poco sencillo.

Referencias Bibliográficas

- Brousseau, G. y Brousseau, N. (1991-92). El Peso de un Recipiente. Estudio de los Problemas de la Medición en cm. “*Gran N*”, 50 (65-87). (Traducido por Godino, J.).
- Chamorro, M. (Coord.) (2003). *Didáctica de las Matemáticas*. México: Editorial Prentice Hall Pearson
- Douady, R y Perrin, R. (1983). *Mesure des Longueurs et des Aires*. IREM. PARIS VII.
- Godino, J., Batanero, C. y Roa, R. (2002). *Medida de Magnitudes y su Didáctica para Maestros*.
- Olmo, M, Moreno, M. y Gil, F. (1993) *Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas?*. Matemáticas Cultura y Aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis.
- Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica*. Tomo I. Fundamentos. Madrid: Gómez Puig Ediciones.