EL PROBLEMA DEL VIAJANTE: RECORRIDOS HAMILTONIANOS

Raquel Cognigni, Teresa Braicovich, Valeria Cerda
Universidad Nacional del Comahue - Argentina
teresabraicovich@jetband.com.ar
Niveles Básico y Medio

Resumen
En el contexto de una convicción que sostenemos desde hace varios años y a partir de distintas investigaciones que hemos realizado con el fin de evaluar la viabilidad de introducir algunos conceptos de grafos en distintos niveles educativos, nos volvemos a plantear cuáles y cuántos de ellos son adecuados para llevar a las aulas de primaria y secundaria. Este trabajo, en particular, se refiere a los grafos hamiltonianos, como el mismo es un problema aún abierto no lo habíamos trabajado específicamente en estos niveles.
Este trabajo tiene como objetivo presentar las actividades llevadas a cabo con niños de distintas edades, las que consideramos permiten a los alumnos construir el concepto de recorrido hamiltonianocon el fin de identificar edades mínimas para cada propuesta y a partir de esto es posible dar una cierta graduación de los contenidos en cada uno de los niveles.
Palabras clave: grafos – Hamilton – recorridos.

Introducción

Hemos realizado distintas investigaciones en el marco de los Proyectos de Investigación *Adjunción en Grafos* y *El operador line sobre grafos cordales y de comparabilidad*, -proyectos ejecutados y subsidiados por la Universidad Nacional del Comahue, con informes de avance y final aprobados- con el fin de evaluar la viabilidad de introducir algunos conceptos de grafos en distintos niveles educativos.
Este trabajo, en particular, se refiere a los grafos hamiltonianos, como el mismo es un problema aún abierto no lo habíamos trabajado específicamente en estos niveles. El concepto deriva su nombre del físico-matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865), que fue uno de los primeros que estudió el tema. Él produjo un juego de ingenio llamado “la vuelta al mundo”, que consistía en buscar un recorrido especial sobre un dodecaedro regular construido en madera. Los vértices de dicho poliedro representaban ciudades importantes del planeta y las aristas eran conexiones entre ellas, el recorrido consistía en pasar exactamente una vez por cada una de las ciudades, se podía volver o no volver a la ciudad desde la cuál se partió. A tales recorridos se los llama recorridos hamiltonianos cerrados y abiertos, respectivamente. Es importante destacar que, como era difícil de manejar el dodecaedro se suplantó por el grafo que lo representa.
El interés nuestro en trabajar este tema reside en que, como otros tantos problemas matemáticos surgen de situaciones de la vida cotidiana, lo que le da el sustento práctico y útil a esta ciencia. Se trata de resolver problemas de preventistas, de inspecciones, de reparto de mercadería, de políticos en gira de propaganda de su partido, etc. que tienen que moverse entre distintas ciudades. También, se puede considerar el recorrido de un transporte escolar, el pasar a buscar amigos para ir a una fiesta, entre otros ejemplos. En cualquiera de estas situaciones, lo lógico es pasar por cada casa o por cada ciudad una sola vez y de ser posible, optimizar los recursos. Esto responde al concepto de recorrido hamiltoniano de un grafo. Esto marca la aplicabilidad de la teoría de grafos, como se indica

Según Rosentein, J., Franzblau, D. y Roberts, F. (1997), ellos agregan también que es accesible, atractivo y adecuado.
La idea que nos moviliza no es nueva. Sólo da continuidad a propuestas anteriores, (Braicovich, 2009) y (Cognigni, Braicovich y Reyes 2008) que intentan divulgar y proponen incluir conceptos de la temática grafos en la educación primaria y secundaria, pues no se encuentra en los programas oficiales, ni en su faceta "matemática pura" ni desde sus conceptos básicos que pueden ser usados como un juego de manera muy intuitiva con niños desde corta edad. Estamos convencidas, pueden ser tan formadores del pensamiento matemático como los de la currícula oficial, si apuntamos a lograr en nuestros estudiantes un pensamiento lógico, de gran intuición y que resuelva con ingenio las dificultades, este material nos brinda una amplia gama de posibilidades que nos proponemos no desperdiciar.

Pertinencia de la Propuesta

Friedrich Froebel, preocupado por los primeros años del ciclo escolar, subraya el carácter evolutivo del aprendizaje, y en ese sentido nos hacemos eco de las ideas siguientes: las experiencias educativas se apoyan unas sobre otras y por lo tanto están relacionadas, cuánto más significativas son las diversas experiencias, más amplio es su potencial educativo. (Stone Wiske, 1999). Considerando tales continuidades importantes, Froebel alentaba a los niños a volver a menudo a experiencias anteriores, ya que entendía que los alumnos aportarían cada vez algo diferente a ellas, ampliándolas, brindándoles nuevas posibilidades y extendiendo de esta manera su comprensión.

> Los estándares y marcos conceptuales sobre el currículo que se desarrolla en la actualidad ponen el énfasis en la necesidad de que los alumnos comprendan conceptos claves de las disciplinas, desarrollen disposiciones intelectuales y hábitos mentales asociados con la investigación, construyan su propia comprensión en lugar de limitarse a absorber el conocimiento creado por otros y vean conexiones entre lo que aprenden en la escuela y su vida cotidiana. Dice Vito Perrone (Stone Wiske, 1999, p. 51):

En el contexto de lo planteado, que apunta a la enseñanza para la comprensión, su propuesta es reformular los contenidos de los programas vigentes en la actualidad, para enfrentar los siguientes desafíos: asegurar una propuesta de trabajo para todos los alumnos, sin desestimar la rica gama de intereses y formas de expresión que los alumnos pueden presentar, diseñar currículum que respondan a las normas respaldadas y a las necesidades individuales de los alumnos, producir una clara evidencia del aprendizaje para que estudiantes y educadores sean responsables de su trabajo y estimular una valoración generalizada de la comprensión y un respaldo a ella como meta educativa central.
Este tipo de experiencias son para nosotras muy gratificantes, ya que "investigamos", pero a su vez ellos también lo hacen, pues se los pone en situación de crear, descubrir, plantear hipótesis, sugerir nuevas cosas, explicar y justificar lo realizado, etc. Entendemos que de esta manera se aporta a la comprensión y al desarrollo de disposiciones intelectuales y hábitos mentales útiles para el crecimiento del alumno.
Para reafirmar el hecho de que esta estrategia de trabajo es una forma de hacer matemática y de generar espíritu investigativo en nuestros alumnos:

> Cada vez que se estudia un tema de matemática, es importante contar con un conjunto variado de ejemplos que sirvan de materia prima a la intuición del estudiante. En efecto, cuando un matemático dice: ´intuyo que este resultado es correcto, aunque todavía no puedo demostrarlo´, lo más probable es que subconscientemente haya

referido el caso a todos los ejemplos y contraejemplos que conoce, obteniendo siempre respuesta afirmativa. Por supuesto, esta intuición matemática es importantísima, ya que constituye el primer paso de un nuevo hallazgo matemático. Después vendrá la formalización…" (Toranzos, 1976, p. 17)

Desarrollo de las experiencias

En el primer punto de este apartado se presenta la metodología, en el segundo se dan las actividades que les fueran planteadas junto con las devoluciones, esto se considera por grupo etario y por último se presentan las conclusiones de estas experiencias.

Metodología

La metodología es, en términos generales, la misma que la utilizada en la mayoría de las experiencias con grupos pequeños de alumnos llevadas a cabo por nosotras: elegimos un tema, planificamos las actividades, reunimos a los grupos, les proponemos las actividades en forma de juego, observamos como las enfrentan y hacemos un análisis minucioso del desarrollo de las reuniones y de las devoluciones que nos brindan. Es importante destacar, que en general, en este tipo de experiencias no se da "teoría" previa. El vocabulario específico lo van aprendiendo con naturalidad y sin esfuerzo durante el transcurso de las reuniones.

Como dijimos, las actividades se plantean como un juego con una consigna que hay que respetar, y analizamos cómo responden a ella, desde sus posibilidades evolutivas y seguimos avanzando en complejidad hasta que vemos que deja de interesarles porque ya no comprenden, en estos momentos volvemos a temas que sí manejaron. Esto es lo que nos marca a nosotros la secuencia para las distintas edades. Por supuesto no es algo estático, como docentes siempre deberíamos atrevernos a ir un paso más allá de lo que suponemos corresponde a la edad, y ofrecer desafíos, ya que adherimos a la idea de una educación que abra posibilidades, que el niño sepa que siempre queda algo más por aprender a medida que va creciendo y se sienta motivado a aprender más.

Las experiencias se realizaron en grupos de tres o cuatro chicos de la misma edad, permitiendo el intercambio entre ellos, la búsqueda y las respuestas grupales, por eso, decimos "Ellos hicieron". Analizamos respuestas y conductas para comprender como enfrentan este tema desde lo evolutivo. Vale aclarar que algunos de estos chicos habían trabajado en reuniones anteriores con recorridos eulerianos y pintado de mapas, de cualquier manera no se ha notado diferencia significativa en las actitudes de unos y otros.

Una gran ventaja que tenemos al haber elegido este tema es que no forma parte de contenidos "escolarizados", no hay preconceptos, entonces lo hacen si entienden la idea y si no, abandonan el juego o piden ayuda, no hay nada aprendido de memoria. La ayuda que les brindamos es de interpretación de consignas, únicamente. No corremos el riesgo de que resuelvan porque recuerdan otro similar. En esta experiencia preparamos una guía de trabajo y dejamos a los chicos trabajar más solos, interviniendo ante preguntas o cuando nos decían "no sé que tengo que hacer". Muchos de ellos, fueron resolviendo a partir de la discusión grupal, con escasa intervención de los adultos. A medida que surgieron las preguntas de los chicos o la petición de ayuda, se fueron agregando otros ejemplos, algunas sugerencias y nuevas preguntas de parte del docente, en un constante intercambio de ideas.

Actividades propuestas y análisis de las devoluciones

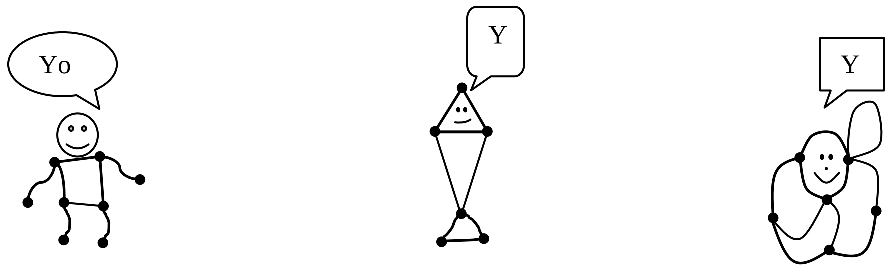
La planificación de las actividades y las guías que se les entregaron tenían la siguiente estructura:

- Presentación de los grafos, a partir de la siguiente actividad:

GRAFOS QUE DAN TRABAJO…

O también podríamos decir: ¡***QUE TRABAJO DAN LOS GRAFOS…!***

Para empezar, los vamos a presentar…porque hay chicos que los conocen y otros que no.



Somos… ¿Qué somos? Formalmente, un conjunto de vértices (puntitos) y aristas (líneas) y tenemos formas diferentes…Más gordos, más flacos, con forma de barrilete, de número, con poquitos o muchos vértices, en fin muy muy variados. ¿Te animás a hacer un grafo loco? No te olvides, sólo estamos constituidos por *vértices* y *aristas*. ¿Viste que ya lo aprendiste?

- Se les da un conjunto de vértices, sin aristas y se les pide que dibujen un camino continuo de manera que pase exactamente una vez por cada punto, para los más pequeños en términos de casitas y lugares.
- Se les da un grafo, un vértice es la casa de un niño, otro el lugar de una fiesta y los restantes casas de amigos que debe pasar a buscar, junto con su papá, para ir al cumpleaños, pasando exactamente una vez por cada lugar y de manera que luego de dejarlos, su padre regrese a la casa. Lo mismo se pide en grafos distintos se les dice que elijan el vértice que será la casa. En los primeros existía tal recorrido y los que se presentaron luego no eran hamiltonianos.
- Luego se les van haciendo una serie de preguntas, entre ellas, las características y/o diferencias entre los que permiten realizar el recorrido y los que no, si es posible agregar aristas de manera que sí sea hamiltoniano, qué sucede si a los grafos que son recorribles se le quitan alguna o algunas aristas.
- Se les pide que "inventen" algunos grafos recorribles y otros que no lo son.
- Finalmente, se define recorrido hamiltoniano abierto cerrado y se pide que vuelvan a los grafos en los que no habían encontrado camino cerrado y analicen si existe el camino cerrado bajo estas condiciones.
- Se trabajó con grafos valuados, en términos de distancia entre los lugares representados por los vértices, buscando ahora recorridos hamiltonianos que además minimicen la distancia recorrida. Compararon entre ellos los valores hallados y fueron buscando mejorarlos, siempre explicando los pasos que realizaron.

Se presentan en los siguientes apartados las devoluciones de los niños según grupos etarios.

Grupo etario entre 6 y 9 años

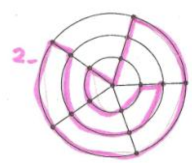
Comprenden el concepto de recorrido hamiltoniano y logran resolver grafos sencillos a partir de los 7 años. Antes de esa edad sólo pudieron dibujar los caminos si se le daban únicamente las ciudades, pues cuando se enfrentaron al grafo no siempre respetaron las aristas dadas, sino que agregaron aristas a su gusto. Luego de un fuerte refuerzo algunos nenes de 6 años lo pudieron hacer, pero sobre grafos muy sencillos.

A los niños más grandes, luego de trabajar con varios grafos hamiltonianos se les dieron algunos que no lo eran, se pudo observar que el pensamiento propio de esta edad o las experiencias previas, que a veces tiene que ver con la forma en que se les presenta el conocimiento escolarizado, no les permite admitir la posibilidad de que un grafo no sea recorrible, al menos mientras no se les diga. Luego de resolver varios grafos, se les presentó uno que no se podía recorrer, y ellos se las ingeniaron para lograrlo, encontraron la manera de recorrerlo realizando una trasgresión sin ningún cuestionamiento. Por ejemplo, agregaron una arista, o pasaron más de una vez por algún vértice, quedándose satisfechos con la conquista. Cuando se les dice, por ejemplo: “aquí pasaste dos veces por la misma ciudad”, primero la sorpresa, luego el gesto de que no tenían otra posibilidad. Además, mostraron muchas dudas, cuando se les dijo que debían descubrir si se pueden o no recorrer los grafos dados, pues trabajaban sobre el supuesto de que todos los grafos son recorribles en el sentido hamiltoniano.

No pudieron encontrar características que diferencian a los grafos hamiltonianos y a los no hamiltonianos. Se pudo observar que cuando hallaron un recorrido posible, muestran satisfacción por el éxito, sin cuestionarse si hay otro, por lo que se sorprendieron al ver que a los restantes compañeros les quedó un camino distinto. Piden, entonces, la supervisión de un adulto para saber si ambos están bien, se les dijo que sí y cerraron el trabajo, pidiendo un grafo nuevo, esta duda se debe a que trabajan sobre el supuesto de que cada ejercicio tiene una única solución.

Grupo etario de 10 y 11 años

En esta edad, como se encuentran en una etapa superior del desarrollo cognitivo, hallan sin dificultad recorridos hamiltonianos sobre grafos de mayor complejidad.



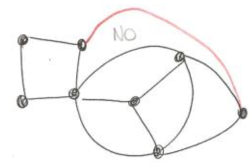
Además, al presentarles grafos que no son recorribles, sin haberles anticiparles esa posibilidad, hacen varios intentos y luego expresan con seguridad: “Este no se puede”. Una vez descubierto que algunos no son recorribles, idea que admiten con naturalidad, el efecto es al revés: apenas lo ven “difícil”, dicen no se puede y es necesario insistir para que intenten. Es decir que admitieron la posibilidad de problemas que no tengan solución.

Se notó nuevamente, un trabajo reflexivo y atento al pedirles que encuentren características que diferencien a los grafos hamiltonianos y los no hamiltonianos. A partir de las preguntas de la guía de trabajo, pudieron visualizar sobre cada caso particular “qué le falta” a un grafo para que sea hamiltoniano. Del trabajo grupal, surgen las siguientes frases: “Una razón para que no sea hamiltoniano es la falta de caminos” (toman caminos por aristas)”; “Algunos no son hamiltonianos porque no se pueden juntar” (esto se refiere a la ausencia de alguna arista que permitiría que exista el recorrido). Ellos mismos mencionan que existen aristas que no son necesarias para recorrer el grafo y que se podrían quitar, lo que efectivamente es verdadero y sucede en todo grafo que existan vértices de grado mayor que dos.

A partir de distintos ejemplos trabajados, lograron construir grafos recorribles y no recorribles, sabiéndolo de antemano. Aquí es interesante analizar que, antes de estas construcciones no habían podido “poner en palabras” características para que un grafo sea o no sea hamiltoniano, pero ante esta nueva consigna, dan una clara respuesta intuitiva: al dibujar grafos que admiten caminos hamiltonianos cerrados, dibujan uno o varios vértices pendientes, se ve que lograron captar una de las características. Cabe aclarar que por ser un problema abierto no están todos los grafos caracterizados, pero sí algunas familias de ellos.

A continuación se presentan los grafos con las aristas que ellos agregaron para que sean hamiltonianos:

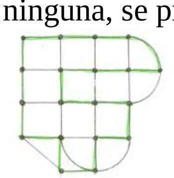
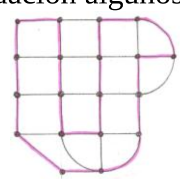




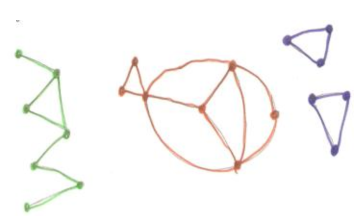
Luego trabajaron con grafos valuados, la consigna fue hallar recorridos de menor distancia posible, lo hicieron por ensayo y error, probando con distintos caminos, aquí se ve que ya les resulta natural la idea de recorridos diferentes sobre un mismo grafo y fueron sumando las distancias. Compararon entre ellos y trataron de mejorar los valores, pero siempre atendiendo a pasar exactamente una vez por cada uno de los vértices. También trabajaron en una forma algorítmica, pues tomaban la arista de menor valor y empezaban desde allí el recorrido, avanzan un poco en este sentido, pero luego vuelven al trabajo por ensayo y error, como al principio. Una alumna dice, textualmente: “Para ir por el camino más corto, voy por todos los números más chicos. El problema es por dónde empiezo, porque siempre tendré que pasar por el número grande”, cosa que efectivamente se daba, la arista “grande” era extremo de un vértice de grado dos.

Grupo etario de 12 y 13 años

A esta edad, sin que se les solicite, buscan recorridos hamiltonianos diferentes, los marcan con distintos colores. Inmediatamente perciben esta posibilidad, partiendo del mismo vértice o de vértices diferentes. Surgió de ellos la pregunta: “¿No hace falta salir siempre del mismo lugar?”, además admiten la posibilidad de que un grafo tenga varias soluciones o ninguna, se presentan a continuación algunos de los grafos:


Lograron identificar algunas características de los grafos que hacen que no sean recorribles, con un vocabulario primitivo, expresaron estas hipótesis: “Que todos los puntos estén conectados con algún punto de partida”, al interrogar a este grupo entendimos que querían decir que no debían existir vértices aislados, “Fallan los que están abiertos”, refiriéndose a vértices pendientes, “que están todos unidos entre alguno de ellos”, refiriéndose a la conexidad del grafo. Además diferenciaron características de los grafos que admiten recorrido hamiltonianos abiertos pero no cerrado. Se presentan algunas de sus producciones a continuación:



Grupo etario de 14 y 15 años

A lo obtenido por el grupo de niños anterior, se suma el hecho de que detectaron que si un grafo tiene una arista o un vértice que al ser quitado desconecta al grafo, entonces no es

hamiltoniano, lo pudieron justificar particularizando en los grafos que construyeron. A la arista y al vértice que al quitar hace que el grafo deje de ser conexo se los llama puente e istmo, respectivamente.
Por otro lado, recién a esta edad algunos chicos pudieron expresar con palabras alguna hipótesis acerca de cómo hallar un recorrido mínimo, diciendo cosas como: “Empiezo por el camino más corto y voy buscando el número más chico y más cercano”, “puedo partir de cualquiera de los vértices, pero me conviene mirar los valores de las aristas que llegan a él, para ir tomando las más chicas”, “puedo marcar la arista menor en cada vértice y veo si esas las puedo usar si o si en el recorrido”. Encontraron distintos recorridos, los compararon y buscaban explicación de por qué se daba esta diferencia, lo que muestra que realizaban las actividades a conciencia, reflexionando y comprendiendo.
Por último, podemos decir que logran responder a todas las consignas, notándose mayor seguridad y mayor precisión en los conceptos. Esto nos sugiere que podríamos seguir avanzando sobre aplicaciones de este tema para la resolución de problemas, puede ser el movimiento del caballo en un tablero de ajedrez, cómo sentar un grupo de personas en torno a una mesa para que todos se sientan cómodos, etc. De cualquier manera queremos destacar que ya se les han presentado problemas de este tipo a alumnos del polimodal en anteriores experiencias y lo pudieron resolver correctamente, mientras el docente actuaba simplemente de guía.

Conclusiones de las experiencias

Podemos observar que es relativamente sencillo comprender la idea de recorrido hamiltoniano, cuando se piensa, por ejemplo, en viajantes, ya que desde los 7 años los chicos logran resolverlo. Pero no resulta tan sencillo identificar características de los grafos que los hacen recorribles o no y establecer “leyes” que nos permitan decidir de antemano si un grafo es o no hamiltoniano, de hecho, lo segundo es aún un problema sin respuesta para la historia de la matemática. Con respecto a lo primero, observamos un salto grande en las etapas evolutivas, ya que hasta los once años aproximadamente siguen trabajando por ensayo y error.
Logran contestar a la pregunta sobre la posibilidad de recorrer el grafo en sentido hamiltoniano, pero no a la pregunta en qué casos es posible recorrerlo, existen algunas respuestas intuitivas, pero les resulta difícil ponerlo en palabras.
Con respecto al trabajo sobre grafos valuados y caminos de recorrido mínimo, se nota una gran diferencia entre los niños que aún están en escolaridad primaria y aquellos que ya se encuentran en la secundaria, los primeros trabajan por ensayo y error, los otros ya buscan algoritmos y estrategias de mejoramiento.
Como se trata de un problema abierto, estamos sumamente satisfechas con los logros obtenidos, y decimos una vez más que en docencia hay que abrir horizontes permanentemente para ofrecer a nuestros alumnos posibilidades amplias, ya que siempre ellos nos pueden sorprender.
Por último, queremos mencionar a Schoenfeld (1985), quién nos dice que existen cuatro destrezas necesarias para el éxito en matemática, a saber: plantear heurísticas, estrategias y técnicas para resolución de problemas tales como “trabajar hacia atrás” o dibujar figuras, ser ingenioso al trabajar con proposiciones y procedimientos de conocimientos de matemática, decidir sobre cuándo y qué resolución o estrategia utilizar y el control de las mismas y reconocer que la matemática está estrechamente ligada con la vida cotidiana.

Creemos que en el tipo de actividad realizada con los alumnos se han puesto en juego varias de estas destrezas

Reflexiones finales

Marta Stone Wiske (1999, pp. 23), nos dice: “En las últimas décadas, los teóricos del aprendizaje han demostrado que los alumnos no recuerdan ni comprenden gran parte de lo que se les enseña. Para comprender ideas complejas y formas de investigación, los estudiantes deben aprender haciendo y deben cambiar activamente su opinión. Las nuevas normas curriculares establecidas por educadores en una amplia variedad de temas exigen que el trabajo escolar se centre en el desarrollo conceptual, el pensamiento creativo, la resolución de problemas y la formulación y comunicación de argumento atractivos”. Nosotras creemos que nuestra manera de trabajar adhiere a esto, porque estamos trabajando con contenidos no escolarizados, que no están en los textos que los alumnos manejan y que podemos enfrentar sin un camino predeterminado, sino que podemos movernos a ritmos diferentes, permitiendo a cada chico expresar sus intereses personales y avanzar con el contenido mientras lo desee y su potencial evolutivo se lo permita. Esto enriquece las experiencias. Cuando el alumno no puede continuar avanzando porque tropieza con dificultades evolutivas pierde interés, pero se le propone otra gama de posibilidades, con lo cuál se van abriendo nuevos caminos de pensamiento y de acción.

Por otra parte, es bueno que los alumnos sepan que existen aún problemas abiertos en matemática, este es uno de ellos y no es tan difícil su interpretación. Como nos dice Adrián Paenza (2007, pp.21): “¿Quién dijo que se sabía “todo”? el solo hecho de que “aceptemos” esto como posible demuestra qué lejos estamos del contacto con la “matemática real”, la que investiga porque *no sabe*, la que es curiosa y atractiva, la que es seductora y útil. La que hay que *mostrar*, la que hay que sugerir. Y creo que ya es hora de empezar.”

Referencias Bibliográficas

Braicovich, T.; Caro, P; Cerda, V.; Osio, E.; Oropeza, M.; Reyes, C. (2009). *Introducción a la Teoría de Grafos.* Editorial Educo. Neuquén.

Cognigni, R.; Braicovich, T.; Reyes, C. (2008). Recorriendo grafos a lo largo de la educación general básica. *Revista de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina* 23. 109-125. Universidad Nacional de Córdoba.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*.. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla. España.

Paenza, A. (2007). “*Matemática…¿estás ahí*? *episodio* 3”. Siglo XXI. Editores Argentina. Buenos Aires.

Pérez, N.; Cognigni, R. Ponzi, R. (2002). *Nociones topológicas. Una brisa nueva en la Educación General Básica.* Universidad Nacional de San Luis.

Rosentein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997). *Discrete Mathematics in the Schools*. Dimacs. Volumen 36 American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*, San Diego, CA: Academic Press.

Stone Wiske, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Colección *Redes de Educación* dirigida por Paula Pogré. Ed. Paidós.

Toranzos, F. (1976). *Introducción a la Teoría de Grafos*. Monografía OEA. Buenos Aires.