UNA EXPERIENCIA DE TALLER SOBRE NÚMEROS REALES CON INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD

Marcela Cifuentes, Martha Ferrero, Virginia Montoro
Universidad Nacional del Comahue - Argentina
cifuentesmarcel@gmail.com , martha.ferrero@crub.uncoma.edu.ar , vmontoro@gmail.com
Nivel Universitario

Resumen

En este trabajo describiremos un encuentro focalizado en Educación Matemática, que corresponde a un taller denominado "Ingreso a la formación docente" llevado a cabo en febrero de 2010 en el Centro Regional Universitario Bariloche. Se presentó una serie de tareas a 6 alumnos ingresantes a la carrera de Profesorado en Matemática, con el objetivo de que esta experiencia se constituyera en una instancia de aprendizaje y revisión de conocimientos (en relación al rol de los participantes como alumnos), e incentivara la reflexión en cuanto a la naturaleza de los objetos matemáticos y sobre las formas de validación en Matemática (en relación a sus roles tanto de alumnos como de futuros docentes). En consecuencia, trabajamos sobre algunos de los siguientes aspectos relacionados con los números reales: la comprensión de la completitud de los números reales y su asociación con la continuidad de la recta, cómo se relacionan las concepciones sobre el infinito matemático y la comprensión del número real, la comprensión de la densidad y del orden de los números reales y su relación con distintas representaciones externas convencionales. Mostraremos para cada actividad propuesta algunas consideraciones sobre la consigna presentada, las actuaciones del grupo de estudiantes a partir de observaciones generales sobre el modo de resolución y ejemplos de casos particulares interesantes, para luego compartir las reflexiones que surgen de estas observaciones.

<u>Palabras clave:</u> taller – ingreso – números reales – ideas previas

Introducción

En el marco del Curso de Ingreso 2010 en el Centro Regional Universitario Bariloche, se realizó un taller denominado "Ingreso a la formación docente" dirigido a los estudiantes ingresantes a los Profesorados de Matemática y Biología. Con el objetivo general de iniciar a los/las estudiantes en temáticas relacionadas con la labor docente, se implementaron actividades coordinadas desde los departamentos de Pedagogía, Matemática y Biología del Centro Regional. La modalidad empleada consistió en encuentros conjuntos de los estudiantes de ambos profesorados en asuntos generales de Pedagogía, y reuniones particularizadas por carrera. En total se realizaron seis encuentros de dos horas aproximadamente cada uno, durante los meses de febrero y marzo del corriente año.

El episodio que vamos a referir en esta comunicación corresponde a uno de los encuentros focalizado en Educación Matemática, en el que participaron 5 alumnos ingresantes a la carrera de Profesorado en Matemática y un "invitado" inscripto en la Licenciatura en Matemática.

El encuentro se desarrolló en torno a actividades sobre los números reales, puesto que siendo un tema central en la matemática nos permitiría cubrir los objetivos de que esta experiencia:

- se constituyera en una instancia de aprendizaje y revisión de conocimientos (en relación al rol de los participantes como alumnos);

- incentivara la reflexión en cuanto a la naturaleza de los objetos matemáticos y sobre las formas de validación en Matemática (en relación a sus roles tanto de alumnos como de futuros docentes).

Fundamentación de la Temática y de la Modalidad elegidas para el Taller

La temática elegida fue "Los números reales" en el marco del Proyecto de Investigación *Comprensión del número real por parte de estudiantes de los últimos años de secundaria e ingresantes a la universidad* (Montoro y Ferrero, 2010) en el que estamos trabajando.

Al respecto, es ineludible mencionar que el número real es una de las ideas matemáticas más útiles e importantes, por cuanto se lo encuentra en la base de toda la educación matemática y sobre él se construye gran parte del desarrollo matemático.

Habiendo transitado la escolaridad primaria y media, es esperable que los ingresantes a la Universidad comprendan el concepto de número racional, irracional, manejen el sistema de representación decimal de números reales y puedan ordenarlos, representarlos sobre la recta numérica y usarlos para resolver problemas. Sin embargo, estas expectativas frecuentemente no son satisfechas y son numerosas las investigaciones que muestran que los estudiantes terminan sus estudios secundarios sin una comprensión cabal del número real. (Brousseau, 1981; Brousseau, 1987; Fischbein, Jehiam y Cohen, 1994; Douady, 1980).

La modalidad de Taller nos pareció adecuada para promover la actividad y participación de los estudiantes, y acorde a una concepción de organización de la enseñanza en que los saberes previos de los aprendices constituyen el punto de partida de la misma:

> (…) el enfoque constructivista de la instrucción, permite comprender las dificultades de los alumnos para aprender y proporciona una guía para desarrollar estrategias de enseñanza y aprendizaje más eficientes. El centro es el estudiante, sus intereses, sus habilidades para aprender y sus necesidades en un sentido amplio, (una pedagogía centrada en el alumno). La enseñanza de las ciencias desde esta perspectiva debería apuntar a que el estudiante comprenda no sólo los conceptos científicos involucrados, sino también en qué manera ese conocimiento es significativo para su vida y para la de sus semejantes (…) (Chrobak, 1998, p.15).

Se presentaron una serie de tareas a los ingresantes con el objetivo de trabajar sobre algunos de los siguientes aspectos relacionados con los números reales:

- la comprensión de la completitud de los números reales y su asociación con la continuidad de la recta.
- cómo se relacionan las concepciones sobre el infinito matemático y la comprensión del número real
- la comprensión de la densidad y orden de números reales y su relación con distintas representaciones externas convencionales.

Nos parece importante destacar que para pensar y razonar sobre ideas matemáticas es necesario hacerse alguna representación interna de las mismas para que la mente tenga posibilidad de operar con ellas; y para comunicar estas ideas es preciso representarlas externamente. Las representaciones externas -lenguaje verbal, distintas notaciones, símbolos, fórmulas, figuras, etc.- serían el medio por el cual los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a los demás, a la vez que impulsan procesos de redescripción de las propias comprensiones y por ende avances en el conocimiento.

En el diseño del Taller tuvimos en cuenta que aunque cada individuo tiene que construir sus conocimientos por sí mismo, este proceso no puede desprenderse de un fuerte componente social (Chrobak, 1998). Fue así que las tareas dadas mediante un cuestionario a trabajar en forma individual se complementaron con una puesta en común. Esta instancia contribuye a enriquecer lo aprendido en cuanto a que los participantes deben comunicar sus ideas y representaciones, intercambiar producciones y razonamientos e intentar comprender el pensamiento de los otros, habilidades netamente necesarias en su desempeño como alumnos y también en la tarea cotidiana de un futuro docente.

En cuanto al diseño de las tareas

En esta etapa de diseño participaron Virginia Montoro, Martha Ferrero, María Teresa Juan, Marcela Cifuentes, Flavia Santamaría, Virginia Zilio y los alumnos: Guillermo Fernández Rajoy y Verónica Bianchi. Las actividades propuestas se diseñaron sobre la base de estudios realizados en el marco del Proyecto "*Comprensión del número real por parte de estudiantes de los últimos años de secundaria e ingresantes a la universidad"* (Montoro, 2010) y de nuestra propia experiencia docente. El cuestionario presentado a los alumnos constó de 11 actividades.

En cuanto a la implementación del Taller

El taller se llevó a cabo en un encuentro que duró aproximadamente dos horas y media, siendo la coordinadora general María Teresa Juan. El grupo de alumnos con el cual trabajamos está formado por 6 ingresantes al Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue, cinco de ellos a la carrera de Profesorado en Matemática y uno a la Licenciatura en Matemática.

Básicamente el taller tuvo dos instancias: una primera parte en la que se le entregó una hoja a cada alumno con el cuestionario elaborado, para ser desarrollado en forma individual y escrita; y a continuación se realizó la puesta en común de lo que cada uno había contestado.

La participación activa de todos los alumnos en el desarrollo de este taller, es algo destacable. Incluidos aquellos alumnos que en otras situaciones (clases de matemática preuniversitaria u otros talleres) no participaban, aquí se mostraron interesados y movilizados por exponer sus ideas y escuchar las de sus compañeros.

Es interesante observar que si bien estuvieron entusiasmados en todo momento con la tarea planteada, cuando se conflictuaron no contestaban.

Fue muy enriquecedora la puesta en común en general. Pero adquirió particular importancia en las últimas actividades (9, 10 y 11), en las cuales lo descriptivo fue fundamental para intentar entender lo que cada alumno veía cuando colocaba la recta en el microscopio, o bien cuando imaginaba practicarle infinitos cortes a un segmento.

Si bien hay cuestiones que pulir, hay mucho para rescatar, en especial que en los alumnos se despierte el interés en estas cuestiones y se vayan "pensando" como afirmó una de las alumnas una vez terminado el encuentro.

Una mirada a la producción de los alumnos

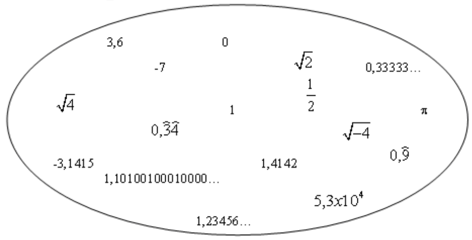
La puesta en común del taller fue registrada en vídeo, como así también se tomó nota de la primera parte de trabajo individual escrito. Las producciones escritas de los alumnos fueron guardadas para su posterior análisis.

Nos interesa mostrar para cada actividad algunas consideraciones sobre la consigna presentada, las actuaciones del grupo de estudiantes a partir de observaciones generales sobre el modo de resolución y ejemplos de casos particulares interesantes, para luego compartir las reflexiones que surgen de estas observaciones. A los fines de este escrito y por razones de extensión, nos centramos en el desarrollo de las actividades 1 y 9.

Actividad 1

Enunciado:

Clasifica los siguientes números, explicitando el criterio utilizado:



Acerca de la consigna de la actividad 1:

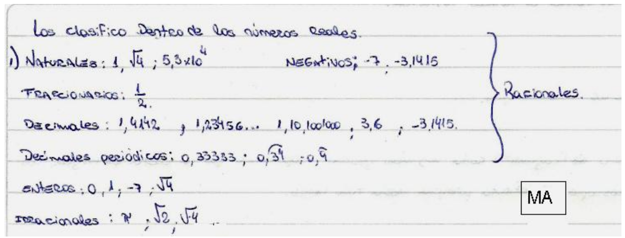
Con esta actividad pretendimos que los alumnos clasifiquen los números dados según sus propios criterios. Intentamos que expliciten dicha clasificación con la finalidad de distinguir y comparar criterios utilizados, como así también, observar si es que algún criterio predominaba sobre otros. La variedad de números propuestos en este ejercicio, tiene por objeto abarcar los distintos conjuntos numéricos, y sus diferentes representaciones, indagar sobre la influencia de dichas representaciones a la hora de catalogar los números, hacer evidente la utilización de definiciones propias y la capacidad de defender un criterio ante un requerimiento o conflicto.

En cuanto a las producciones:

- todos realizaron la tarea en el dominio numérico,
- $\sqrt{2}$ y π son clasificados por todos los alumnos como irracionales,
- Durante la puesta en común, en torno a la clasificación y su significado, NB discute la diferencia entre la propia clasificación y la propuesta por LP, dado que ella permite la inclusión de clases (clasificación jerárquica) y para LP cada número pertenece a una sola clase (clasificación dicotómica). El siguiente fragmento muestra el debate en cuestión:

  P: bueno, el resto ¿qué opinan de la clasificación de… que él se expuso y dio su clasificación?
  NB: dio bastantes clasificaciones no? Como
  P: dio una clasificación
  NB: no pero dio como positivos, negativos, como enteros, racionales y… irracionales ¿no? ¿o yo entendí mal?
  P: si si
  NB: y después por fraccionarios y enteros, no dio así como… yo hice directamente naturales, racionales, irracionales, no por si es negativo, positivo, fraccionario, porque número entero también lo podés escribir como fracción, o por ejemplo raíz de cuatro lo puse como entero porque te da dos
- el criterio predominante de clasificación se hizo en base a sus representaciones, por ejemplo:

  - aparecen como clases los decimales, los negativos, los fraccionarios; como el caso de MA, donde vemos que las parejas ½ con 0,333333333… y 1 con $0,\hat{9}$ son puestos en clases distintas:



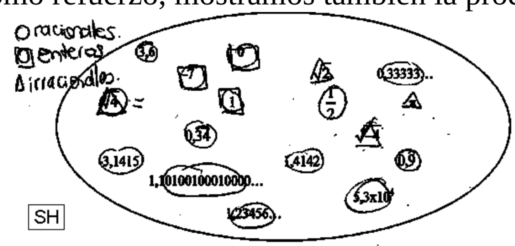
- para la alumna SH, $\sqrt{4}$ es a la vez racional e irracional y cuando pedimos explicaciones explicita:

SH: […] y tenía la duda de la raíz de cuatro, porque si bien raíz de cuatro puede ser un irracional, también yo tomé la solución de raíz de cuatro, que sería 2, como número entero entonces bueno… es como que no me quedó en un conjunto definido ese, porque… bueno la solución puede ser un entero y sin embargo la raíz de cuatro la tomé como irracional

P: ¿Por qué? ¿Por qué decís que para vos la raíz de cuatro es irracional?

SH: por la raíz

Como refuerzo, mostramos también la producción escrita de esta alumna:



- En el caso particular de la pareja 1 y $0,\widehat{9}$, son varios los que mencionan que se trata del mismo número y al pedirles explicación, sostienen que así se los enseñó la docente en el curso de ingreso.
- $\sqrt{-4}$ es visto sólo por LP como complejo, para NB no existe (recordemos que NB defendió la clasificación jerárquica y en el audio expresa que los dados son todos números reales) y para el resto es un irracional.

Reflexiones didácticas en torno a la actividad 1:

Una de la reflexiones que se desprende de las observaciones es el hecho de que aparezcan los decimales como clase, ya sea porque se le da un status de conjunto numérico o más bien como forma de esquivar el conflicto de tener que decidir si un determinado número (como por ejemplo 1,23456…) es racional o irracional.

Por otra parte, vemos que conviven concepciones o ideas contrapuestas en los alumnos, pero esto no es percibido como un problema hasta que el docente explicita la contradicción.

Pareciera que el conocimiento de los números irracionales se limita a π y $\sqrt{2}$, ya que los otros números que tenían infinitas cifras decimales no periódicas no fueron reconocidos como tales por cinco de los seis participantes. Sería importante plantear más ejemplos que sirvan a la reflexión y al reconocimiento del conjunto.

A partir de las respuestas acerca de la pareja 1 y $0,\widehat{9}$, nos dimos cuenta de que si bien los alumnos repitieron textualmente frases y afirmaciones dichas por la docente al explicar el tema, no obtuvimos garantías de la total y profunda comprensión de esta situación.

Aparentemente funcionan “definiciones personales” en torno al concepto de número irracional que parecen ser el fundamento de los criterios utilizados. Al respecto, podemos mencionar que LP clasifica como irracionales a todos aquellos números con infinitas cifras decimales (sean periódicos o no) y que para SH "las raíces" siempre son números irracionales.

Actividad 9

Enunciado:

Imagina que dispones de un microscopio de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar los objetos tanto como tú quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio. ¿Puedes describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?

Acerca de la consigna de la actividad 9:

Esta actividad fue extractada de un artículo de Romero (1996), interesado en las descripciones de los individuos respecto de lo que "ocurre" mientras la potencia del microscopio va aumentando. Nuestro objetivo aquí fue conocer algunas ideas intuitivas del infinito, de la continuidad y de la relación entre recta y números que los alumnos pudieran tener. Cuando aumentan el microscopio hasta infinito: ¿observan huecos en la recta?, ¿se ven puntos aislados?, ¿o siguen viendo una recta?; ¿la recta se ve más "gorda" o de igual espesor?

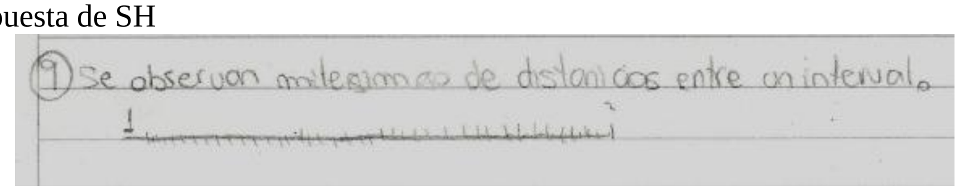
En cuanto a las producciones:

Exhibimos a continuación las respuestas escritas de los alumnos y fragmentos de algunas de sus reflexiones manifestadas en la puesta en común.

- Respuesta de LF

P: Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio, ¿cómo imaginan… qué verían si vamos aumentando la potencia cada vez más?
LF: y… más detalle de lo que no se puede ver a simple vista
P: ¿cómo sería visto en más detalle?
LF: más definición de cada partícula

- Respuesta de SH



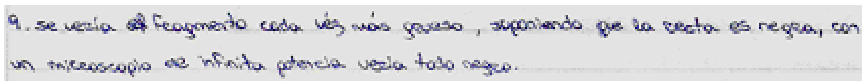
SH: y dentro de un intervalo podrías ver infinitas… ver mucho más
P: ¿más qué?
SH: más intervalos dentro de esa recta
SH: como… como dentro de la recta más rayitas que los separan, más intervalos, más definidos
P: o sea, verías más las rayitas de la escala
SH: claro
(…)
P: y entre las marcas de la escala, entre dos marcas ¿qué hay? entre dos de esas rayitas
SH: claro, yo me lo imaginé como que entre las dos rayitas veías blanco y mientras más aumentabas veías más rayitas entre medio

- Respuesta de CU


No se puede describir porq. llega un determinado tiempo que se repetiría lo mismo

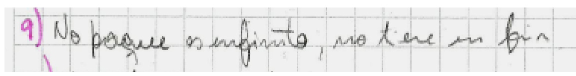
CU: si, yo puse lo de las rayitas, jugué también con lo de las rayitas y que siempre se va a repetir lo mismo, porque cada vez que vos te acerques vas a ver más rayitas, se va repitiendo
P: o sea que aumentes lo que aumentes lo que ves siempre es igual
CU: se va aumentando y va siendo siempre igual con las rayitas

- Respuesta de MA


9. se vería el fragmento cada vés más grueso, suponiendo que la recta es negra, con un microscopio de infinita potencia vería todo negro.

MA: yo puse… lo tome como que… suponiendo que la recta es por ejemplo negra y que yo me voy acercando con el microscopio cada ves más, más, más y va haber un punto en que voy a ver todo negro, como que es muy grande y voy a ver todo negro
P: crece
MA: claro
P: pero ¿no tiene agujeros?
MA: no, no, todo negro

- Respuesta de NB


9) No porque es infinito, no tiene un fin

- Respuesta de LP

LP: y si es una recta formada por puntos vería más puntos, puntos y puntos
P: los puntos esos que ves ¿serían como las estrellas esas así?
LP: no porque las estrellas están medias separadas, entonces sería una recta así
P: ¿los puntos están muy juntitos? LP: si
P: ¿o ves un espacio entre punto y punto?
LP: no, que los puntos están muy juntos, que no hay lugar donde haya… espacios

Reflexiones didácticas en torno a la actividad 9:

Es llamativo, la variedad de respuestas encontradas, siendo que los participantes tienen un nivel educativo similar, cabía esperar mayor homogeneidad en las respuestas, así como sucedió con las actividades anteriores.

Es una actividad muy productiva en cuanto no parece haber rastros de intervención escolar anterior y es así que sin mucho esfuerzo surgen las ideas espontáneas, no tan escolarizadas.

Es interesante resaltar que a la hora del debate los alumnos se sorprendieron de las respuestas de sus compañeros, lo cual capitalizamos también en relación a la futura actividad de los participantes como docentes.

Para el docente, brinda valiosa información acerca de si los alumnos aceptan el infinito actual o se trata de un proceso inalcanzable (infinito potencial), cómo piensan la materialidad de la recta y su composición, si identifican puntos con números o explicitan una biyección entre conjuntos.

Reflexiones Finales

Tanto la temática como la modalidad elegidas permitieron cumplir con los objetivos que habíamos planteado para los alumnos en cuanto al aprendizaje y revisión de contenidos y en cuanto a intentar llevarlos a preguntarse sobre los modos y objetos de la Matemática, particularmente relacionándolos con sus propios aprendizajes.

Esta implementación nos sirvió para conocer las ideas previas de los alumnos y relacionarlas con el marco teórico que venimos trabajando en el Proyecto de Investigación. Al respecto, podemos mencionar que encontramos indicios de que nuestros alumnos generalmente:

- conocen la existencia de algunos (un número finito) números irracionales muy especiales, sin embargo no suelen aceptar que sean infinitos;
- conciben a la recta geométrica como el sustento intuitivo de los números ordenados, aceptando la asociación uno a uno: (puntos de la recta – números);
- confunden los números con sus representaciones, de modo que por ejemplo $\sqrt{2}$ es una operación sin resolver no un número, lo que los lleva asociar a los irracionales con sus aproximaciones racionales (resultado que da la calculadora).
- no aceptan el infinito actual, de modo que por ejemplo 0,9999…. (infinitos nueves) se acerca mucho a 1 pero no necesariamente es 1.

A nivel práctico, si bien debemos realizar algunos ajustes en futuras implementaciones, lo hecho nos deja pensando acerca del rediseño no sólo del cuestionario sino también de los Trabajos Prácticos de las materias Álgebra I y Cálculo I, del primer año del Profesorado de Matemática. En base a la revisión de nuestra práctica docente, vemos que frecuentemente proponemos ejercicios en que las cuentas dan números lindos (resultados redondos) o donde se trabaja con intervalos reales cuyos extremos son a lo sumo números racionales, o nos conformamos con que se construyan tablas de valores con números enteros. Creemos que con estas acciones nos prestamos a contribuir al no reconocimiento de los irracionales como números, desaprovechando la oportunidad de trabajarlos a lo largo de toda la materia y no sólo cuando los tratamos como contenido específico a enseñar.

Referencias Bibliográficas

Brousseau, G. (1987). Rationels et décimaux dans la scolarité obligatoire, *Document pour les enseignants et pour les formateurs*, Université de Bordeaux, I.R.E.M. de Bordeaux. Francia.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématique, 2(1)*, 37-127.

Chrobak, R. (1998). *Metodologías para lograr aprendizaje significativo*. Ed. EDUCO. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén, Argentina

Douady, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d'apprentisage scolaire. *Recherches en didactique des mathématique, 1(1)*, 77-110.

Fischbein, Y., Jehiam, R., y Cohen, D. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceedings of the XVIII PME (vol. 2)*, 352-359). Lisboa, Portugal.

Montoro, V. y Ferrero, M. (2010) Comprensión del número real por parte de estudiantes de los últimos años de secundaria e ingresantes a la universidad. *Proyecto de investigación B159* no publicado. Secretaría de Investigación de la U. N. del Comahue. Bariloche. Argentina.

Romero, C. (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. *Enseñanza de las Ciencias, 14(1)*, 3-14.