CB-135

O OBJETO MATEMÁTICO TRIÂNGULO EM TEOREMAS DE REGIOMONTANUS: UM ESTUDO DE SUAS DEMONSTRAÇÕES MEDIADO PELO GEOGEBRA

Luiz Felipe Araujo Mod – Celina Aparecida Almeida Pereira Abar
luizfelipemod@gmail.com – abarcaap@gmail.com
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil

Núcleo temático: V
Modalidade: CB
Nível educativo: 4
Palavras-chave: Regiomontanus, Demonstração, Geometria, GeoGebra.

Resumo
Este trabalho é um recorte de uma pesquisa de Mestrado Acadêmico e tem como objetivo investigar o papel do GeoGebra como mediador em demonstrações de teoremas sobre triângulos de Regiomontanus (1436-1476), matemático cuja produção contribuiu especialmente no desenvolvimento da Trigonometria. No Livro I de sua obra De Triangulis Omnimodis Libri Quinque encontram-se teoremas cujas demonstrações envolvem construções de triângulos satisfeitas algumas condições dadas, contemplando conteúdos acessíveis para a Educação Básica. Na perspectiva das funções da demonstração, segundo Villiers, o Teorema 31 é analisado pela mediação dos movimentos dinâmicos do GeoGebra. Verifica-se a necessidade de percorrer os diferentes papéis da demonstração e a importância da utilização do GeoGebra como instrumento de investigação. A pesquisa, em seu desenvolvimento, pode indicar possibilidades da utilização de um legado da Matemática em atividades de sala de aula.

1. Introdução

Este trabalho apresenta dois recursos (construção e demonstração) utilizados para a compreensão de resultados matemáticos geométricos na exploração dinâmica de teoremas propostos por Regiomontanus, por meio do estudo e análise de suas demonstrações.

Johann Müller (1436-1476), mais conhecido por Regiomontanus, teve uma contribuição importante para a Astronomia e a Matemática, pois permitiu que a Trigonometria deixasse de ser apenas uma ferramenta da Astronomia e fosse compreendida como um ramo independente da Matemática (COOKE, 1997). Dentre seus trabalhos ressalta-se o *Epítome do Almagesto* e a obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*, que sintetiza o que se conhecia de trigonometria na Europa. Dividida em cinco livros, possui caráter introdutório

ISBN 978-84-945722-3-4

para matemáticos e astrônomos da época (HUGHES, 1967). Por se tratar de uma obra importante no desenvolvimento da Matemática e por abordar temas estudados na Educação Básica, faz sentido explorar alguns teoremas propostos nesta obra por meio de ferramentas de ensino disponíveis atualmente, neste caso, ambientes dinâmicos de Geometria.

O desafio de explicar a veracidade de um resultado específico pode despertar a curiosidade para a elaboração de uma demonstração quando a verificação empírica não for suficiente para motivar essa busca (VILLIERS, 2001) e os *softwares* dinâmicos de Geometria possibilitarem, a partir de verificações indutivas, a elaboração de conjecturas.

Utilizar recursos tecnológicos para introduzir problemas que envolvem demonstração podem contribuir para uma ruptura entre provas pragmáticas e provas intelectuais, ou seja, as elaboradas pela observação e as baseadas no rigor matemático (FERREYRA; CASTRO, 2016). Nesse aspecto, o GeoGebra é um recurso didático tecnológico para o ensino da Matemática, no qual é possível a criação de atividades e situações, permitindo a exploração e a elaboração de conjecturas por parte dos alunos, e a aprendizagem por descobrimento ou por experimentação (PARODI et al, 2016).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Brasil (PCN) destacam que “o conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores” (BRASIL, 1997, p. 30). Além disso, o conhecimento dos processos que levaram à estruturação dos conceitos matemáticos permite uma melhor compreensão da aprendizagem dos alunos.

A abordagem desta pesquisa não se resume em situar a Matemática no tempo e no espaço ou, ainda, em citar trechos da História da Matemática, pois entendemos que é necessário um diálogo entre educadores e historiadores da Matemática de modo a refletirem “sobre a possibilidade da construção de uma interface que contemple a significação dos objetos matemáticos historicamente constituídos” (SAITO; DIAS, 2013, p. 90).

2. Funções da demonstração

O fato de que os verbos: explicar, provar e demonstrar serem considerados, às vezes, como sinônimos pode-se tornar um obstáculo para investigações em torno do tema, e assim é necessário estabelecer entre eles uma distinção (BALACHEFF, 2000).

ISBN 978-84-945722-3-4

A explicação está situada no nível da pessoa que a produz, se expressa no seu discurso e pretende tornar inteligível a verdade de uma proposição por ela já adquirida. A explicação não se reduz necessariamente a uma cadeia dedutiva, podendo ser discutida, rejeitada ou aceita (BALACHEFF, 2000).

A passagem de explicação para prova é um processo no qual o discurso que assegura a validade de uma proposição muda de papel passando a ser aceito por uma certa comunidade em um dado momento. Este papel não é definitivo, podendo evoluir juntamente com os avanços dos saberes nos quais se apoia (BALACHEFF, 2000).

Sobre demonstração, Balacheff observa que "o tipo dominante de prova em Matemática tem uma forma particular. Trata-se de uma sequência de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras" (2000, p. 13 – tradução do autor).

No contexto das ideias de demonstração, segundo Balacheff, os professores de Matemática percebem que os alunos não compreendem sua necessidade, principalmente quando se trata de um fato visualmente observável e não reconhecerem a função da demonstração (VILLIERS, 2001).

Segundo Villiers (2001), a função tradicional da demonstração é a de verificação da validade das afirmações matemáticas, embora não seja necessária para convencer alguém de um resultado. Apesar de ser esta sua principal função, Villiers apresenta outras funções:

> **Verificação** (dizendo respeito à verdade da afirmação); **Explicação** (fornecendo explicações quanto ao fato de ser verdadeira); **Sistematização** (a organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas); **Descoberta** (descoberta ou invenção de novos resultados); **Comunicação** (a transmissão do conhecimento matemático); **Desafio intelectual** (a realização pessoal/gratificação resultantes da construção de uma demonstração). (VILLIERS, 2001, p. 32, grifo nosso).

Os matemáticos consideram a demonstração como sendo um desafio intelectual, como algo que proporciona gratificação e realização pessoal, que configura uma das funções estabelecidas por Villiers (2002).

3. Apresentação e análise do Teorema 31

O Livro I de Regiomontanus se inicia com conceitos de grandezas e razões, e depois sobre o estudo de triângulos retângulos, isósceles e escalenos, com algumas exceções de teoremas

ISBN 978-84-945722-3-4

como, por exemplo, aqueles que utilizam explicitamente o seno de um ângulo (HUGHES, 1967).

A exploração do Teorema 31 do Livro I com a utilização do GeoGebra revela a necessidade de uma demonstração e um caminho para visualizar um argumento justificado pela redução ao absurdo.

> If one of the two angles on the base of a triangle is obtuse, then a perpendicular drawn from the vertex angle to the base will fall outside the triangle. But if [one of the base angles] is a right angle, the perpendicular will coincide with the side adjacent to the right angle. If both [base angles] are acute, the perpendicular must remain within the triangle. (HUGHES, 1967, p. 71)

Como proposta desta pesquisa tem-se: sejam ΔABC um triângulo e r a reta perpendicular à reta suporte do lado BC passando pelo ponto A. Item a) Se o ângulo <B (ou <C) for obtuso, então r não interceptará o segmento BC. Item b) Se o ângulo <B (ou <C) for reto, então r será a reta suporte do lado AB (ou lado AC). Item c) Se os ângulos <B e <C forem agudos, então r interceptará o lado BC.

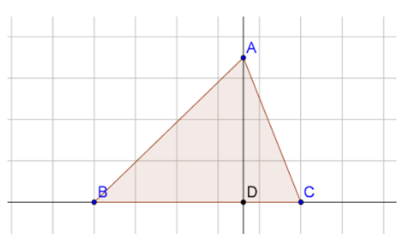
A construção no GeoGebra de um triângulo qualquer, de modo que os pontos B e C fiquem sobre pontos da malha, permite contemplar as hipóteses dadas no teorema.

Nas análises que seguem são indicados argumentos com base na versão de Hughes (1967) e com sua respectiva exploração mediada pelo GeoGebra.

Argumento 1: seja o ponto D a interseção da reta r com a reta BC. Então o ângulo <ADC será reto pela definição de perpendicularidade.

Construir a reta r perpendicular à reta suporte do lado BC com a ferramenta *reta perpendicular* e determinar o ponto D de intersecção de r com a reta suporte do lado BC, usando a ferramenta *intersecção de dois objetos* como na Figura 01 a seguir.

Figura 01 - Teorema 31 (Argumento 1)



Fonte: autores

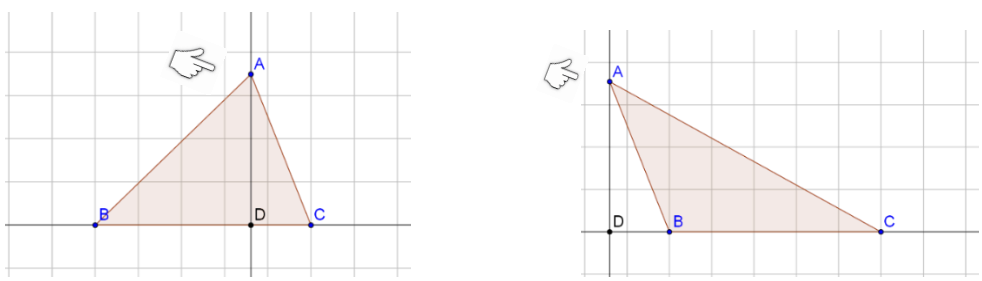
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Argumento 2: (Item a) suponha por absurdo que a reta r intercepta o segmento BC quando o ângulo <B é obtuso e D seja diferente de B e C. Como o ângulo reto <ADC é um ângulo externo do triângulo ΔADB, então deve ser maior que o ângulo interno oposto <ABD, que é obtuso. Chega-se ao absurdo, pois um ângulo reto não pode ser maior que um ângulo obtuso.

No GeoGebra não é possível fazer uma construção que contemple o enunciado feito por "absurdo", mas, pela movimentação do ponto A, pode-se fazer com que o ângulo <B fique obtuso como na Figura 02. Contudo, é possível colocar um ponto D' sobre o segmento BC e construir a reta AD' e o ângulo <AD'C com a legenda 90º.

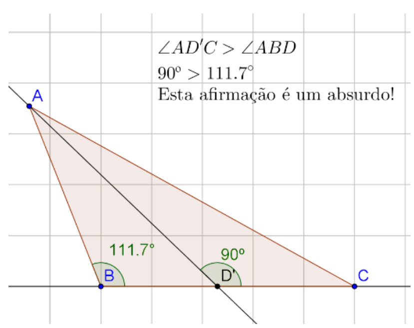
Nesta situação, na Figura 03, observa-se o absurdo indicado no Argumento 2. Um ângulo externo <AD'C, que é reto, ser maior que um dos ângulos internos opostos <ABD, que é obtuso.

Figura 02 - Teorema 31 (Argumento 2) A



Fonte: autores

Figura 03 - Teorema 31 (Argumento 2) B



Fonte: autores

Argumento 3: se o ponto D coincidir com o ponto B, os ângulos <ADC e <ABC serão iguais. Mas o ângulo <ADC é reto por construção e o ângulo <ABC é obtuso por hipótese.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Chega-se a um absurdo, pois um ângulo não pode ser simultaneamente reto e não reto (obtuso).

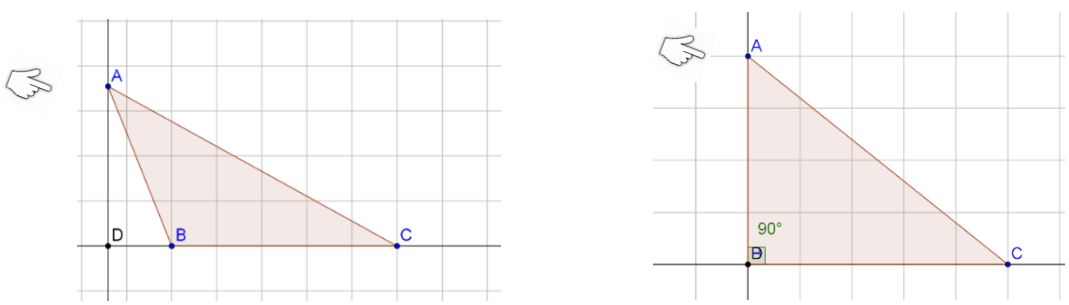
Argumento 4: se o ponto D coincidir com o ponto C, o ΔADB possuirá um ângulo obtuso e um ângulo reto. Assim, as medidas dos dois ângulos mencionados não somarão menos de dois ângulos retos, o que representa uma contradição. Eliminadas todas as possibilidades, a reta r não intercepta o segmento BC e está demonstrado o item a).

Argumento 5: (Item b) suponha por absurdo que a reta r não intercepta o segmento BC em B quando o ângulo <B é reto. Se o ponto D não pertencer ao segmento BC, a medida do ângulo externo formado pelo vértice D do triângulo ΔADB será igual à medida do ângulo interno oposto formado pelo vértice B, configurando um absurdo, pois o ângulo externo é necessariamente maior que o interno oposto.

Novamente não é possível obter uma construção que contemple o enunciado feito por “absurdo”. A malha quadriculada facilita para obter o ângulo <B reto com a movimentação do ponto A (Figura 04).

Utilizando um ponto D’ para indicar o ponto de intersecção da perpendicular com a reta BC (Figura 05), onde D’ não pertence ao segmento BC, nota-se o absurdo indicado no Argumento 5.

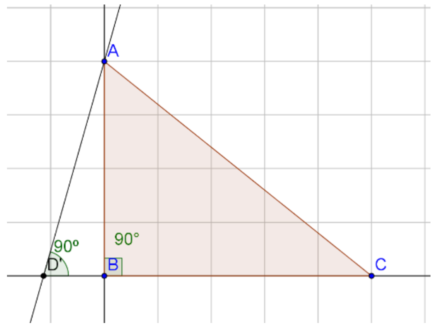
Figura 04 - Teorema 31 (Argumento 5) A



Fonte: autores

Figura 05 - Teorema 31 (Argumento 5) B

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Fonte: autores

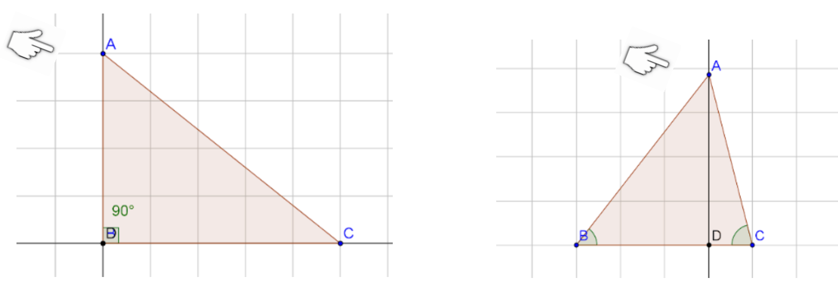
Argumento 6: se o ponto D pertencer ao segmento BC e for diferente de C, o ΔADB possuirá dois ângulos retos, configurando um absurdo, pois a soma das medidas dos ângulos deste triângulo será maior que dois ângulos retos.

Argumento 7: se o ponto D coincidir com o ponto C, então um ângulo agudo teria que ser um ângulo reto, contradizendo a definição de ângulo agudo. Eliminadas todas as possibilidades, a reta r será a reta suporte do lado AB e está demonstrado o item b.

Argumento 8: (Item c) suponha por absurdo que a reta r não intercepta o segmento BC, exceto talvez em B ou em C quando o ângulo <B é agudo. Se o ponto D coincidir com o ponto B ou ponto C, então seria um ângulo agudo que também é reto, contradizendo a definição de ângulo agudo.

Pela movimentação de A, pode-se fazer com que os ângulos <B e <C fiquem agudos como na Figura 06.

Figura 06 - Teorema 31 (Argumento 8)



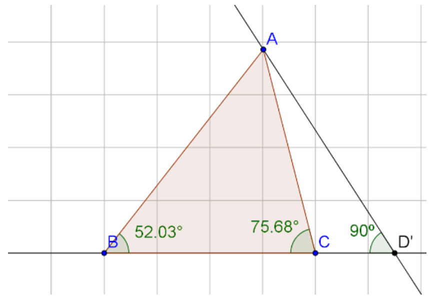
Fonte: autores

Argumento 9: se o ponto D não pertencer ao segmento BC, então o ângulo <ABC (ou o ângulo <ACB) seria um ângulo externo do ΔABD (ou ΔACD) e teria de ser maior que o ângulo interno oposto <ADB (ou <ADC). Assim, chega-se a um absurdo, pois um ângulo agudo não é maior que um ângulo reto. Eliminadas todas as possibilidades, a reta r interceptará o lado BC e está demonstrado o item c.

ISBN 978-84-945722-3-4

Utilizando um ponto D’ para indicar o ponto de intersecção da perpendicular com a reta BC (Figura 07), onde D’ não pertence ao segmento BC, nota-se o absurdo indicado no Argumento 9.

Figura 07 - Teorema 31 (Argumento 9)



Fonte: autores

Fica evidente no teorema que a função **verificação** não é suficiente para validar a conjectura estabelecida, pois, nos exemplos apresentados pela movimentação no *software*, não se chega a algum argumento que forneça uma explicação para a conjectura. Neste caso, as funções de **explicação** ou **sistematização** são necessárias para garantir a veracidade da conjectura.

4. Considerações finais

Este trabalho é resultado de uma pesquisa de Mestrado Acadêmico[iv] que se dedicou à análise de alguns teoremas do Livro I de Regiomontanus sobre a construção de triângulos, satisfeitas algumas condições dadas, e de onde emergiu a questão da pesquisa: “quais funções da demonstração se revelam nas situações geométricas dos teoremas de Regiomontanus sobre triângulos quando explorados no GeoGebra?”.

Verificou-se que o GeoGebra permite a exploração das diferentes funções da demonstração e possibilita uma forma de representação de resultados matemáticos por meio da visualização de novos casos ou na criação de outras possibilidades a serem exploradas. Outros teoremas de Regiomontanus foram estudados dinamicamente com a utilização do GeoGebra (MOD; ABAR, 2016), o que sugere uma estratégia didática interessante para ser explorada na prática docente. Conclui-se que a exploração da demonstração mediada pelo GeoGebra pode-se constituir em uma estratégia didática para o ensino de demonstrações em cursos de graduação, especialmente de Licenciatura em Matemática.

Referências bibliográficas

Balacheff, N. (2000) *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A. Tradução de: Pedro Gómes.

ISBN 978-84-945722-3-4

Brasil, (1997). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: MEC/SEF.

______, (1998). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Fundamental: Matemática.* Brasília: MEC/SEF.

Cooke, R. (1997). *The history of mathematics: a brief course***.** Burlington, VT: Wiley-Interscience.

Ferreyra, N.; Castro, N. (2010). *GeoGebra como punto de partida de un proceso de validación***.** https://seadiuncoma.files.wordpress.com/2010/03/061.pdf>. Consultado 27/09/2016.

Hughes, B. (1967) *Regiomontanus on Triangles.* Madison, Milwaukee and London: University of Winsconsin Press.

Mod, L. F.A.; Abar, C.A.A.P. (2016). *O GeoGebra como instrumento de investigação de teoremas de Regiomontanus.* In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo. <http://sbempe.cpanel0179.hospedagemdesites.ws/enem2016/anais/pdf/5909_2409_ID.pdf>. Consultado 14/102016.

ParodI, C., Ferreyra, N., Scarímbolo, M.D., Rechimont, E. (2009). *El trabajo conjetural con el uso del GeoGebra.* Disponível em: <http://www.cidse.tec.ac.cr/ciemac/memorias/6toCIEMAC/Ponencias/El_trabajo_conjetural_Parodi_Ferreyra.pdf>. Consultado 27/09/2016.

Saito, F.; Dias, M.S. (2013). *Interface entre História da Matemática e Ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI***.** Ciência & Educação, Bauru, v. 19, n. 1, p.89-111.

Villiers, M. D. (2001). *Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad***.** Educação e Matemática - APM, Portugal, n. 62, p. 31-36.

______(2002). *Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica.* Trad. Rita Bastos. ProfMat, 10, Visue, Portugal. Actas... (cd-rom) Visue, Associação de Professores de Matemática. Disponível em: < http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2006.2/esp00000/arquivos/profmat2.pdf>. Acesso em: 09 mar. 2016.

ISBN 978-84-945722-3-4