

## PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN INGENIERÍA, BASADA EN LA MODELACIÓN MATEMÁTICA.

John Fredy Morales García – Lina María Peña Páez  
[sigma818@hotmail.com](mailto:sigma818@hotmail.com) – [lpna@usbbog.edu.co](mailto:lpna@usbbog.edu.co)  
Universidad de San Buenaventura Bogotá, Colombia

Tema: Enseñanza Experimental de la Matemática.

Modalidad: MC

Nivel educativo: Terciario – Universitario

Palabras clave: modelación matemática, cálculo diferencial, ingeniería, enseñanza-aprendizaje

### Resumen

*Hoy en día, a pesar de la inclusión de las herramientas tecnológicas en el aula, los estudiantes de ingeniería, no reconocen la importancia de la matemática que estudian en sus primeros cursos de cálculo, ni comprenden el alcance que en sus carreras tendrá, cuando la utilicen como una herramienta para el análisis de situaciones reales y propias de la ingeniería. Por otro lado, el quehacer docente, parece estar muy alejado de las teorías propuestas al respecto. Las clases de matemáticas y los libros utilizados para orientar los cursos, no asumen el modelamiento de situaciones como su principal objetivo. Por lo anterior, en este trabajo presentamos cuatro modelos en proceso de implementación que pretenden mostrar cómo la modelación matemática puede ser concebida como una herramienta didáctica para la enseñanza del cálculo diferencial e integral en la formación de ingenieros, de tal manera que los resultados obtenidos brinden una base teórica que permita re-evaluar los contenidos programáticos de estos cursos y así, aproximar a los estudiantes a su área específica de conocimiento.*

### Contexto institucional frente a las directrices nacionales

Las teorías y métodos propios de la Didáctica de las Matemáticas, así como sus diferentes áreas de estudio, respaldan el planteamiento de proyectos de investigación encaminados a la construcción o mejoramiento de modelos para la enseñanza y aprendizaje. En este marco, parece pertinente plantear una propuesta metodológica que implique el cambio en la forma tradicional de orientar los cursos de cálculo diferencial e integral en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Buenaventura, sede Bogotá (USB).

En este mismo sentido, el quehacer docente, en la realidad, continua estando muy alejado de las teorías abordadas desde la Didáctica de las Matemáticas, en particular al objeto de estudio que constituye la modelación matemática. Las clases y los libros utilizados para orientar los cursos, no asumen la modelación de situaciones reales en el

contexto de la ingeniería, como su principal fin. Por otra parte, la inclusión de las TIC para la aplicación y apropiación de los conceptos, ha sido incorporada a la clase sólo como apoyo al docente y no como una herramienta que les permita a los estudiantes evidenciar la importancia de éstas para modelar con fundamentos matemáticos las situaciones reales propias de la ingeniería. Sólo cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones que les son propias a su quehacer profesional, comienzan a reconocer la necesidad y la importancia de sus cursos de ciencias básicas.

Bajo esta perspectiva, el proyecto planteado desde Ciencias Básicas en la Facultad de Ingeniería de la USB busca que la modelación matemática (MM), además de ser el método de la enseñanza del cálculo diferencial e integral, nos permita, en un primer momento, re-estructurar los contenidos programáticos de los cursos de cálculo, planteando modificaciones sustanciales a los que actualmente direccionan la enseñanza de los mismos. De esta forma esperamos que la nueva metodología de estudio constituya a la matemática como una herramienta eficaz que le permita a los estudiantes de ingeniería de la USB aproximarse a los aspectos disciplinares propios de su campo (sonido, aeronáutica, mecatrónica, electrónica, sistemas y telecomunicaciones).

La pertinencia de plantear este proyecto está dentro del marco de las discusiones dadas en los foros convocados por la Asociación Colombiana de facultades de ingeniería (Acofi) en el 2006, las que posteriormente fueron presentadas en el libro: *El ingeniero colombiano del año 2020. Retos para su formación*, donde se plantean tres características básicas del currículo de ingeniería, así como las competencias esenciales de los futuros ingenieros, tales como: “capacidad para *modelar* fenómenos, capacidad para *resolver problemas mediante la aplicación* de las ciencias naturales y las matemáticas, utilizando un lenguaje lógico simbólico” (2007, p.52, las cursivas son nuestras).

Las reflexiones y discusiones llevadas a cabo en los foros preparatorios y la XXVI reunión Nacional, que contó con la participación de las facultades de Ingeniería de las universidades colombianas y con invitados internacionales, llevaron al planteamiento de preguntas en torno a las competencias necesarias del ingeniero del 2020. Destacamos una postura, que consideramos pertinente para nuestro objetivo, que rescata la actualidad de una: “...propuesta de incorporación de nuevos modelos pedagógicos

centrados en el trabajo de los estudiantes (...) Se precisa una educación menos orientada a la información y más a la construcción de unos marcos conceptuales, con atributos como la fortaleza en ciencias básicas,...” (2007, p.238). Las conclusiones allí sugeridas, entre otras, hacen referencia al ámbito curricular, donde “el estudiante es el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje”, y por tanto son apremiantes “la revisión de los currículos, la formación sólida en matemáticas (...), el conocimiento y habilidades en las nuevas tecnologías [y] los nuevos contexto de aprendizaje” (2007, p.273), entre otras.

En suma, consideramos que dentro de esta perspectiva del ingeniero del año 2020, es evidente y absolutamente necesario reformar el currículo actual, para que hoy en día, la formación del estudiante de ingeniería pueda estar a la altura del perfil profesional y personal del ingeniero del futuro.

### **La modelación matemática concebida como una herramienta didáctica**

Los estudios preliminares en torno a la modelación matemática en Iberoamérica son extensos. La revisión de los autores que se han dedicado a estudiar la MM, nos remitió a los documentos producto de las investigaciones de autores como Camarena, en México, Bassanezi, Biembengut y Hein, en Brasil, y a nivel nacional el trabajo de Villa-Ochoa y la red colombiana de modelación matemática. Tales estudios nos han contribuido, inicialmente, con la concepción de MM que vamos a adoptar, en la que a la luz de la convergencia encontrada en las diferentes concepciones expresadas por los autores, la entenderemos como *una herramienta didáctica*, en el sentido de ser un medio que tiene una intención, así la MM, afirma Biembengut, según las investigaciones, representa un “avance en la enseñanza de las matemáticas en clase, porque ésta deja de ser una mera transmisión de técnicas de resolución (del tipo: siga el modelo) y pasa a ser presentada como herramienta o estructura de otra área del conocimiento” (2004,p.123) *para* la enseñanza-aprendizaje de la matemática, que en nuestro caso particular, está referido al cálculo.

Bassanezi y Biembengut llaman “**Modelación Matemática** al método de enseñanza-aprendizaje que utiliza procesos de modelización en cursos regulares.” (1997, p.14). Para Camarena “la modelación matemática se concibe como el proceso cognitivo que se

tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un evento u objeto del área del contexto” (2011,p.7); por su parte el investigador Villa reconoce la importancia de la MM y manifiesta que: “la modelación matemática, vista como *proceso*, implica una serie de acciones o fases que hacen que la construcción o interpretación de un modelo no se efectúe de manera instantánea en el aula de clase; esas acciones o fases se conocen en la literatura como *ciclo de la modelación*” (2009, p.5).

### **Surgimiento de la propuesta**

A finales del tercer corte del periodo académico 2012-II, a los estudiantes de algunos de los cursos de cálculo diferencial de la facultad de ingeniería de la USB, se les planteo como proyecto final el diseño y la definición funcional de la vista frontal de un “esfero carro” (anexo 2), haciendo uso de algún software. Dentro del contenido programático que actualmente se desarrolla en la USB, los estudiantes son formados en el uso del software MATLAB. Esto hace que los profesores que desarrollan los cursos usen únicamente tal software para resolver 4 laboratorios propuestos. Ocasionalmente, algunos profesores, expanden el uso de MATLAB para la resolución de problemas planteados dentro de las sesiones de clase. El posterior análisis y evaluación de los resultados obtenidos por ellos, develaron fuertes inconsistencias en muchos de los aspectos conceptuales abordados a lo largo del semestre (dentro y fuera de las sesiones de clase), dado que los estudiantes no tuvieron posibilidades reales para dar buena cuenta del problema asignado.

Ahora bien, estos antecedentes nos llevaron a plantear el proyecto de investigación que a la fecha, en sus primeros avances, socializamos en este documento. Como lo enunciamos, nuestra propuesta metodológica toma como base fundante la MM, para ello realizamos una primera fase que hemos denominado “sensibilización de los estudiantes”. En ella, consideramos cuatro modelos (pensados y llevados al aula por los profesores) que acercan a los estudiantes a la MM, escenario que Biembengut y Hein (1997) han denominado pre-modelación y que implica el desarrollo de ciertas estrategias, como la presentación de los contenidos del programa, a partir de modelos conocidos; la aplicación de proyectos establecidos por otros autores; y finalmente, la intervención de los estudiantes buscando ejemplos a partir de la realidad. A partir del

análisis de la pre-modelación sugerida por Biembengut, nosotros (como investigadores), hemos verificado y potenciado todos y cada uno de los tres pasos descritos con el planteamiento modelo: “esfero-carro” (en el 2012).

### **Propuesta metodológica de enseñanza-aprendizaje basada en MM**

Somos conscientes de la dificultad de instaurar un nuevo método de enseñanza-aprendizaje, pero así mismo, reconocemos la importancia de tomar como punto de partida el contexto, es decir, los modelos que se encuentran en la realidad, para la formación de los ingenieros. En este mismo sentido, asumimos el compromiso de iniciar un cambio en la perspectiva tanto de los profesores como de los estudiantes en la formación matemática de los futuros ingenieros. Tal cambio debe ser gradual y esencialmente debe tomar como referencia el contenido programático de los cursos de cálculo diferencial e integral, por tanto, elegimos cuatro modelos, tales modelos se entienden como las situaciones en contexto que fueron propuestas a los estudiantes, dentro de la fase de sensibilización entre profesores y estudiantes, que le dan bases a la propuesta metodológica que es el verdadero objeto de estudio de la investigación principal. Los modelos a los que hacemos alusión se desarrollaron así: avión con los estudiantes del curso de matemáticas básicas (pre cálculo), esfero-carro y logo del mundial con los cursos de cálculo diferencial y, caras con el curso de cálculo integral, que se implementaron bajo la perspectiva de la MM y se ajustaron al contenido programático.

En los anexos 1 al 4 encontramos la descripción de los mencionados modelos, con sus principales resultados. Ahora bien, para Biembengut y Hein, la implementación de la MM como método de enseñanza y aprendizaje requiere de la siguiente secuencia: “justificación de proceso, elección del tema, desarrollo de contenido programático, ejemplos análogos-fijación de conceptos y evaluación y convalidación de los resultados” (1997, p.6) En investigaciones posteriores Biembengut y Hein (2004), afirman que la MM como método de enseñanza, puede abordarse desde dos puntos de vista, como enseñanza o como investigación, dentro del primer abordaje encontramos que puede llevarse a cabo desde dos perspectivas a saber: elaborar un método y ajustarlo a la enseñanza, o, elegir un modelo y adaptarlo al desarrollo del contenido programático. Nosotros nos inscribimos en el primer abordaje y en su segundo aspecto,

sin embargo, allí se consideran 7 etapas, que nosotros, en la que denominamos fase de sensibilización con los estudiantes, no podemos abordar en su totalidad, por lo que presentamos los resultados siguiendo las 5 etapas que hemos citado en el presente documento. Presentamos a continuación una tabla en la que se evidencia el seguimiento de la secuencia propuesta con relación a nuestras cuatro modelos en los cursos de matemáticas básicas y calculo diferencial e integral.

**Tabla 1.** Los cuatro modelos y su respectiva asociación con las fases de la secuencia sugerida por Biembengut y Hein.

Fases	Situaciones			
	Avión	Esfero-carro	Logo-mundial	Caras
<b>Justificación de proceso</b>	Como habitualmente se hace en la USB, se socializó el Contenido Programático con los cursos. Posteriormente, se justificó la conveniencia de abordar el estudio de tales contenidos contextualizados dentro de situaciones reales.			
<b>Elección del tema</b>	Dado que nuestros estudiantes no han sido formados bajo la MM, en este primer “experimento” el tema fue elegido por los docentes, teniendo en cuenta las directrices del contenido programático.	El profesor sugirió la elección del tema, basado en los intereses de los estudiantes de los respectivos cursos de cálculo, de tal manera que los estudiantes reconocieran en ellos, buenas posibilidades para poder abordar con suficiente “libertad y versatilidad” los contenidos programáticos. En el caso del esfero-carro, los estudiantes optaron por el modelo, de tal manera que en esta ocasión lo pudieran estudiar con mucha más profundidad. El logo del mundial y la posibilidad de poder definirlo funcionalmente, fue un modelo que tuvo gran aceptación entre los estudiantes. Finalmente, los estudiantes pensaron en la posibilidad de mandar a construir los perfiles de caras conocidas (la cara del profesor), para así poder abordar el estudio de los contenidos programáticos con algún objeto que pudiera ser comparado en tiempo real.		
<b>Desarrollo de contenido programático</b>	Se abarcaron las funciones lineales, cuadráticas y las relaciones (circunferencia, elipse)	En varias clases, se presentaron las propiedades de los límites, límites que incluyen funciones trigonométricas, la derivada como una función, métodos de derivación.	Antiderivadas, sumas de funciones Riemman, técnicas de integración, área entre curvas, aplicaciones de la integral.	
<b>Ejemplos análogos - fijación de conceptos</b>	En el desarrollo de las clases que precedieron al trabajo de la construcción en Matlab y Geogebra de las 4 situaciones, los estudiantes resolvieron situaciones en las que dado un modelo propuesto en su libro de texto debían contextualizar los conceptos matemáticos en los modelos dados. Por			

ejemplo, en el contenido programático encontramos clases dedicadas a examinar dominio, rango, intervalos de crecimiento y decrecimiento, inversa, intercepto con los ejes, máximos y mínimos, lo que se decidió fue partir del modelo que el libro proporcionaba y antes de explicar los conceptos mencionados se pidió plantear el modelo matemático que resolvía la situación ,luego realizar la gráfica en Matlab y finalmente, interpretar y analizar a partir de ésta el significado de estos conceptos en la situación real del problema, se hizo mucho énfasis en que escribieran sus respuestas no sólo en notación matemática sino que escribieran frases con sus propias palabras que dieran cuenta de lo que significaban en el modelo real. Por otro lado, se permutaron los modelos en tres los cursos, es decir, que el grupo que trabajó inicialmente con el esfero-carro, posteriormente trabajó el modelo del logo del mundial.

<b>Evaluación y convalidación de los resultados</b>	En este caso la validación de los resultados fue fácil de constatar por los propios estudiantes dado que el plano del avión que produce Matlab debía ser igual al plano que les entregó al inicio de la actividad.	El proceso de evaluación de los resultados obtenidos por los diferentes grupos se realizó de la siguiente manera: una vez cada grupo tenía su objeto definido funcionalmente, debían comparar sus resultados con los obtenidos por algún otro grupo de compañeros. Finalmente debían pronunciarse (decidir cuál de los modelos estaba mejor desarrollado), frente a las condiciones particulares de cada modelo. Es decir, debían verificar si los resultados obtenidos si desarrollaban o no los contenidos programáticos, además, debían reconocer la buena aproximación a los objetos reales, es decir, al esfero-carro real al logo real y a las caras reales.
---	--	--

### Consideraciones finales

Más que conclusiones, en este documento, queremos presentar los avances y resultado de esta primera etapa de sensibilización con los docentes y estudiantes, así mismo, nos parece este espacio pertinente para abordar la importancia que tiene el uso de software (Matlab y Geogebra), para el desarrollo de esta investigación. Es un hecho cierto que “la incorporación de las nuevas tecnologías electrónicas de la información y la comunicación, ya sea como una herramienta de trabajo, como apoyo en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje o como un medio por sí mismo” (2006, p.168), regulan el proceso de enseñanza-aprendizaje. Más aún, si de lo que se trata, como en nuestro caso, es formar futuros ingenieros que deben ser capaces de actualizar sus conocimientos, dada la forma como avanzan exponencialmente los adelantos científicos y tecnológicos en la sociedad actual.

Creemos que los modelos abordados fueron pertinentes, no solo porque mantuvieron el interés de los estudiantes durante todo el tiempo que se trabajaron, sino porque varios profesores que no hacen parte de esta investigación, reconocieron su valor y han manifestado su interés en vincularse (desde sus dominios disciplinares), con el proyecto, de tal manera que puedan apartar de una manera más eficaz al desarrollo de una propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo diferencial e integral basada en la modelación matemática, para los programas de ingeniería de la universidad de San Buenaventura sede Bogotá.

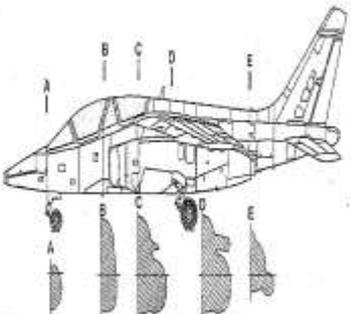
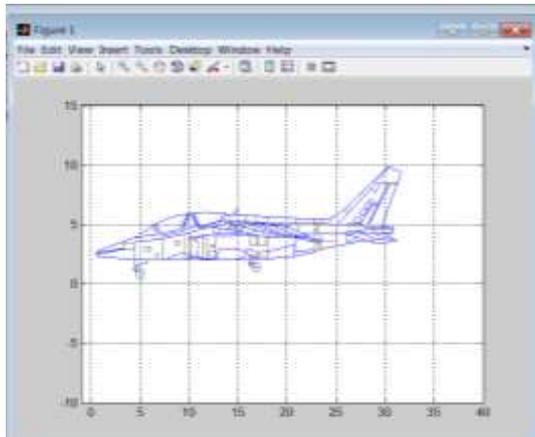
## Referencias

- Acofi (2007). El ingeniero colombiano del año 2020. Retos para su formación. Recuperado de [http://acofi.comunidadpmb.org/opac\\_css/doc\\_num.php?explnum\\_id=13](http://acofi.comunidadpmb.org/opac_css/doc_num.php?explnum_id=13)
- Bassanezi, R. C. y Biembengut, M. S. (1997) Modelación Matemática: Una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. *NÚMEROS Revista de didáctica de las matemáticas* 32, 13-25.
- Biembengut, M. S, Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16, 105-125. Recuperado de <http://www.recomem.com.co/archivos/actividades/40516206.pdf>
- Biembengut, M. S, Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: Métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. Recuperado de [http://matesup.usalca.cl/modelos/articulos/modelacion\\_mate2.pdf](http://matesup.usalca.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf)
- Camarena, P. (2006). La matemática en el contexto de las ciencias en los retos educativos del siglo XXI. *Científica*, 10, 4, 167-173. Recuperado de [http://www.cientifica.esimez.ipn.mx/volumen10/V10N4\\_167\\_173.pdf](http://www.cientifica.esimez.ipn.mx/volumen10/V10N4_167_173.pdf)
- Camarena, P. (2011) La matemática en el Contexto de las Ciencias y la modelación. Recuperado de [http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii\\_ciaem/xiii\\_ciaem/paper/viewFile/2716/1178](http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2716/1178)
- Villa, J. A. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista virtual Universidad Católica del Norte*, 27. Recuperado de <http://revistavirtual.ucn.edu.co/>

## ANEXOS

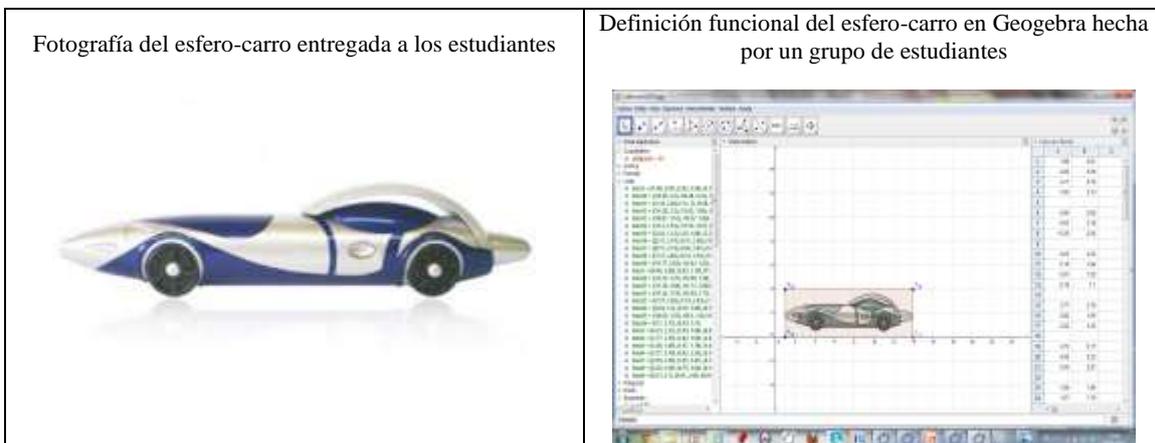
### Anexo 1. Modelo del avión

**Avión:** Se organizaron grupos de 3 estudiantes. A cada uno se le asignó el plano de un avión. A continuación los estudiantes lo cuadrícularon con los ejes y encontraron las parejas ordenadas con las que posteriormente determinaron las funciones que modelaban el avión. Con esta información digitaron el código en el software Matlab que mostraría al final el mismo plano del avión definido funcionalmente.

<p>Plano del avión entregado a los estudiantes</p> 	<p>Reproducción a mano del avión hecha por un grupo</p> 
<p>Fracción del código en matlab del avión hecha por un grupo de estudiantes</p> <pre> 1 ss 2 - syms x y 3 - xm=[0.8 4.6]*s1 4 - ym0.297297.*x+2.56218 5 - plot (x,y) 6 - hold on 7 - xm=[0.8 4.6]*s2 8 - ym2.26486-0.0010011.*x 9 - hold on 10 - plot (x,y) 11 - xm=[0.7 3.4]*s3 12 - ym0.149149.*x+2.4963 13 - hold on 14 - plot (x,y) 15 - xm=[0.7 3.4]*s4 16 - ym0.149149.*x+2.3963 17 - hold on 18 - plot (x,y) 19 - ym linspace (2.3, 2.8, 100) %s 20 - xm=0 21 - hold on 22 - plot (x,y) 23 - ym=2.5136                 </pre> <pre> 24 - w=0;0; 25 - w=0;0; 26 - b=-1; 27 - w=linspace (w+(b-1),w,101); 28 - w=linspace (w+(b-1),w,101); 29 - w=linspace (w+(b-1),w,101); 30 - hold on 31 - plot (x,yp,w,wy) 32 - ym linspace (2.3, 2.8, 100) %s 33 - w=0;0; 34 - hold on 35 - plot (x,y) 36 - ym linspace (2.3, 4.5, 100) %s 37 - ym=3; 38 - hold on 39 - plot (x,y) 40 - w=0;0; 41 - ym linspace (1.6, 3.5, 100) 42 - hold on 43 - plot (x,y) 44 - ym linspace (3.4, 4.5, 100) %s 45 - ym=3; 46 - hold on                 </pre>	
<p>Imagen del avión construido en matlab por un grupo de estudiantes</p> 	

**Anexo2. Modelo del esfero-carro e imagen del esfero-carro definido funcionalmente en Geogebra**

**Esfero-carro y logo del mundial:** se organizaron en grupos de 4 estudiantes. Los grupos debían buscar en internet fotografías (en vista frontal) del esfero-carro y del logo del mundial (que se les presento de forma física en las sesiones de clase). Posteriormente, los estudiantes eligieron el software Geogebra, el cual les permitió definir funcionalmente las características particulares que se veían en las fotografías del esfero-carro y del logo del mundial. Luego, debían escoger el trabajo de algún otro grupo y compararlo con el suyo, de tal manera que finalmente fueran capaces (todo el curso) de decidir cuál había sido la mejor definición funcional del esfero-carro y del logo del mundial. En otras palabras, cuál era el mejor modelo.



**Anexo 3. Modelo del Logo del mundial y logo del mundial definido funcionalmente en Geogebra**



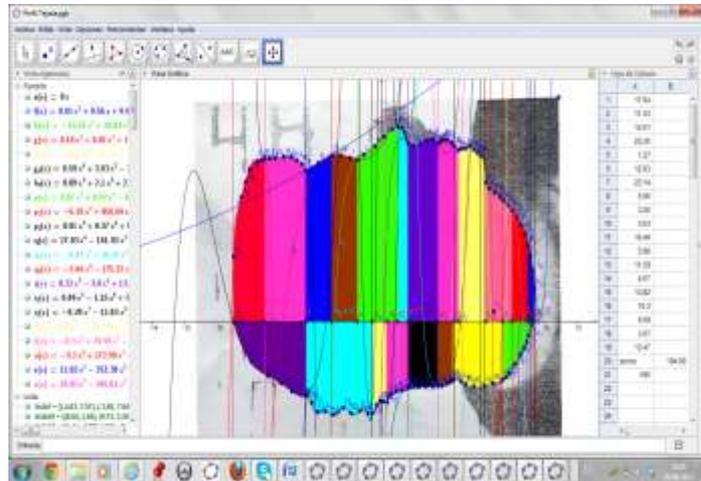
**Anexo 4. Fotos de las caras y las caras resueltas en Geogebra.**

**Caras:** la organización de los grupos se dio de la misma manera que en las dos situaciones anteriormente descritas. El objetivo conceptual que se perseguía, no era sólo la definición funcional de la cara sino que también los grupos debían determinar el área de la base de la cara. Aquí, consideramos muy importante aclarar que los resultados que obtenía cada grupo, además de ser comparados con los de sus grupos pares, debían ser verificados con el objeto concreto.

Fotografía de la cara de perfil entregada a los estudiantes.



Definición funcional de perfil. Aproximación al área de la cara por integrales. Trabajo hecho en Geogebra por un grupo de estudiantes.



Fotografía de la cara del niño entregada a los estudiantes.



Definición funcional de la cara del niño. Aproximación al área de la cara por integrales. Trabajo hecho en Geogebra por un grupo de estudiantes.

