CB-35

¿EL PRODUCTO NO ES MÁS GRANDE QUE LOS FACTORES?

Myrian Luz Ricaldi Echevarria
myrianluz@hotmail.com
San Ignacio de Recalde School. Perú.

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: Comunicación breve.
Nivel educativo: Seleccionar uno de los siete niveles considerados
Palabras clave: multiplicación, números racionales, TAD.

Resumen

El presente escrito es una experiencia realizada con estudiantes de 6to grado de primaria en una institución educativa particular de la ciudad de Lima, quienes habían aprendido al multiplicar en el campo numérico de los números naturales y tenían la idea fuertemente arraigada que el producto era un valor mayor a los factores. Sin embargo, en el recorrido del último grado del nivel primario se encontraron que este conocimiento generalizado no era correcto. Se generó confusión cuando trabajaban con números enteros y fracciones y, comprobaban que el producto no era más grande que los factores. Lo que a continuación se comparte es la experiencia didáctica propuesta para superar esta limitación conceptual cuando ampliaban los campos numéricos. Al mismo tiempo, se presenta el análisis de algunos textos en relación al tratamiento de la multiplicación en diversos conjuntos numéricos. La pregunta de investigación fue ¿Cómo generar el cambio conceptual relacionado a que el producto de dos números racionales no siempre es mayor que sus factores? El marco teórico que sustenta la propuesta es la teoría antropológica de lo didáctico.

Introducción

La enseñanza escolar tiene la intención de posibilitar el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Por tanto, se planifican y diseñan actividades que buscan producir transformaciones en los conocimientos. Las posiciones constructivistas indican que las transformaciones se producen como resultado de la interacción entre el individuo (estudiante) y el objeto de conocimiento (saber matemático). Al mismo tiempo, se debe tener en cuenta que los estudiantes no se presentan como cajas vacías, ellos tienen todo un cúmulo de conocimientos de sentido común que se tiene que considerar cuando se elaboran secuencias didácticas.

ISBN 978-84-945722-3-4

En el contexto de la presente propuesta se busca transitar desde concepciones que generalizan procedimientos y propiedades, dados como válidos en determinados campos numéricos, a la comprensión reflexiva que los métodos y resultados tienen en determinados escenarios numéricos y que los cálculos se reinterpretan según las características de los números y de las propiedades de las operaciones. Esto implica una práctica reflexiva sobre las operaciones que trasciende la simple aplicación de algoritmos.

Antecedentes

La multiplicación ha sido un tema ampliamente discutido e investigado debido a las dificultades que se evidencian en su aprendizaje (Chung & Lew, 2007; Irwin, 2004). Es más su estudio ha involucrado no solo a educadores matemáticos, sino también a psicólogos tales como Piaget (1985, 1987 citado en Irwin, 2004) quien afirmó que la multiplicación es más compleja que la adición porque involucra cálculos implícitos.

Asociado al tema de la presente propuesta, se encontraron reportes en torno al tratamiento de la multiplicación de fracciones los mismos que a continuación detallamos: Es frecuente que los estudiantes del nivel secundario apliquen la adición de fracciones en situaciones contextualizadas, y sin embargo no reconozcan la estructura multiplicativa asociada al razonamiento proporcional (e.g., Karplus, Pulos, & Stage, 1983). Al mismo tiempo, muchos de los errores que se evidencian en la multiplicación de fracciones están asociados a la aplicación del pensamiento aditivo en los procesos de multiplicación (Karplus et al., 1983). Por tanto, la aplicación rutinaria de algoritmos para multiplicar y dividir no son suficientes para desarrollar una profunda comprensión del pensamiento proporcional y su relación con el significado de los conceptos, propiedades y relaciones vinculados a la multiplicación de fracciones.

Problemática

La estrategia más frecuente para introducir el estudio de la multiplicación es la de mostrar la multiplicación como una forma de abreviar la suma, cuando los sumandos son todos iguales. Sin embargo, este tipo de mirada deja escondido elementos clave que permiten relacionar este tipo de situaciones con los casos más simples de proporcionalidad directa (Vergnaud, 2009).

A medida que se avanza en el grado escolar los estudiantes se enfrentan a situaciones de multiplicación donde no es posible la interpretación de suma de sumandos iguales, y por

ISBN 978-84-945722-3-4

tanto, se hace necesario un cambio conceptual que permita una buena comprensión de las relaciones entre las cantidades involucradas.

Ante esto nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo generar el cambio conceptual relacionado a que el producto de dos números racionales no siempre es mayor que sus factores?

Marco teórico

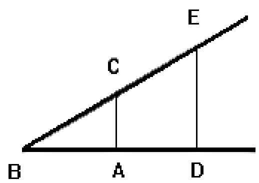
Este trabajo se enmarca dentro del enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico,
el cual plantea que los saberes no existen en el vacío, sino que se enmarcan en un momento histórico dado y en un contexto social determinado ligado a ciertas instituciones. Es decir, las relaciones personales de un sujeto con un saber están inmersas dentro de las relaciones institucionales que el sujeto establece con una institución dada. En este escrito se comparte los siguientes planteamientos: Los conceptos se forman a lo largo de un periodo de tiempo y adquieren sentido en la medida que se relacionen con otros conceptos. Una sola situación no basta para instalar un concepto, son necesarias varias situaciones para que un concepto funcione en sus diversos aspectos. El hecho didáctico no puede ser explicado por el estudio aislado de cada uno de sus componentes, se hace necesario el análisis del "sistema didáctico" (Chevallard, 1998), formado por el profesor-alumno-saber, y el contexto en el que el hecho didáctico se produce. Por lo anterior, nuestra propuesta se focaliza en el análisis epistemológico del saber: multiplicación, el análisis de un libro de texto para dos grados y la secuencia didáctica de algunas tareas.

El objeto de estudio: La multiplicación

En el libro VII de Los Elementos, Euclides define M x N como M veces N, donde M y N son números que representan respectivamente M veces y N veces una unidad. (Olfos, 2011). Por otro lado, en la metafísica de Aristóteles se llama multiplicidad a aquello que es divisible en partes no continuas y magnitud a aquello que es divisible en partes continuas. Para Euclides en el marco de la metafísica de Aristóteles, el uno es la medida de alguna multiplicidad, y el número, la multiplicidad de la medida.

En 1637 Descartes extiende el concepto de multiplicación a magnitudes homogéneas en el contexto de la proporcionalidad, usando como unidad de medida un trazo cualesquiera. Así en la siguiente figura sea AB la unidad y que sea preciso multiplicar BD por BC:

ISBN 978-84-945722-3-4



Unimos los puntos A y C, luego trazamos DE paralelo a CA, siendo BE el resultado de esta multiplicación. Es decir, multiplicar es encontrar un número que es a uno de los factores, como el otro factor es a la unidad (Gilberto Obando, Vasco, & Arboleda, 2013; Obando Z., 2015). En el caso de nuestro ejemplo: $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$

Algunos documentos curriculares como el del Japón definen la multiplicación como el valor de la medida que equivale al valor de la unidad, esta definición también es válida cuando la medida y el valor de la unidad son decimales o fracciones.

Debemos precisar que la aproximación a la multiplicación como suma de sumandos iguales tiene sustento en la axiomática de Peano, en donde la multiplicación

$x \cdot y$ es definida a partir de:

(1) $x \cdot 1 = x$ (2) $x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x$

Es decir, multiplicar un número x por 1 no lo altera. Y si sabemos multiplicar todos los números naturales x por y, también sabemos multiplicarlos por y +1. Por inducción podemos multiplicar cualquier x por y. Esta definición reduce la multiplicación a una suma donde *x* se repite *y* veces como sumando. Sin embargo, no da cuenta de las formas de razonamiento típicamente multiplicativas presentes en situaciones de proporcionalidad directa en las cuáles existen al menos dos cantidades variables la variación conjunta de dos o más cantidades, para las cuales, la variación en una de ellas condiciona el proceso de variación en la otra (Obando Z., 2015).

Es importante precisar que operar con números decimales incluye un cambio en el objeto de estudio, esto implica redefinir la unidad de medida o unidad de conteo lo cual va más allá de la representación.

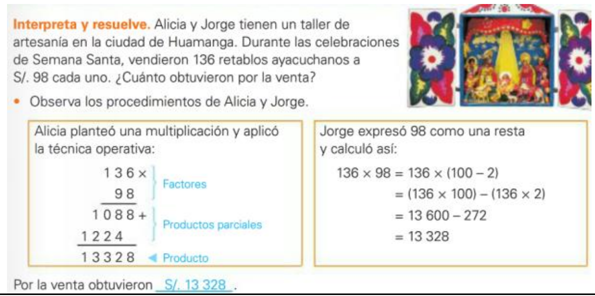
Tratamiento del tema en textos escolares:

A continuación un paralelo entre los textos de 6to grado de primaria y 1ro de secundaria en relación al tratamiento de la multiplicación en los números naturales, enteros y racionales.

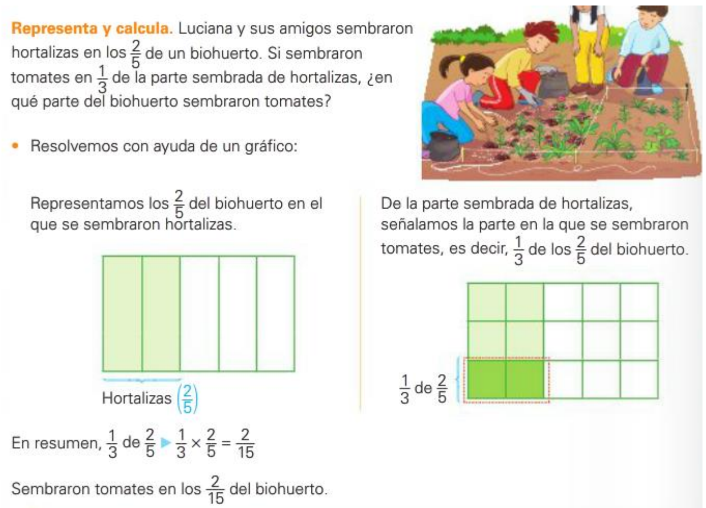
Tabla 1

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Situaciones iniciales en el libro Matemática 6 primaria. Editorial Santillana

<table>
<tr><th></th><th>Tipo de situación</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Números naturales</td><td>Multiplicación de números naturales en situaciones cotidianas.
Aplicación de la técnica operativa de la multiplicación.
Propiedades para resolver situaciones diversas.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Números racionales</td><td>Modelación a través de gráficos.

Aplicación de técnica operativa.

Resolución de problemas.</td><td>

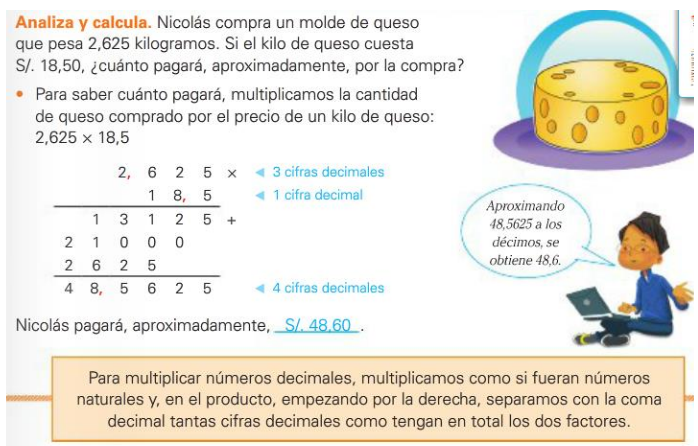

</td></tr>
</table>

Tabla 2

Situaciones iniciales en el libro Matemática 1 secundaria. Editorial Santillana

Tipo de situación	Ejemplo

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Números enteros

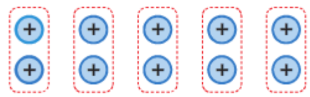
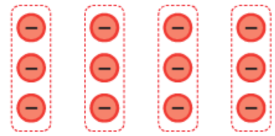
Regla de signos para multiplicar números enteros.

Resolución de problemas.

Propiedades de la multiplicación

Operaciones combinadas.

Al multiplicar números enteros se pueden presentar estos casos:

Factores de igual signo	Factores de diferente signo
Por ejemplo: (+5)(+2) 5 grupos de 2 fichas positivas.  En total hay 10 fichas positivas. $(+5)(+2) = +10$	Por ejemplo: (+4)(–3) 4 grupos de 3 fichas negativas.  En total hay 12 fichas negativas. $(+4)(-3) = -12$

El producto de dos números enteros de **signos iguales** es **positivo** y el producto de dos números enteros de **signos diferentes** es **negativo**.

Números racionales

Algoritmo de la multiplicación

Resolución de problemas.

Operaciones combinadas.

Las $\frac{7}{10}$ partes de la superficie de la Tierra están cubiertas por agua; por ello, a nuestro planeta se le conoce como el planeta azul. Si la mitad de la superficie cubierta por agua corresponde al océano Pacífico, ¿qué fracción de la superficie terrestre está cubierta por el océano Pacífico?

- Para saber la superficie que ocupa el océano Pacífico, calculamos $\frac{1}{2} \times \frac{7}{10}$:

Representamos toda la superficie terrestre con un rectángulo.

$\frac{7}{10}$ partes de la superficie terrestre están cubiertas por agua.

$\frac{1}{2}$ de $\frac{7}{10}$ corresponde al océano Pacífico.

$\frac{1}{2} \times \frac{7}{10} = \frac{1 \times 7}{2 \times 10} = \frac{7}{20}$

El océano Pacífico ocupa $\frac{7}{20}$ partes de la superficie terrestre.

Para **multiplicar dos o más fracciones**, multiplicamos los numeradores y los denominadores entre si.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Aproximadamente, $\frac{7}{10}$ del cuerpo humano está compuesto por agua. ¿Cuántos kilogramos de agua tiene una persona que pesa 60 kg?

- Calculamos $\frac{7}{10}$ de 60: $\frac{7}{10} \cdot \frac{60}{1} = \frac{7 \cdot \cancel{60}^{6}}{\cancel{10}_{1} \cdot 1} = 42$

Una persona que pesa 60 kg tiene 42 kg de agua, aproximadamente.

Para preparar una docena de galletas se necesita $1\frac{1}{4}$ tazas de harina. ¿Cuánta harina se necesita para preparar $2\frac{1}{2}$ docenas de galletas?

- Multiplicamos las fracciones: $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 4} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$

Se necesitan $3\frac{1}{8}$ tazas de harina.

ISBN 978-84-945722-3-4

César va al banco a cambiar 45,6 euros por nuevos soles. Por cada euro le dan S/. 3,45. ¿Cuántos nuevos soles recibirá?

- Para saber cuántos nuevos soles recibirá César, multiplicamos $45{,}6 \times 3{,}45$:

$$\begin{array}{r l}
45{,}6\ \times & \leftarrow 1 \text{ cifra decimal} \\
3{,}45 & \leftarrow 2 \text{ cifras decimales} \\
\hline
2280 & \\
1824 & \\
1368 & \\
\hline
157{,}320 & \leftarrow 1 + 2 = 3 \text{ cifras decimales}
\end{array}$$

Multiplicamos como si fuesen números naturales.

Colocamos la coma en el producto contando, de derecha a izquierda, tantas cifras como cifras tenga la suma de las cifras decimales de los dos factores.

César recibirá S/. 157,32.

La multiplicación de los números naturales y decimales se presenta sin un análisis previo que evidencie de manera natural la necesidad de la aplicación de la multiplicación. En el caso de los números enteros se recurre a una representación que va en consonancia con lo descrito por Euclides M x N como M veces N, donde M y N son números que representan respectivamente M veces y N veces una unidad. Por otro lado, la introducción de la multiplicación de fracciones recurre al modelamiento gráfico. Sin embargo, esto solo se aplica en la situación inicial; finalmente, las situaciones se focalizan hacia el cálculo algorítmico.

Propuesta

A continuación alguna de las tareas propuestas en la secuencia didáctica:

1. Tarea 1: Análisis exploratorio

   Se proponen las siguientes preguntas las cuáles son resueltas en forma individual y luego discutidas a nivel de grupo.

   Sin hacer los cálculos indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

   a. 3,5 x 5,2 es mayor que 15

   b. 0,2 x 0,5 es mayor que 0,5

   c. 0,3 x 0, 6 es mayor que 0,3

   d. 1,5 x 0,8 es mayor que 0,8 ¿Qué puedes concluir de lo anterior?

   Observaciones: Se evidencia que en el tratamiento de los números decimales no existe una clara relación entre la parte entera y decimal. No hay una conceptualización de la multiplicación con números decimales. Asumen como válido que el producto de factores siempre es mayor que cualquiera de ellos.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

2. Tarea 2: Análisis visual

Observa la representación. Luego responde y justifica tus respuestas a las siguientes preguntas:

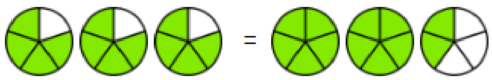


Fig. 1. Representación de fracciones

a. ¿Qué expresión representa las figuras de la izquierda?

b. ¿Qué expresión representa las figuras de la derecha?

c. ¿Encuentras alguna relación entre las representaciones de la derecha e izquierda?

Observaciones. Durante el proceso de verbalización se explicitan los modos de pensamiento, la interpretación de las gráficas y los significados de las fracciones en la relación parte- todo.

3. Tarea 3

Un colibrí tiene una masa de aproximadamente 0,2 decagramos. Si necesita comer la mitad de su masa para sobrevivir.

a. ¿Cuánta comida necesita comer cada día?

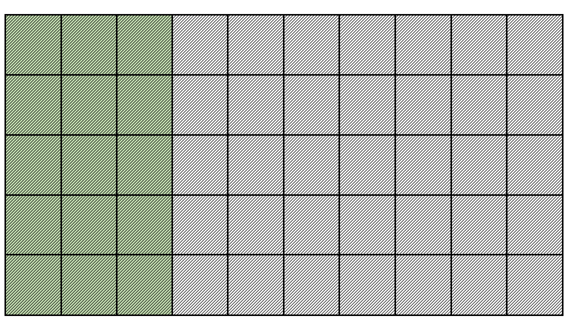
b. ¿Qué relación observas entre el producto y el tamaño de los factores decimales menores que 1?

c. Indica si el producto de 0,3 x 0, 6 es mayor o menor que 1. Justifica tu respuesta.

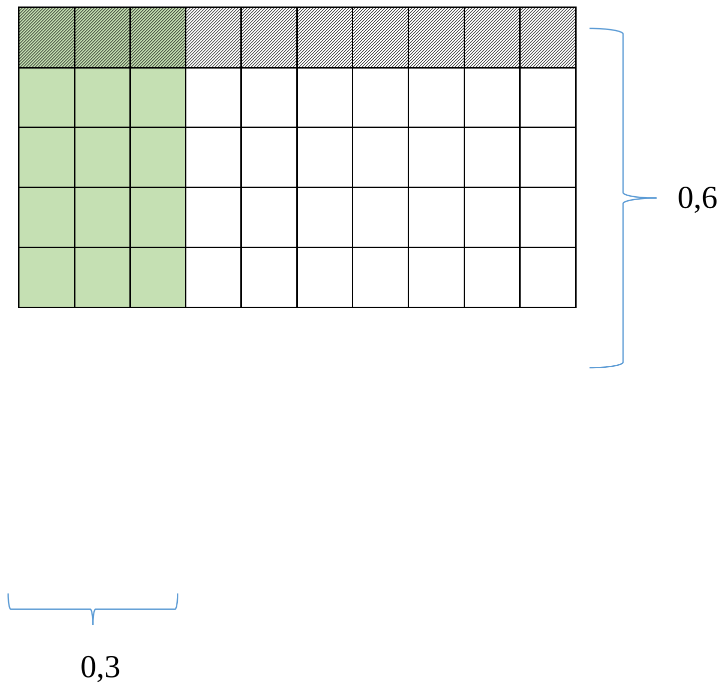
4. Tarea 4

El siguiente cuadrado representa una unidad y se ha dividido en 10 partes iguales en cada lado. Es decir, cada cuadrado pequeño es 1/100 del total.

A partir de una de las esquinas sombrea 0,3 en forma vertical y luego sombrea 0, 6 en forma horizontal. ¿Qué fracción representa la región sombreada común?



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Se resolvió la situación b de la tarea 1, es decir: 0,3 x 0,6 = 0,18. El área pintada y sombreada corresponde al producto. ¿Qué relación encuentras entre el producto y los factores?

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (1998). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado,* Madrid: Aique. Traducción al español por Claudia Gilman.

Chung, I., & Lew, H.-C. (2007). Comparing Korean and US third grade elementary student conceptual understanding of basic multiplication facts. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceeding of the 31st International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 2* (pp. 161-168).

Irwin, K.C. (2004). Multiplicative strategies of New Zealand secondary school students. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceed-ing of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 3* (pp. 111- 116).

Obando, G. Profesora, ¿qué es multiplicar?

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 59-82.

Olfos, R. (2011). *Enseñanza de la multiplicación: desde el estudio de clases japonés a las propuestas iberoamericanas*. Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontifica Universidad Católica de Valparaíso.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, 52*, 83-94.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4