

## EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA A PARTIR DE LOS ERRORES

María Itatí Gandulfo<sup>(1,2)</sup> - Irma Manuela Benitez<sup>(1,2)</sup> - Roxana Guadalupe Ramirez<sup>(1,2)</sup> -  
Jorge Rafael Brandolín<sup>(1)</sup> - María Alicia Gemignani<sup>(1,2)</sup> - Maricel De Zan<sup>(1)</sup> - Diana Cristina  
Musto<sup>(1)</sup> - Liliana E. Gimenez<sup>(1,2)</sup> -

mariagandulfo@gmail.com – manybenitezmartinengo@gmail.com -  
roxanaguadaluperamirez@yahoo.com.ar - jorgerbrandolin@yahoo.com.ar -  
alicia.gemignani@gmail.com - mariceldezan@frp.utn.edu.ar - dcmusto@gmail.com -  
lilianagimenez@yahoo.com.ar

<sup>(1)</sup>Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Paraná; <sup>(2)</sup> Universidad  
Autónoma de Entre Ríos – Facultad de Ciencia y Tecnología - Argentina

Tema: Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática. Pensamiento Algebraico

Modalidad: Comunicación Breve

Nivel educativo: Universitario

Palabras claves: Errores – enseñanza-aprendizaje – Articulación

### Resumen

*Con el objetivo de indagar y disminuir las dificultades de los alumnos ingresantes a las carreras de Ingeniería de la Facultad Regional Paraná de la Universidad Tecnológica Nacional y los ingresantes a la Licenciatura en Sistemas de Información de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la UADER, se analizan los errores que los alumnos cometen en los exámenes de ingreso y se promueve la búsqueda de estrategias y metodologías de enseñanza que ayuden a corregir y a construir el aprendizaje de la matemática a partir de los errores.*

*Cuando hablamos de errores hacemos referencia a los conocimientos que los jóvenes han aprendido con un cierto grado de inexactitud. Esto conduce a investigar las diferentes formas de indagar sobre las didácticas y técnicas en la metodología de la enseñanza-aprendizaje de la matemática, a fin de revertir lo que el alumno trae como un conocimiento inmerso, sólido y válido frente a la detección de estos errores cognitivos.*

*Mediante un análisis cuali-cuantitativo de los errores cometidos por los alumnos, se los clasifica de acuerdo a tipologías resultantes de investigaciones consolidadas y se analizan las técnicas de enseñanza-aprendizaje más adecuadas para resolver las situaciones planteadas.*

### Introducción

Los docentes de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), Facultad Regional Paraná, y de la Universidad Autónoma de Entre Ríos (UADER), Facultad de Ciencia y Tecnología aúnan esfuerzos para analizar la problemática que año a año se hace presente cuando se desarrollan los Seminarios de Ingreso cuya función es nivelar los conocimientos básicos de las ciencias exactas para que los estudiantes logren alcanzar una base exigente en los contenidos básicos de matemática.

El propósito de los seminarios es reforzar y afianzar los temas que constituyen la base de los conocimientos matemáticos que fueron adquiridos en el transcurso de la escuela secundaria. Un conocimiento sólido de las herramientas matemáticas elementales permitirán el uso estratégico de las mismas a lo largo de la formación académica, especialmente en la etapa inicial en las cátedras de “Álgebra y Geometría Analítica” y “Análisis Matemático I”, de los primeros años de las carreras de ingeniería de la UTN-FRP, como así también en las cátedras de “Lógica y Álgebra” y “Cálculo Diferencial e Integral” de la Licenciatura en Sistemas de Información de la UADER.

Se considera como herramientas elementales los tópicos necesarios para el conocimiento matemático (Rico, 1997). Ellos involucran los distintos conjuntos numéricos, operaciones y propiedades, la determinación de raíces de un polinomio, la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, el análisis de las inecuaciones, estudio de las funciones lineales y cuadráticas, entre otros.

Analizando las evaluaciones de los alumnos y lo manifestado por los docentes, se puede comprobar que muchos de los estudiantes llegan a la Universidad con un importante déficit en los conocimientos matemáticos y al momento de resolver problemas manifiestan falencias significativas en la comprensión de las consignas, presentan problemas de interpretación del enunciado y esto conlleva a que no puedan extraer los datos necesarios para la resolución del problema.

### **Desarrollo**

La problemática de las falencias de conocimientos matemáticos se manifiesta año a año, en primera instancia en los seminarios introductorios y a pesar de los esfuerzos que se realizan por remediarlas, se prolongan en los primeros años de las diferentes carreras. En este trabajo se analizan y categorizan los errores más frecuentes encontrados en los exámenes de ingreso partiendo de lo expresado por los docentes que conforman las distintas cátedras de matemática.

Se realizaron talleres de reflexión con los docentes de primer año con el fin de evaluar los rendimientos. En estos talleres, los docentes destacan que muchos estudiantes:

- ◆ No reconocen o diferencian los distintos conjuntos numéricos.
- ◆ No operan correctamente con números enteros (suma, resta, multiplicación y división).

- ◆ Presentan mucha dificultad en la interpretación y aplicación de propiedades (exponentes enteros, valor absoluto, desigualdades, entre otros).
- ◆ Presentan grandes dificultades de análisis al momento de interpretar gráficamente un resultado de desigualdad; como así también en la construcción de las gráficas de funciones lineales, cuadráticas o del tipo polinómicas.
- ◆ No comprenden la determinación de “ceros o raíces de un polinomio”. Les cuesta interpretar el significado del concepto pero la forma metódica de cómo obtener las raíces la efectúan de manera casi memorística pero sin entender su significado.
- ◆ No logran interpretar con claridad el análisis de las gráficas de funciones lineales y cuadráticas, así como la interpretación geométrica de sistema de ecuaciones.

Esto conduce a indagar acerca de las características de los errores que cometen los alumnos frente al desarrollo de un ejercicio o de un problema de matemática.

Cuando se habla de errores, se hace referencia a los conocimientos que los jóvenes han aprehendido con un cierto grado de inexactitud. Esto lleva a promover la búsqueda de estrategias y metodologías de enseñanza que ayuden a remediar y corregir aquellos errores que han sido asimilados con un carácter teórico-práctico, es decir revertir lo que el alumno trae como un conocimiento inmerso, sólido y válido, pero equivocado.

Se puede decir que el “error” ha contribuido a lo largo de la historia al desarrollo de los conocimientos matemáticos y al mismo tiempo al avance de las ciencias. Varios investigadores han profundizado en este tema y han categorizado al error a partir de diferentes enfoques.

En base a las categorizaciones expuestas por Radatz (1979), Mosvskovitz, H y Taslavsky, I. (1987), Mulhern (1989), Rico (1992), Esteley y Villarreal (1990,1996) y Astolfi (1999); seleccionando aquellas que estudian los errores considerados por la experiencia docente del grupo de investigación de ocurrencia “frecuente”, se adaptaron las categorizaciones a las que analizan la temática referida a: Conjuntos numéricos. Operaciones y propiedades. Estos temas son tratados en la primera unidad de los distintos programas que se desarrollan en los seminarios introductorios y dieron lugar a la siguiente clasificación:

(Error 1) E1: Empleo incorrecto de propiedades y definiciones: se comete por mal interpretación de una regla, definición o propiedad determinada.

E2: Deducciones no válidas lógicamente: errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no al contenido específico.

E3: Falta de verificación de la solución: este error ocurre cuando los pasos que realizan para la resolución del ejercicio son los correctos, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.

E4: Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo: error por falta de atención o de interpretación.

E5: Errores resultados de los hábitos escolares o de una incorrecta interpretación del concepto.

Con el objeto de clasificar los errores se estableció como instrumento de análisis los exámenes finales de diciembre correspondiente al período de año de ingreso 2010-2013, y los exámenes finales de marzo, correspondiente al período de año de ingreso 2012-2013. Esto permite abordar de manera más acabada la problemática que se plantea desde un enfoque constructivista.

La muestra seleccionada se dividió en tres clases para su análisis, las cuales se clasificaron en: Intentaron resolver, Bien resuelto y Mal resuelto. La tabla siguiente muestra los resultados obtenidos.

<b>Año Ingreso</b>	<b>Total</b>	<b>Intentaron</b>	<b>Bien resuelto</b>	<b>Mal resuelto</b>
<b>2010(Dic 09)</b>	41	100%	7%	93%
<b>2011(Dic 10)</b>	63	100%	6%	94%
<b>2012( Dic 11)</b>	81	100%	6%	94%
<b>2013(Dic 12)</b>	87	97%	12%	88%
<b>2012(Mar 12)</b>	56	100%	5%	95%
<b>2013(Mar 13)</b>	53	100%	28%	72%

**Tabla 1: Porcentaje del rendimiento de los alumnos en los ejercicios de la Unidad n°1.**

En la tabla 1 se observa que la mayoría de los alumnos realizan el ejercicio de números, operaciones y propiedades, pero son muy pocos los que lo resuelven correctamente. Se puede observar un mejor rendimiento en el año 2013 (Diciembre 2012 – Marzo 2013), observándose que esto coincide con un incremento en la cantidad de docentes designados para desarrollar el seminario, es decir que hubo una mejor proporción de docentes en

relación con la cantidad de alumnos y un mayor incremento de tutores alumnos para el desarrollo de las clases de consulta<sup>1</sup>.

En una segunda instancia, se revisaron las evaluaciones clasificadas como “Mal resueltas”, llevándose a cabo un análisis minucioso de los ejercicios referido a los números reales, pensando en los posibles procedimientos que efectuaron los alumnos para resolverlos y lo que deberían o podrían haber realizado. Se tuvieron en cuenta los errores más significativos que resultaron de los ejercicios propuestos y que mostraron mayor dificultad para ellos, enmarcándolos dentro de la categorización propuesta.

A continuación se muestran algunos ejemplos:

Ejercicio	Error cometido	Categorización del error
1) Calcular y simplificar el resultado a la mínima expresión: $-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{2}\right)^{-1}-3^2=$	$-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{2}\right)^{-1}-3^2=$ $=-\frac{4}{3}\left[6-\frac{2}{5}\right]-9=....$ error!!!	Se generaliza la propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación y división, haciéndola extensiva a las operaciones de suma y/o resta (error tipo E1).
	$-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{2}\right)^{-1}-3^2=$ $=-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{2}\right)^{-1}\left[+9\right]=....$ error!!!	No se distingue que el signo negativo separa términos y que no forma parte de la base de la potencia. Los alumnos interpretan que si el exponente es par “siempre” el signo de la operación es positivo. (error tipo E1).
	$-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{2}\right)^{-1}-3^2=$ $-\frac{4}{3}\left(\frac{1\times 2-6\times 5}{6}\right)^{-1}-3^2=...$ error!!!	Los alumnos saben que tienen que sumar algebraicamente los números fraccionarios que se encuentran dentro del paréntesis pero, el inconveniente que se presenta es el procedimiento de la suma algebraica de fracciones (error tipo E2) <sup>2</sup> .
	$-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{2}\right)^{-1}-3^2=$ $\left(\frac{4}{18}-\frac{20}{6}\right)^{-1}-3^2=$ error!!!	Error relacionado con la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma algebraica de los números reales (error tipo E5).

<sup>1</sup> Los tutores alumnos son estudiantes avanzados de las distintas carreras que se dictan en las Facultades donde se desarrolló este estudio.

<sup>2</sup> Este error no se pudo comprobar si proviene de un error al azar o si procede del aprendizaje adquirido por el alumno durante su formación anterior.

Observación: Se puede identificar que los errores corresponden a los conocimientos conceptuales necesarios, como son las propiedades de las operaciones en el conjunto de los números reales.		
2) Resolver aplicando propiedades y simplificar el resultado a la mínima expresión:	$\frac{(m^5 m^6)^{1/10} m^{-3/5}}{m^{1/2}} =$ $= \frac{(m^{11})^{1/10} m^{-3/5}}{m^{1/2}} =$ $m^{11/10} m^{-3/5} = \frac{m^{5/10}}{m^{1/2}} \text{ error!!!}$	En este ejercicio se exhiben en su mayoría los mismos errores enunciados anteriormente, se incorporan otros errores como la falta de interpretación de la consigna y la ausencia del trabajo algebraico (error tipo E5).
3) Hallar el conjunto de valores reales que satisface la siguiente desigualdad. Representar este conjunto en la recta numérica:	$ x + 1  \geq 3;$ error!!! $-3 \geq x + 1 \geq 3;$ $-3 - 1 \geq x + 1 - 1 \geq 3 - 1;$ $-4 \geq x \geq 2;$ Sol: $x \geq 2$ y $x \leq -4$	Este ejercicio no se interpreta debido a que no se alcanza la concepción correcta del método de resolución; más bien se trata de un proceso sistemático y memorístico por parte del alumno. (error tipo E5).
	$ x + 1  \geq 3.$	

Tabla 2: Categorización de los errores cometidos en distintos ejercicios

### Conclusión

Del análisis realizado acerca de los errores cometidos por los estudiantes se destaca que el proceso de asociación empleado para la construcción del conocimiento es asimilado pero no necesariamente acomodado. Es decir, el alumno recibe la información y hasta la resuelve de una forma mecánica pero su mayor déficit es la falta de asociación e interrelación con otros temas y no se produce la asimilación de dichos conocimientos.

Al analizar los errores cometidos se obtiene la información acerca de cómo se construye el conocimiento en el proceso de aprendizaje, lo que ofrece una buena herramienta para realimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje, mejorar los resultados y afianzar el trabajo docente en el aula. Es importante conocer y activar todos los saberes, como así también los conocimientos inherentes que traen inmersos los jóvenes para poder usarlos como herramienta en la motivación de la práctica de la enseñanza. Según Ausubel: “el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. ... determínese lo que el alumno ya sabe y enséñese en consecuencia” ( Arancibia & Herrera & Strasser, 1999).

Teniendo en cuenta a Ausubel, se debe considerar a los errores en forma natural y parte normal del proceso de aprendizaje. Estos indican la presencia de un saber diferente y no ausencia de saber y dependen no sólo del alumno sino que también intervienen otras variables tales como el profesor, el currículo, el entorno social en el que se encuentra la institución, el medio cultural y sus relaciones y las posibles interacciones entre estas variables. De ahí que los errores son el resultado de procesos muy complejos.

Se puede observar que, en la mayoría de los casos, los errores exhiben el empleo incorrecto de las propiedades frente al trabajo algebraico, distorsionando las reglas o los procedimientos matemáticos. En las resoluciones se observa la falta de correlación entre la aplicación de diversas propiedades, como así también de la relación entre los teoremas y fundamentos que justifican al conjunto de los números reales.

Esto conlleva a operar de manera incorrecta en el campo algebraico, lo cual nos muestra que estos errores provienen de falacias de razonamiento, en donde se ve reflejado la falta de aprehensión y de acomodamiento de los conceptos accedidos durante la escuela media.

Este trabajo permite a los docentes de las diferentes cátedras de los primeros años, diagnosticar cuales son los errores persistentes o recurrentes en el tiempo y generar nuevas técnicas de enseñanza-aprendizaje para afrontar las dificultades más comunes previniendo los errores más frecuentes cometidos en los últimos años.

### **Referencias Bibliográficas**

- Arancibia, V. Herrera, P. Strasser, K (1999). *Teorías cognitivas del aprendizaje. Psicología de la Educación*. México, Alfaomega.
- Barrantes, H. (2006). *Los obstáculos epistemológicos. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. Año 1. N°2. Recuperado de <http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/11/16> Consultado 15/05/2013
- Di Blasi Regner, M. y otros (2003). *Dificultades y Errores: Un estudio de caso*. II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería. Buenos Aires. Argentina.
- Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/486/> Consultado 23/04/2013
- Rico, Luis (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En Rico, L. & Castro, E. & Castro, E. & Coriat, M. & Marín, A. & Puig, L. & Sierra, M. & Socas, M. M. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Capítulo 2 (pp. 39-59). Madrid. España. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/522/1/RicoL97-2529.PDF> Consultado 15/05/2013