



## LAS FIGURAS DE ANÁLISIS. UN RECORRIDO HISTÓRICO

Mónica Lorena Micelli, Cecilia Rita Crespo Crespo

I.S.P. "J. V González", C.A.B.A., Argentina

crccrespo@gmail.com - monikmathis@gmail.com

**Nivel educativo:** Medio - Terciario

**Palabras clave:** figuras de análisis, historia, geometría

### Resumen

En la comunicación se hará un recorrido histórico de las figuras de análisis en diferentes documentos matemáticos pertenecientes a variadas culturas y épocas. En la investigación que se está realizando, se busca dar respuesta a una serie de preguntas que tienen su origen en una problemática detectada en la dificultad de los alumnos de nivel terciario al usar figuras de análisis, especialmente en la materia geometría. Durante las clases puede observarse que los estudiantes no representan correctamente los datos dados en los enunciados de un problema o toman figuras que representan casos particulares, obviando situaciones generales llegando a conclusiones erróneas o incompletas. La investigación se enmarca dentro de los lineamientos de la construcción social del conocimiento matemático. Se ha elegido esta línea de investigación porque en ella se considera a la matemática no sólo como un saber sino que se la ubica en un escenario donde se juegan variables sociales, además de las variables didácticas, cognitivas y epistemológicas. Por lo tanto el marco teórico elegido es la socioepistemología. Para acercarnos a una posible respuesta de una de las preguntas que se plantean en la tesis: ¿Cómo surge el uso de las figuras de análisis en el ámbito escolar?, se presentará parte del relevamiento histórico en busca de figuras de análisis en trabajos de matemáticos pertenecientes a diferentes culturas, en distintas épocas históricas.

### Introducción

a investigación se enmarca dentro de los lineamientos de investigación de la construcción social del conocimiento matemático. Se ha elegido esta línea porque en ella se considera a la matemática no sólo como un saber sino que la ubica en un escenario donde se juegan variables sociales, además de las variables didácticas, cognitivas y el "saber sabio" (Chevallard, 1997).

El marco teórico concuerda con la línea de investigación mencionada, la socioepistemología. Dentro de este marco se tendrá en cuenta los cuatro componentes que lo conforman: lo epistemológico, lo cognitivo, lo didáctico y lo social.

¿Cómo surge el uso de las figuras de análisis en el ámbito escolar? Para acercarnos a una posible respuesta este interrogante que forma parte de una de las preguntas que se han planteado en la investigación, se ha realizará un relevamiento histórico en busca de figuras de análisis o aproximaciones de las mismas en trabajos de matemáticos pertenecientes a diferentes culturas, en distintas épocas históricas y acercarse así a un enfoque epistemológico del objeto de estudio de este trabajo; las figuras de análisis. Entendiéndose por figuras de análisis aquellos dibujos que pueden ser realizados a mano alzada, sin rigurosidad geométrica en donde se vuelcan la información dada como primer paso ya sea para resolver un problema geométrico, demostrar un teorema o realizar una construcción.

No se pretende hacer una evolución histórica completa y minuciosa de las figuras de análisis sino analizar el uso de estas figuras en distintas épocas de la historia y como el uso de las mismas en cada civilización esta relacionada con su propia cultura.

## 1. Egipto antiguo

Así es que se encuentra en el antiguo Egipto diversos papiros, verdaderos testimonio de cómo resolvían estos pueblos los problemas geométricos. De estos papiros se tomaran algunos problemas a modo de ejemplo para analizar las figuras que aparecen junto a los problemas. Uno de los principales documentos matemáticos egipcios que han llegado hasta nuestros días, es el Papiro de Rhind o Ahmes que data de aproximadamente de 1650 a.C. Entre su lista de 87 problemas se encuentra, en particular, el problema número 48: “Comparar el área de un círculo con la del cuadrado circunscrito.” (López, 1997a)



Figura 1: Problema 48 del Papiro Rhind o de Ahmes

Es así como identificamos, en la parte superior, un dibujo que presenta bastante imprecisión pero que responde a la definición que se ha dado de figura de análisis. Pues la figura que se encuentra en el interior de este cuadrado no corresponde precisamente a un círculo del cual hace referencia el problema pero es suficiente para dar una idea de éste y a partir de la figura comenzar un análisis sobre la misma y avanzar en la resolución del problema hasta llegar a la correcta solución.

En el Papiro de Moscú, en el problema número catorce encontramos otro ejemplo. A partir de los datos que se observan, dice López (1997b) “En este problema se pide calcular el área de la figura, que parece ser un trapecio isósceles, pero realmente se refiere a un tronco de pirámide cuadrangular.” Y continua diciendo “(...) parece ser que lo que se busca es calcular el volumen del tronco de pirámide cuadrangular de altura 6 y bases superior e inferior de 2 y 4”.

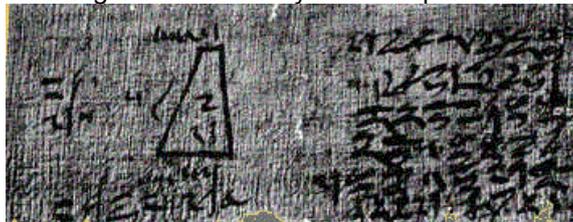


Figura 2: Problema 14 del Papiro Moscú

Y aunque se pide el volumen de la pirámide truncada puede verse en la imagen el trapecio, en cuyo interior y alrededores puede diferenciarse signos hieráticos que corresponden a las dimensiones que se dan como datos del problema. Dicho trapecio es la figura obtenida tras realizar un corte transversal al cuerpo del cual se quiere calcular su volumen, lo que implica un abstracción y una visualización del cuerpo con el que se está trabajando.

## 2. Civilización Sumeria

Del mismo modo se puede encontrar ejemplos del empleo de figuras al momento de resolverse un problema en las tablillas pertenecientes a los distintos pueblos que ocuparon la Mesopotamia Asiática. Varios de estos documentos muestran figuras geométricas donde los datos dados en el problema pueden observarse dentro de la figura, se puede asumir que sirvieron de herramienta para visualizar el problema, analizar los datos dados y la razonar para hallar la solución requerida.



Figura 3: Aproximación de  $\sqrt{2}$



Figura 4: Tablilla YBC 72

En figura 3 puede observarse un cuadrado de lado 30 con una de sus diagonales dibujadas y sobre ella los símbolos cuneiformes que corresponden a los 1.24.51.10 y 42.25.35 (reacuérdesse que el sistema de numeración de estos pueblos es de base 60). Maza Gómez de la Universidad de Sevilla propone que esta última expresión (42;25.35) es una aproximación de  $\sqrt{2}$ . Pero esta gráfica no es casual pues otro ejemplo similar se presenta, como puede verse en la figura 4, en la tablilla YBC 72 (perteneciente a la Yale Babylonian Collection), que se encuentra fechada entre el 1900 a.C. y el 1600 a.C. los datos se presentan de la misma forma que el caso anterior. En la figura 4 puede observarse la irregularidad del dibujo geométrico ya que los segmentos internos darían la idea de diagonal pero es notorio que sus extremos no coinciden con los vértices del cuadrado.

### 3. India

De la matemática india tomaremos las copias de los manuscritos de Bhaskara I (600-680) para hacer referencia a las figuras de análisis. En su obra "Aryabhatiyabhas", el autor presenta además de definiciones matemáticas, diferentes problemas donde se pide calcular el área de figuras geométricas como triángulo, trapecio, círculo; el volumen del tetraedro y la esfera entre otros problemas de aritmética.

Podrá notarse en las imágenes que siguen que los manuscritos presentan figuras realizadas con gran falta de precisión, tratándose de un escrito geométrico. Es probable que estas figuras solo sirvieran de análisis para la interpretación del problema planteado y no pretendiera el autor hallar una solución geométrica.

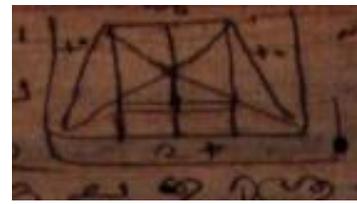
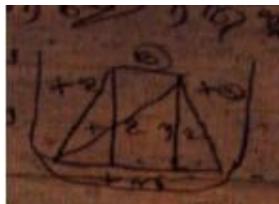
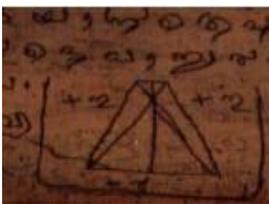


Figura 5: Representaciones de Bhaskara I: problemas de un trapecio y longitud de los segmentos interiores (verso 8)

Y para terminar esta elección que se ha hecho de los problemas hindúes, se ha elegido un problema que fue conocido por varias civilizaciones como es el Teorema de Pitágoras. A continuación se presenta un diagrama de Bhaskara I, en el cual puede notarse que se trata de una figura de análisis pues los cuatro triángulos rectángulos que tienen sus lados incluidos en los lados del cuadrado original deben ser congruentes si se tratara de una construcción geométrica con la cual se intentara demostrar el teorema. A simple vista, puede notarse que no

lo son, al igual que los otros cuatro triángulos rectángulos del interior, todos ellos están representando una idea.



Figura 6: Bhaskara I: diagrama asociado al teorema de Pitágoras

#### 4. China

Para tomar una figura a modo de ejemplo de una de las culturas de Oriente, se eligió como documento “Jiuzhang suànshù ou Chiu Chang Suan Shu ou”, también conocido como los “Nueve capítulos del arte de la Matemática”, texto de gran importancia en oriente pues se utilizó como manual de enseñanza más allá de las fronteras de China por más de 1600 años. Contiene 246 problemas que lo conforman junto a la explicación del método empleado para resolverse o la respuesta. Por ejemplo, la figura que analizaremos corresponde al problema 13 que pertenece al Capítulo IX donde se estudian los triángulos rectángulos.

Problema 13: “Hay un bambú con 1 zhang de altura, se partió y la parte de la cima toca el suelo a 3 chih de la base del bambú. ¿A qué altura se quiebra? Solución:  $4 + 11/20$  chi” (Traducido de Lagarto, 2002).

Como puede verse en la figura 7, podemos ver que se presenta una figura de análisis para la mayor comprensión del problema, en donde se representa la situación planteada en el enunciado del problema.

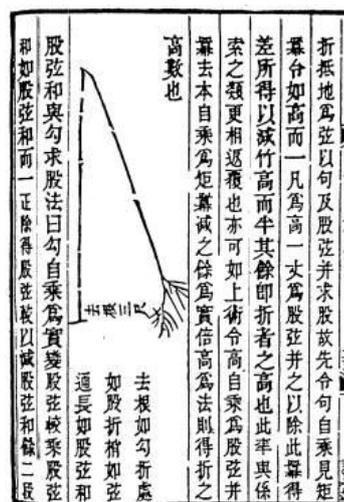


Figura 7: Ilustración de Yang Hui

#### 5. Grecia

De la matemática desarrollada en Grecia, no se tomará para este recorrido histórico un documento que presente figuras en la resolución de problemas, como en los casos anteriores, sino un documento que trasmite en sus dichos el empleo y la utilidad de las mismas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Más precisamente, el documento que se analizará es una de las obras de Platón (427 a. C./428 a. C. – 347 a. C.), mas no se puede dejar de mencionar que Platón poseía una posición idealista de los objetos matemático, razón por la cual algunos de sus comentarios son como el siguiente: “los razonamientos que hacemos en geometría no se refieren a las figuras visibles que dibujamos, sino a las ideas absolutas que ellas representan” (Boyer, citado en Sigarreta, Rodríguez y Ruesga, 2006, p.55).

A pesar de esta posición idealista, al leer varios fragmentos del diálogo llevado a cabo entre Sócrates y el esclavo o servidor de Menón (según la traducción de la obra “Menón”), Platón, a través del personaje de Sócrates, hace uso de los dibujos para hacer comprender estas propiedades pertenecientes a los objetos matemáticos, en este caso preciso, el cuadrado. En dicho diálogo, se encuentra un fragmento que comprende una serie de preguntas que Sócrates va realizando al servidor con la intención de guiarlo para que él pueda encontrar la solución a

un problema geométrico que se le presenta con el fin mostrarle a Menón que no es lo mismo aprender que recordar. El problema señalado es construir un cuadrado que tenga como área el doble de la de un cuadrado conocido, que tiene como lado dos pies.

“SÓC. — (Al servidor.) Dime entonces, muchacho, ¿conoces que una superficie cuadrada es una figura así? (La dibuja.)” (Platón, 2002, p. 16)

Se puede considerar que este dibujo se trata de una figura de análisis pues todas las preguntas que va realizando Sócrates están basadas en la observación de este dibujo, realizado por él, para que el servidor pudiera razonar sobre ella y hallar la respuesta correcta.

Luego de calcular el área del cuadrado dibujado, Sócrates presenta el problema de esta manera:

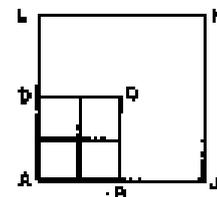
“SÓC. — ¿Y podría haber otra superficie, el doble de ésta, pero con una figura similar, es decir, teniendo todas las líneas iguales como ésta?

Las primeras respuestas dadas por el servidor de Menón, son en un principio incorrectas ya que el lado cuadrado que tendrá como área el doble del área dada (ocho pies) responde que debe tener cuatro pies, es decir el doble del lado del cuadrado conocido. Sócrates le muestra que su respuesta es incorrecta con otra figura sobre la cual seguirá el análisis.

SÓC. — Dibujemos, pues, a partir de ella, cuatro iguales. ¿No sería ésa la superficie de ocho pies que tú afirmas?” (Platón, 2002, pp. 17-18).

Se puede ver a través de estos fragmentos la importancia que tiene una imagen, una figura de análisis, en la comprensión de un problema. Es cierto que sin las preguntas de Sócrates tal vez el servidor hubiese seguido pensando que su primera respuesta era la correcta, pero dichas preguntas no podían haber sido respondidas sin un dibujo que sirviera de soporte para el análisis de los interrogantes que se le planteaban al servidor de Menón.

Luego sería su discípulo, Aristóteles (384 a. C.–322 a. C.), quien sería uno de los primeros pensadores en considerar el papel que poseen las imágenes mentales, sosteniendo que “el pensamiento es imposible sin una imagen” (Aristóteles, citado por P. Cruz, 2000,30).



## 6. Siglos XVII y XVIII

El hallazgo más importante que podemos realizar en este recorrido histórico de las figuras de análisis se encuentra recién iniciando el siglo XVIII, en el tratado “Reglas para la Dirección de la mente” (publicado post mortem en 1701, en “Obras Póstumas”) en donde Descartes (1596–1650) estableció las pautas de su método para la resolución de problemas. En este tratado se hace referencia a un total de veintiuna reglas donde el autor explica los pasos a seguir para resolver un problema siguiendo un riguroso método que él describe detalladamente. Entre ellas, existen algunas reglas que hacen referencia a las figuras, entendiendo por figura “el límite del objeto extenso”, como lo define el propio Descartes, durante la explicación de la regla XII (1983, p. 207). Más precisamente, las reglas que pueden relacionarse con las figuras de análisis son las que se transcriben y analizan a continuación:

“REGLA XIV: La misma regla debe aplicarse a la extensión real de los cuerpos y propuesta por entero a la imaginación con ayuda de figuras puras y desnudas: de esta manera, en efecto, será comprendida con mucho mayor distinción o claridad por el entendimiento” (Descartes, 1983, p. 229).

Aunque en ella, no se da el término preciso de “figuras de análisis” podemos conjeturar que estas figuras simples tienen la misma finalidad, ya que en la regla XII también definió, el matemático, que ha de llamar “cosas simples” a aquellas que son puramente intelectuales haciendo alusión a la idea de un término o las puramente materiales en las cuales incluye a las figuras, la extensión, entre otros (Descartes, 1983). Por lo tanto estas “figuras simples” deben de ser lo más claras posibles para poder a partir de ellas hallar la solución al problema por ello es que la asociamos a nuestro tema de estudio, “las figuras de análisis”.



“REGLA XV: Es también útil el trazar de ordinario estas figuras y presentarlas a los sentidos externos, a fin de que sea más fácil por este medio mantener atento nuestro pensamiento” (Descartes, 1983, p. 245).

En la representación de las figuras simples, Descartes pone énfasis en la visualización de los datos que intervienen para poder resolver el problema, dándole un papel importante para lograr llegar a una correcta solución pues como explica en la regla anterior, que es por medio a dichas figuras que uno puede formarse una idea, más continua con una advertencia importante para la problemática que dio origen a este trabajo de investigación. Volviendo a Descartes continua diciendo: “de (las figuras) sus diversas e innumerables especies, emplearemos aquí solamente aquellas por cuyo medio se expresan más fácilmente las proporciones” (Descartes, 1983, p. 242). Por eso, estas figuras deben ser tan simples que no deben dejar lugar a la existencia de suposiciones que acarrearían una deducción racional errónea.

“REGLA XVI: Las cosas, empero, que no requieren una atención actual o inmediata de la inteligencia, aun cuando sean necesarias para la conclusión, vale más designarlas por las notaciones más breves que por medio de figuras enteras: de esta manera la memoria no podrá equivocarse y no obstante, durante este tiempo, el pensamiento no se distraerá en el intento de retenerlas, mientras se aplica a otras deducciones” (Descartes, 1983, p. 247).

En esta regla, lo que marca Descartes no es sólo un camino a recorrer en el uso de las figuras, sino que detalla la forma de presentar las notaciones, según él más breves de llevar una idea sobre el papel, a utilizar en la resolución del problema, a saber: “nos serviremos de las letras a, b, c, etc. para expresar las magnitudes ya conocidas, y de las letras A, B, C, etc., para expresar las desconocidas.” Así como también señala la forma de indicar la frecuencia o las relaciones que se presentan, con el fin no sólo de economizar palabras sino también de presentar a la vista toda la información útil con una lectura sencilla o simple.

Por otro lado si se hace referencia al siglo XVII, el cálculo “nace con un componente muy fundamentalmente visual y así se mantiene en su desarrollo a lo largo de los siglos siguientes, en interacción constante con problemas geométricos y físicos” (de Guzmán, 1996). Se encontró que “Lagrange ha expresado con énfasis su creencia en la importancia para el matemático de la facultad de observación; Gauss ha llamado a la matemática una ciencia del ojo...” (Silvestre, citado por de Guzmán, 1996).

## 7. Edad Contemporánea

Henri Poincaré (1854–1912) en su libro “Fundamentos de la Geometría” dedica todo un apartado a el empleo de las figuras, en el explica las razones de porque no se puede estudiar geometría sin figuras y se debe a que antes de estudiar Geometría uno ya ha tenido experiencias que implican las nociones de espacio sensible. No se estudian las figuras sino que éstas sirven de instrumento para estudiar la geometría.

Además, Poincaré agrega:

“Hemos adquirido la facultad de *representarnos* las experiencias geométricas familiares, sin ser obligados a haber recurrido a sus reproducciones materiales; pero todavía no hemos deducido conclusiones.

¿Cómo lo haremos? Ante de enunciar la ley, representaremos la experiencia en cuestión de una manera perceptible, despojándola también, lo más completamente posible, de todas las circunstancias accesorias o perturbadoras, exactamente como un físico elimina en sus experiencias las fuentes de errores sistemáticos. Aquí es donde las figuras son necesarias, pero ellas son un instrumento a penas menos grosero que la tiza que sirve para trazarlas, y lo mismo que los objetos materiales no pueden ser representados en el espacio geométrico que constituye el objeto de nuestros estudios, no podemos repreñarnoslos sino en el espacio sensible” (Poincaré, 1948, pp.92-93).

Poincaré se refiere a despojar la representación de todas aquellas circunstancias secundarias, lo mismo que Descartes, siglos atrás, reflejaba en su regla XIV al referirse a figuras desnudas o



simples. Ambos pensadores dan importancia en la resolución de problemas a la utilización de figuras que sirvan de instrumento para razonar sobre ellas.

Y para terminar este breve recorrido histórico sobre la utilización de figuras de análisis por parte de los matemáticos, se harán propias las palabras de Rey Pastor (1888–1962): “Hasta los matemáticos que mayor don de abstracción poseen, como el mismo Hilbert, confiesan que, sin la preciosa guía de la intuición geométrica, sin las figuras, no lograrían demostrar los teoremas algo complicados sobre continuidad de funciones, sobre puntos de condensación, etc. Con palabras del mismo Hilbert ‘los signos y fórmulas de la Aritmética son figuras escritas, y las figuras geométricas son fórmulas dibujadas; ningún matemático podría prescindir de estas fórmulas dibujadas, como no podría realizar sus cálculos sin paréntesis ni signos operativos” (Rey Pastor, 1916, p. 18).

### A modo de comentario final

Este recorrido histórico tiene como fin presentar distintos escenarios socioculturales en donde la matemática se desarrolló, estas ideas “por su carácter sociocultural, son el reflejo y producto de un determinado escenario” (Crespo Crespo, 2007, 68).

Es interesante notar que aún en las distintas visiones de la matemática, (tanto con finalidad práctico o con un fin en sí misma), puede encontrarse el empleo de figuras de análisis en muchos escenarios socioculturales de la matemática a través de la historia en la resolución de problemas (empíricos o teóricos) aunque estos dos aspectos pueden influir en el tipo de figura ha realizar.

### Referencias bibliográficas

- ✓ Cantoral, R y Farfán R. (2003). *Matemática educativa: una visión de su evolución*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6 (1), 27-40.
- ✓ Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Horsori Editorial.
- ✓ Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de Doctorado no publicada, Cicata - IPN, México.
- ✓ Descartes, R. (1983). *Reglas para la dirección de la mente* (de P. Samaranch, F., Trad.). Barcelona, España.: Gráficas Ramón Sopena, S.A. (Trabajo original publicado en 1701).
- ✓ de Guzmán, M. (1996). *El papel de la visualización*. En de Guzmán, *El Rincón de la Pizarra*. Pirámide, Madrid. Recuperado el 13 de marzo de 2009, de <http://www.mat.ucm.es/~angelin/labred/visrincon/00indice.htm>
- ✓ Lagarto, M. J. (2002). *Historia da Matemática - história dos problemas Bhaskara I (600-680)*. Recuperado el 10 de febrero de 2009, de <http://www.malhatlantica.pt/mathis/India/bhaskaral.htm>. Última actualización 15-06-2008.
- ✓ López, F. (1997a). *Las Matemáticas en el Antiguo Egipto. El papiro de Moscú*. La Tierra de los Faraones. Egiptologia.org. Recuperado el 9 de febrero de 2009, de [http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro\\_moscu.htm](http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_moscu.htm)
- ✓ López, F. (1997b). *Las Matemáticas en el Antiguo Egipto. El papiro Rhind*. La Tierra de los Faraones. Egiptologia.org. Recuperado el 9 de febrero de 2009, de [http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro\\_rhind.htm](http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm)
- ✓ Plasencia Cruz, I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad de La Laguna, España.
- ✓ Platón. (1983). *Menón*. Madrid: Gredos.
- ✓ Poincaré, H. y Einstein, A. (1948). *Fundamentos de la geometría*. (de Rey Pastor, J., Trad.). Buenos Aires, Argentina: Colección infinito. Serie 3, Filosofía de la Ciencia, Vol. 1. Ibero América. (Trabajo original publicado en 1891).
- ✓ Rey Pastor, R. (1916). *Fundamentos de la Geometría*. Madrid : Biblioteca Corona



- ✓ Sigarreta, J. M. Rodríguez, J. M. y Ruela, P. (2006). *La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XIII, Num. 1, pp. 53-66. Recuperado el 22 de marzo de 2008, de <http://www.ma.usb.ve/~bol-amv/conten/vol13/pruesga.pdf>

**Figura 1:** Imágenes tomadas de [http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro\\_rhind.htm](http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm).

**Figura 2:** Imagen tomada de [http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro\\_moscu.htm](http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_moscu.htm).

**Figura 3:** Imagen tomada de <http://personal.us.es/cmaza/mesopotamia/plimpton.htm>.

**Figura 4:** Imagen tomada de <http://www.fisicamente.net/FISICA/index-1540.htm>, perteneciente a Da Pichot.

**Figura 5:** Imagen tomada de [http://www.malhatlantica.pt/mathis/India/Bhaskara1.htm#Verso\\_6](http://www.malhatlantica.pt/mathis/India/Bhaskara1.htm#Verso_6).

**Figura 6:** Imagen tomada de <http://www.malhatlantica.pt/mathis/India/bhaskara1.htm>.

**Figura 7:**  $1 \text{ chih} = 10 \text{ cun}$ ,  $1 \text{ zhang} = 10 \text{ chih}$ .

**Figura 8:** Imagen tomada de <http://www.malhatlantica.pt/mathis/china/Nove9.htm#Problema%202>.