

## O ENSINO DE PONTOS NOTÁVEIS POR MEIO DO GEOGEBRA: UMA DISCUSSÃO EM UM CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA

Julio César Rodrigues de Oliveira – Emerson Tortola

[julioeconomist@hotmail.com](mailto:julioeconomist@hotmail.com) – [emersonortola@utfpr.edu.br](mailto:emersonortola@utfpr.edu.br)

Universidade Estadual do Paraná e Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Brasil

Tema: Formação e atualização docente

Modalidade: CB

Nível educativo: Formação e atualização docente

Palavras-chave: Ensino de Geometria; Formação Continuada; GeoGebra; Tecnologias no ensino de Matemática

### Resumo

*Diante das inovações tecnológicas que surgem a quase todo instante, e devido sua repercussão nos ambientes de ensino, torna-se necessário para os professores uma atualização profissional frequente. Uma possibilidade para tal é o curso de formação continuada, que pode oportunizar aos professores o contato com novas tecnologias de ensino. Nesse contexto, um tema, em particular, tem recebido atenção especial, trata-se do ensino de Geometria. Dentre inúmeros softwares que contemplam esse tema, citamos aqui o GeoGebra, que tem sido amplamente aceito na comunidade matemática, graças ao seu dinamismo em abordar tópicos matemáticos. Neste trabalho abarcamos três tarefas realizadas por professores em um curso de formação continuada envolvendo o uso do GeoGebra, cujo conteúdo das tarefas diz respeito ao ensino de pontos notáveis de um triângulo. As análises indicam que o uso desse software viabiliza discussões que, possivelmente, uma aula expositiva não oportunizaria e, com base nas falas dos professores, constatamos uma atitude favorável ao seu uso para o ensino.*

### Introdução

O mundo está sujeito a constantes mudanças, inovações tecnológicas surgem a cada dia, e daí a necessidade de se atualizar com frequência. A *sociedade* se atualiza e se não nos atualizamos ficamos para trás. O *mercado de trabalho* é seletivo e opta pelas pessoas que melhor se adaptam à inserção dos recursos tecnológicos em sua vida.

Assim também é na escola, caso os professores não aprendam a lidar com novas tecnologias, podem perder a atenção dos alunos para aqueles que as utilizam. Sob esse viés, para que os professores tornem suas aulas mais interessantes precisam incluir o uso de tecnologias às suas práticas. Contudo, não é apenas nesse argumento que nos embasamos para defender o uso de tecnologias em sala de aula, mas na premissa de que o uso de determinados recursos tecnológicos pode enriquecer, em particular, o estudo de conteúdos matemáticos, potencializando seu ensino e a aprendizagem dos alunos.

Além disso, inserir-se nesse meio de múltiplas tecnologias não é simples e requer do docente um conjunto de ações que objetivam a preparação para seu uso. Uma das possibilidades é a formação continuada de professores.

Esse tipo de formação contempla, sobretudo, professores que estão em exercício no âmbito da sala de aula e que afetam diretamente na formação acadêmica dos alunos. Visa um ambiente propício à discussão de questões que permeiam a prática docente, contribuindo para o seu aprimoramento.

Nesse contexto, em que a práxis dos professores está em discussão, eles têm a oportunidade de conhecer novas possibilidades para a sala de aula, de discutir com seus pares e de se inteirar das novidades, pensando e refletindo a respeito de sua metodologia de ensino, de modo a tornar suas aulas mais dinâmicas e atrativas.

Um software que nos tem chamado atenção é o GeoGebra, que reúne conceitos de Cálculo, Geometria e Álgebra em um mesmo ambiente de trabalho. Apresenta, dessa forma, potencial para abordar muitos conteúdos matemáticos de forma dinâmica, sendo possível visualizar, mostrar, verificar e até mesmo provar determinadas proposições, de forma investigativa e estimulante.

E levando em conta que muitas vezes o ensino de Geometria é deixado para o final do ano letivo, “*para quando der tempo*”, pensamos ser válido olhar para as contribuições do GeoGebra para os professores no que tange ao seu uso na sala de aula.

Portanto, vislumbramos neste artigo investigar possibilidades oportunizadas pelo GeoGebra para os professores de matemática, em relação ao ensino de Geometria, especificamente, o ensino de pontos notáveis de um triângulo qualquer. Para tanto, em um curso de formação continuada, propomos vinte questões que envolvem tópicos de Geometria a serem pensadas e discutidas com base nas construções realizadas no GeoGebra, dentre as quais optamos por três para abordar neste trabalho. Nessa ocasião, participavam do curso quinze professores que atuam na rede estadual de ensino – núcleo regional de Apucarana – Paraná / Brasil; os encontros eram quinzenais e realizados na Universidade Estadual do Paraná – Campus Apucarana.

### **Mídias Tecnológicas no Ensino de Matemática**

A inserção de Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) na educação tem sido discutida há décadas, e não podemos negar que hoje elas adentram no espaço educacional em todos os níveis de escolaridade, embora ainda existam muitos professores que apresentam receio quanto ao uso em sala de aula, seja por não se sentirem preparados ou por esse uso implicar em uma mudança no cenário escolar e, por conseguinte, no comportamento dos alunos.

Tais sentimentos justificam-se pelo cenário em que as TICs se consolidaram,

se, por um lado, temos instituições escolares desprovidas de equipamentos tecnológicos, por outro, encontramos professores cuja formação não lhes oportunizou a apropriação de conhecimentos que permitam fazer uso desses equipamentos de modo a contribuir para a aprendizagem dos seus alunos (PEREIRA; LOPES; CHIANG, 2012, p. 124).

Entretanto, trabalhos como os de Borba e Penteadó (2003), Maltempi (2008) e Richit (2010), voltados para a formação de professores e utilização das TICs nas aulas de matemática, têm mostrado que é possível uma abordagem diferenciada e qualitativa dos conteúdos matemáticos e, a partir disso, os professores podem passar a acreditar no potencial das TICs e superar seu receio quanto ao seu uso nas aulas (RICHIT, 2010).

A utilização das TICs em ambientes educacionais pode proporcionar diversas possibilidades de ensino e aprendizagem, promovendo desafios para a atividade cognitiva, afetiva e social dos alunos e dos professores em todos os níveis de ensino (KENSKI, 2007). Afinal, “toda inserção de tecnologia no ambiente de ensino e aprendizagem requer um repensar da prática docente, pois ela não é neutra e transforma a relação ensino-aprendizagem” (MALTEMPI, 2008, p. 61). Seu uso pelo professor exige reflexões sobre como elas podem potencializar sua prática e, para isso, é preciso pensar em estratégias que podem viabilizar a construção do conhecimento matemático.

Precisamos analisar os papéis de alunos e professores diante do uso de tecnologias: o professor não pode deixar o aluno livre, a ponto de sentir-se desassistido e estar à vontade para realizar outras atividades, nem entregar todas as etapas prontas a ele, como se fosse apenas uma receita a seguir. De acordo com Almeida (2000, p. 77), “cabe ao professor promover a aprendizagem do aluno para que esse possa construir conhecimento dentro de um ambiente que o desafie e o motive para a exploração, a reflexão, a depuração de ideias e a descoberta”.

A matemática dispõe de diversos aparatos tecnológicos para utilização em sala de aula, como calculadoras, computadores, materiais manipuláveis, internet e diversos softwares, propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais com o intuito de criar ambientes de aprendizagem que possibilitem novas formas de pensar, fazendo com que os alunos aprendam matemática por meio da descoberta, valorizando o experimental e contribuindo para a produção de significados (BORBA; PENTEADO, 2003).

Com esse intuito, a inserção de projetos de formação continuada, voltados para a informática educativa, tem se mostrado uma alternativa para a discussão de como os professores podem utilizar softwares no ensino de diferentes tópicos de matemática, e de como podem organizar sua aula.

Com base nessas considerações, discorremos na seção a seguir sobre o ensino de Geometria e apresentamos o GeoGebra como alternativa para as aulas de matemática.

### **O ensino de Geometria e o software GeoGebra**

Por muito tempo, a Geometria costumava ser aquele capítulo que era deixado de lado, ou para o final do ano letivo, caso sobrasse tempo, e nesse caso, muitos professores não se sentiam a vontade com a Geometria, geralmente associando-a com provas e demonstrações em um caráter mais formal, as quais procuravam evitar. Finalmente, nos últimos anos, as discussões acerca de Geometria estão ganhando espaço e têm sido encaradas com mais seriedade (WALLE, 2009).

De acordo com Walle (2009), os objetivos da Geometria se dividem em dois referenciais: o senso (ou raciocínio) espacial e o conteúdo específico. O senso espacial pode ser definido como uma intuição sobre as formas e as relações entre elas, o qual inclui a habilidade de girar e virar as coisas em sua mente, proporcionando mais segurança com as descrições geométricas de objetos e de suas posições. O conteúdo específico trata a Geometria em seu sentido mais tradicional – conhecer as propriedades de polígonos, saber o que são retas paralelas, perpendiculares e assim por diante.

Levando em conta tais objetivos, uma possibilidade para o ensino de Geometria é o uso de TICs, em particular, o GeoGebra, um software livre, que está instalado em todos os laboratórios de informática das Escolas Estaduais do Paraná; permitindo que os professores da educação básica o utilizem em suas aulas com seus alunos.

Segundo Bennett (2004), o uso do GeoGebra pode auxiliar no processo de transformação daquilo que é abstrato para o concreto (visível), pois o ambiente de Geometria Dinâmica encoraja o processo de descobertas e reflete mais de perto a forma como o ensino de matemática é construído: um matemático, inicialmente, visualiza e analisa um problema, fazendo conjecturas antes de realizar provas e demonstrações.

O dinamismo do GeoGebra facilita a compreensão de muitos conceitos em matemática, permitindo a movimentação de construções iniciais e a visualização do que acontece com os objetos que dependem dessas construções sem a perda dos vínculos geométricos. Desse modo, é possível que sejam feitas várias experimentações que possibilitem a construção de proposições geométricas, gráficos de funções, polígonos, entre outros (BARROS; FRANCO; GERÔNIMO, 2010).

Nesse contexto, lançamos nosso olhar sobre o potencial do GeoGebra para abordar conteúdos de Geometria e suas contribuições para a prática docente.

## **Delineando os Rumos da Pesquisa**

O presente trabalho apresenta a discussão de três tarefas realizadas por professores da rede estadual de ensino em um projeto desenvolvido pela Universidade Estadual do Paraná – Campus Apucarana, que visa oferecer um espaço para a reflexão de conteúdos relacionados ao Ensino Fundamental e Médio.

As tarefas foram mediadas por dois estudantes do curso de Licenciatura em matemática, sendo um deles o primeiro autor deste trabalho. Antes da realização dessas tarefas, foram trabalhadas algumas ferramentas do software para que os professores conhecessem suas funções e se familiarizassem com as mesmas.

No Quadro 1, apresentamos as tarefas em questão, as quais estão associadas ao ensino de pontos notáveis e suas propriedades. Uma possível solução para essas tarefas no GeoGebra é apresentada passo a passo em anexo.

**Quadro 1** – Tarefas associadas ao ensino de pontos notáveis

**Tarefa 1:** Construa um triângulo ABC, encontre os quatro pontos notáveis e enuncie a propriedade geométrica de cada um deles.

**Tarefa 2:** Construa um triângulo isósceles ABC, encontre os quatro pontos notáveis e verifique se há uma relação entre eles.

**Tarefa 3:** Construa um triângulo equilátero ABC, encontre os quatro pontos notáveis e verifique se há uma relação entre eles.

## **Um olhar para a resolução dos professores: algumas reflexões**

Para a realização das tarefas, os professores precisaram lembrar as definições de cada um dos pontos notáveis: baricentro, ortocentro, incentro e circuncentro. Em alguns casos eles conseguiram enunciar as definições, em outros ficaram em dúvida em relação a alguns conceitos. No caso do baricentro, por exemplo, eles lembraram que se trata do ponto de interseção das três medianas relativas aos lados de um triângulo, mas estavam incertos sobre o que era mediana. Devido a isso, decidimos primeiro relembrar tais conceitos, para em seguida começar as construções no GeoGebra. Observamos que a decisão de primar pelo domínio do conteúdo deixou os professores mais a vontade para se aventurarem no uso do software.

Em relação ao exemplo do baricentro, uma vez definido o que é mediana, os professores precisavam encontrar no software ferramentas que permitissem sua construção. O próximo passo, de determinar o ponto de interseção das três medianas, desencadeou em uma discussão associada ao software; o GeoGebra não possui uma ferramenta que nos permita encontrar a interseção de três ou mais objetos, apenas entre dois, e essa pode ser

considerada uma de suas limitações. No entanto, os professores notaram que nessa situação, tal limitação não seria um obstáculo, pois a interseção desejada é a mesma para dois ou três segmentos. Para visualizarem isso, eles movimentaram os vértices do triângulo e observaram o ponto de interseção desses segmentos em várias situações – além de recorrerem à definição, que garante a existência desse mesmo intercepto para os três segmentos.

Podemos inferir com base em Walle (2009) que nessa ocasião houve um estímulo para o desenvolvimento do senso espacial e do conteúdo específico, uma vez que tal episódio levou os professores a construir em suas mentes, e no software, imagens desse ponto de interseção (senso espacial), além de discutirem propriedades advindas da definição (conteúdo específico). Outros episódios em que o desenvolvimento desses referenciais também foi estimulado referem-se à construção do circuncentro e do ortocentro, que ao movimentarem os vértices do triângulo, os professores podiam observar onde se dava o ponto de interseção das mediatrizes e das alturas e a partir dessas observações levantarem conjecturas como: no caso do triângulo ser acutângulo, o circuncentro e o ortocentro encontram-se em seu interior; quando o triângulo é obtusângulo, o circuncentro e o ortocentro estão em seu exterior; e quando o triângulo é retângulo, o encontro das mediatrizes se dá no ponto médio de sua hipotenusa e o encontro das alturas é o vértice que contém o ângulo reto.

Depois de realizadas as construções dos quatro pontos notáveis, pedimos que os professores investigassem se haviam outras propriedades geométricas, além dos pontos de interseção, para isso eles poderiam utilizar quaisquer ferramentas do software, como movimentar objetos, realizar medidas, etc.

Um dos professores apresentou uma hipótese, que três desses pontos: ortocentro, circuncentro e baricentro, são sempre colineares. Ao ser questionado acerca dessa constatação, ele explicou que traçou uma reta passando por dois desses pontos e notou que os três pertenciam à reta, e em qualquer posição que ele deixava os vértices do triângulo, os três pontos continuavam alinhados. Os demais professores também fizeram esse teste e concluíram que a hipótese é verdadeira; um deles ainda afirmou: *“Em uma construção no papel, não conseguiríamos chegar a essa conclusão, já que no papel não podemos movimentá-la, essa é uma vantagem do uso do GeoGebra”*. Essa afirmação reflete a fala de Richit (2010), quando coloca que a utilização das TICs permite uma abordagem diferenciada e qualitativa dos conteúdos matemáticos.

Outras propriedades que já eram conhecidas pelos professores também foram citadas, como o fato do baricentro dividir as medianas em duas partes, tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra; e o incentro e o circuncentro representarem, respectivamente, os centros das circunferências inscrita e circunscrita ao triângulo.

Diante de tais considerações pensamos ser conveniente retomar o que nos propomos nesta pesquisa: investigar possibilidades oportunizadas pelo GeoGebra para os professores de matemática, em relação ao ensino de Geometria, especificamente, no ensino de pontos notáveis de um triângulo qualquer. Pensamos que além de todas as possibilidades já apontadas, o uso do GeoGebra estimula o caráter investigativo das tarefas, permitindo que se levantem hipóteses, criem conjecturas e verifiquem se essas são ou não verdadeiras, desafiando a atividade cognitiva, afetiva e social, como coloca Kenski (2007).

Devido à praticidade de suas ferramentas e ao seu dinamismo, o GeoGebra também otimiza a visualização e facilita a compreensão e interpretação de conceitos geométricos, em particular, os relacionados ao ensino de pontos notáveis, oportunizando discussões que no papel poderiam até mesmo passar despercebidas, tendo em vista o caráter estático e, por isso, limitado das representações por meio desse recurso.

Nesse sentido, o GeoGebra traz mais agilidade, para traçar, por exemplo, medianas, mediatrizes, bissetrizes, alturas etc., para as quais é preciso seguir uma série de passos utilizando régua e compasso e que o software simplifica a apenas alguns cliques. Contudo, como qualquer outro instrumento, o mau uso dessas ferramentas ao invés de ajudar o estudo, pode se tornar um empecilho; se o professor não discute com seus alunos os conceitos envolvidos por trás das construções realizadas pelo software, como podem esses aprender o que estão estudando? Ou como podem saber quais ferramentas do software utilizar? Tudo depende do objetivo do professor e da forma como são abordados os conteúdos. Alinhados com essa ideia, os professores afirmaram que para a inserção efetiva do uso do GeoGebra em suas aulas eles deveriam repensar sobre sua prática, o que vem ao encontro das ideias de Maltempi (2008).

Embora os professores tenham apresentado uma atitude favorável ao uso de tecnologias em sala de aula, eles apontaram diversas dificuldades, como a falta de habilidade no manuseio do GeoGebra – eles atribuem essa dificuldade à falta de familiaridade com o computador em suas tarefas cotidianas e ao fato de que em sua formação não tiveram a oportunidade de trabalhar com softwares. Além disso, alguns professores comentaram como seria difícil a utilização de softwares, devido à precariedade dos computadores e à

falta de manutenção nas escolas, como já haviam alertado Pereira, Lopes e Chiang (2012).

Todavia, mesmo inseguros em relação à inserção de tecnologias em suas práticas, os professores revelaram que pretendiam realizar algumas atividades com o GeoGebra em suas aulas, mesmo que fosse necessário ficar mais de um aluno por computador. Afirmaram que de início poderiam apresentar bastante dificuldades, pois não estão acostumados com práticas dessa natureza, mas estavam dispostos a tentar. Tal atitude mostra a preocupação desses professores com a aprendizagem de seus alunos.

Notamos que após as reflexões proporcionadas pelas discussões nesse curso, os professores mostraram-se entusiasmados com a utilização de softwares como o GeoGebra em sala de aula; seja para estudar pontos notáveis ou mesmo outros conteúdos, mostraram-se dispostos a *correr o risco* de ensinar matemática com o apoio de tecnologias, tendo consciência de que tal empreitada envolve comprometimento e paciência, e mesmo com um pouco de receio, estão dispostos a se engajarem nessa prática, tendo softwares como o GeoGebra como apoio em suas aulas.

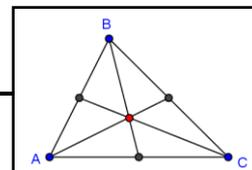
## Referências

- Almeida, M. E. (2000). *Informática e Formação de professores* (2a ed.). Brasília: Ministério da Educação, Seed, v.1 ed. 2,.
- Barros, R. M., Franco, V. S., y Gerônimo, J. R. (2010). *Geometria Euclidiana Plana: Um Estudo com o Software GeoGebra*. Maringá: Eduem.
- Bennett, D. (2004). *Exploring Geometry with The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.
- Borba, M. C., y Penteado, M. (2003) *Informática e Educação Matemática* (3a ed.). Belo Horizonte: Autêntica.
- Kenski, V. M. (2007). *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. Campinas: Papirus.
- Maltempi, M. V. (2008). Educação Matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. *Acta Scientiae*, 10(1), 59-67.
- Pereira, P. S., Lopes, A. R. L. V., y Chiang, K. H. (2012). Formação de professores de matemática e tecnologias: algumas reflexões a partir do uso de software livre. *Perspectivas da Educação Matemática*, 5(10), 123-137.
- Richit, A. (2010). *Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil.
- Walle, J. A. V. (2009). *Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula* (6a ed.). São Paulo: Artmed.

## ANEXO – RESOLVENDO PASSO A PASSO AS TAREFAS NO GEOGEBRA

**Tarefa 1:** Construa um triângulo ABC, encontre os quatro pontos notáveis e enuncie a propriedade geométrica de cada um deles.

### BARICENTRO



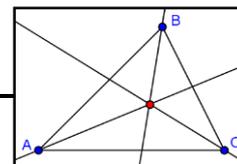
#### PASSOS PARA CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

- 1º) Polígono: *criar um triângulo ABC.*
- 2º) Ponto Médio ou Centro: *encontrar o ponto médio de AB, BC e AC.*
- 3º) Segmento definido por Dois Pontos: *criar os segmentos AE, BF e CD (medianas).*
- 4º) Interseção de Dois Objetos: *clique em duas medianas para encontrar o baricentro.*

#### PROPRIEDADE GEOMÉTRICA

*Divide a mediana em duas partes, sendo a parte que contém o vértice do triângulo o dobro da outra. É sempre interno ao triângulo.*

### INCENTRO



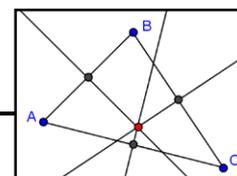
#### PASSOS PARA CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

- 1º) Bissetriz: *encontrar as bissetrizes clicando nos vértices no sentido anti-horário.*
- 2º) Interseção de Dois Objetos: *marcar a interseção entre as bissetrizes para determinar o incentro.*

#### PROPRIEDADE GEOMÉTRICA

*Representa o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC. É sempre interno ao triângulo.*

### CIRCUNCENTRO

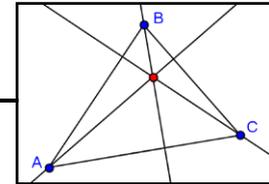


#### PASSOS PARA CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

- 1º) Ponto Médio ou Centro: *encontrar os pontos médios dos lados AB, BC e CA.*
- 2º) Reta Perpendicular: *traçar as retas perpendiculares aos lados e que passam pelos seus respectivos pontos médios.*
- 3º) Interseção de Dois Objetos: *marcar a interseção entre as mediatrizes para encontrar o circuncentro.*

PROPRIEDADE GEOMÉTRICA

Representa o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. É interno ao triângulo se ele é acutângulo, externo se é obtusângulo e coincide com o ponto médio da hipotenusa se é retângulo.



**ORTOCENTRO**

PASSOS PARA CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

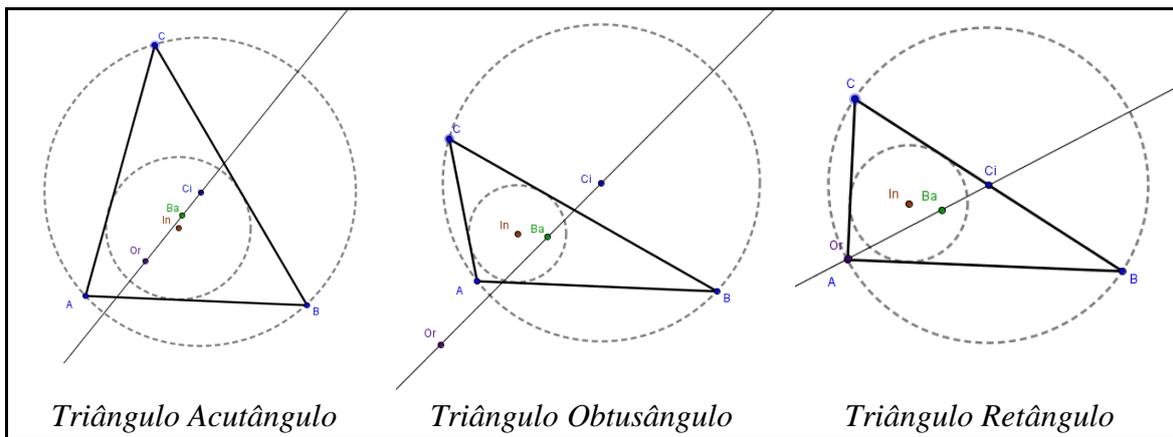
- 1º) Reta perpendicular: *traçar retas perpendiculares aos lados do triângulo que passam pelo vértice oposto.*
- 2º) Interseção de Dois Objetos: *marcar a interseção entre essas retas para determinar o ortocentro.*

PROPRIEDADE GEOMÉTRICA

É interno ao triângulo se ele é acutângulo, externo é obtusângulo e coincide com o vértice do ângulo reto se é retângulo.

**OUTRAS PROPRIEDADES:**

*O ortocentro, circuncentro e baricentro são sempre colineares.  
A distância entre o circuncentro e o baricentro é a metade da distância entre o baricentro e o ortocentro.*



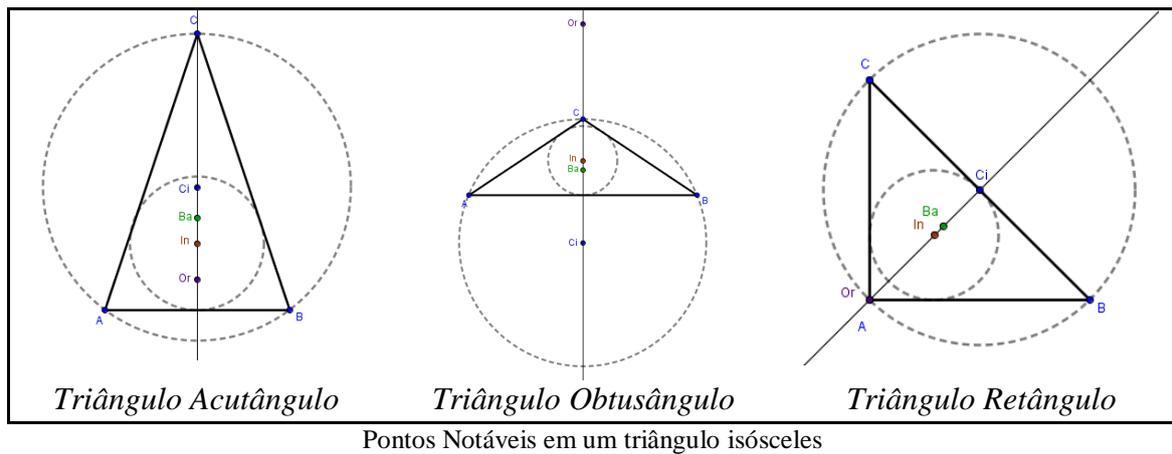
Pontos Notáveis em um triângulo qualquer

**Tarefa 2:** Construa um triângulo isósceles ABC, encontre os quatro pontos notáveis e verifique se há uma relação entre eles.

PASSOS PARA CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

1º) Construa um triângulo de modo que ele seja isósceles.

2º) Pontos Notáveis: siga os mesmos passos da Tarefa 1.



PROPRIEDADE GEOMÉTRICA

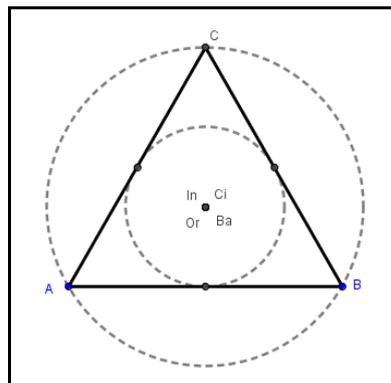
*No triângulo isósceles, os quatro pontos notáveis são colineares.*

**Tarefa 3:** Construa um triângulo equilátero ABC, encontre os quatro pontos notáveis e verifique se há uma relação entre eles.

PASSOS PARA CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

1º) *Polígono regular:* construa um triângulo equilátero.

2º) *Pontos Notáveis:* siga os mesmos passos da Tarefa 1.



Pontos Notáveis em um triângulo equilátero

PROPRIEDADE GEOMÉTRICA

*No triângulo equilátero, os quatro pontos notáveis coincidem.*